Università Carlo Cattaneo — Istituto di Metodi Quantitativi

Primo appello — 10 gennaio 2012

1. Risolvere i seguenti esercizi

a. (5pt) Enunciare il teorema di Weierstrass. Determinare gli eventuali estremanti (globali e locali) della funzione $y = 2x^3 - 3x^2 + 6$ limitatamente all'intervallo $[-1, 2]$.

b. (3pt) Determinare, tra le primitive della funzione $y = (x-2)\, e^x$, quella passante per l'origine.

c. (3pt) Dati i vettori $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, dire, motivando con opportuni calcoli, quanti di essi sono linearmente indipendenti.

2. Un veicolo del valore commerciale di $A = 45.800,00$ € viene concesso in Leasing, a fronte del pagamento di un anticipo in contanti pari al 15% di A e di 4 canoni semestrali posticipati costanti. Il valore di estinzione, corrisposto assieme all'ultimo canone, è pari al 20% di A. Il tasso contrattuale è il $4,59\%$.

a. (4pt) Calcolare l'importo del canone del leasing.

b. (3pt) Determinare il *costo leasing*.

c. (3pt) Il contratto è gravato di $500,00$ € per spese di istruzione pratica e del 2% di ogni canone da corrispondere per spese di incasso. Determinare se il TAEG del contratto è superiore al 6%.

d. (1pt) Enunciare il Teorema di Cantelli per una legge finanziaria in due variabili $F(x,y)$.

3. (Standard) Risolvere i seguenti esercizi:

   a. (9pt) Data la funzione
   $$f(x) = x - 2 + e^{1-x}$$

      1. Determinarne il dominio e l'intersezione con l'asse delle ordinate. Individuare eventuali asintoti (orizzontali, verticali od obliqui) della funzione.
      2. Determinarne gli eventuali punti stazionari e studiarne la monotonia (il crescere e decrescere), individuando eventuali massimi e/o minimi. Dopo avere studiato la convessità di f, evidenziando eventuali punti di flesso, tracciarne un grafico qualitativo. Evidenziare, in particolare le eventuali intersezioni con l'asse delle ascisse.
      3. Calcolare l'area della regione di piano cartesiano compreso tra il grafico della funzione assegnata e l'asse x nell'intervallo $[0, 1]$

   b. (2pt) Un titolo di stato con scadenza tra due anni ha tasso cedolare $j = 3,85\%$ e cedola annua. Il rimborso è alla pari, con nominale $N = 1.000,00$ €. Il titolo è quotato oggi $C = 987,800$ €. Determinare il rendimento effettivo del titolo.

3. (Challenge) Risolvere i seguenti esercizi.

   a. (3pt) Nel mercato sono quotati i titoli a reddito fisso

scadenza (giorni)	0	30	212	364	396
pagamenti (TITOLO A)	$-1034,757$ € (prezzo)	$23,750$ €	$23,750$ €		$1.023,750$ €
pagamenti (TITOLO B)	$-967,650$ € (prezzo)			$1.000,00$ €	

   La struttura per scadenze è piatta con tasso $i = 3,31\%$ (i prezzi dei titoli sono calcolati coerentemente con tale tasso). Calcolare la duration del portafoglio composto da una unità del titolo A ed una del titolo B. *(Si assuma, se necessario, l'anno commerciale come riferimento per la misura del tempo)*

   b. (4pt) Dato il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} k+1 & 2 & -1 \\ 2 & k+1 & 0 \\ -1 & 0 & k+1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   1. Determinare per quali valori del parametro reale k il sistema ammette una unica soluzione.
   2. Verificare se il vettore $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -7/4 \\ -5/2 \\ 5/4 \end{bmatrix}$ è soluzione del sistema per $k = 0$.

   c. (4pt) Data la funzione

$$F(x, y) = 2x + 3y + 4$$

   ed il vincolo

$$2xy - 6 = 0$$

   1. Scrivere l'espressione analitica della funzione Lagrangiana;
   2. Determinare eventuali punti stazionari della funzione Lagrangiana;
   3. Determinare eventuali estremanti vincolati della funzione F rispetto al vincolo assegnato.

1. (a) Essendo una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, essa, per il teorema di Weierstrass, possiede certamente minimo e massimo globali. Inoltre, poiché f è derivabile nei punti interni dell'intervallo, i punti di estremo, locali o globali, sono o gli estremi dell'intervallo o, per il teorema di Fermat, i punti stazionari. Abbiamo
$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$
e quindi i punti stazionari sono $x = 0$ e $x = 1$. Essendo $f(-1) = 1$, $f(0) = 6$, $f(1) = 5$ e $f(2) = 10$, il massimo globale è $M = 10$ in $x = 2$, il minimo globale è $m = 1$ in $x = -1$. Poiché la funzione è crescente per $x < 0 \vee x > 1$, $x = 0$ è un punto di massimo locale $M_1 = 6$ e $x = 1$ è un punto di minimo locale $m_1 = 5$.

   (b) Integrando per parti si ottiene $\int (x-2)\, e^x dx = (x-2)\, e^x - \int e^x dx = e^x (x-3) + C$, e, imponendo il passaggio per l'origine deve risultare $0 = -3+C$, da cui $C = 3$. La funzione richiesta è pertanto $F(x) = e^x (x-3) + 3$.

   (c) Si consideri la matrice ottenuta affiancando i tre vettori assegnati: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$.
Essa ha determinante nullo, quindi i tre vettori non sono linearmente indipendenti. Poiché il rango di tale matrice è 2, vi sono due vettori linearmente indipendenti tra $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

2. (a) La condizione di chiusura per il contratto di leasing impone:
$$45.800 = 6870 + \frac{C}{(1,0459)^{1/2}} + \frac{C}{1,0459} + \frac{C}{(1,0459)^{3/2}} + \frac{C}{(1,0459)^2} + \frac{9.160}{(1,0459)^2}$$
dalla quale si ricava $C =$ € $8.077,323$.

   (b) Il costo leasing (somma delle quote di interesse pagate nell'intero contratto) può essere calcolato come:
$$\text{Costo leasing} = \sum_{s=1}^{4} C_s - (A - B - E) = \text{€ } 2.539,291$$

   (c) Dal punto di vista della società di leasing, l'operazione così modificata presenta i seguenti flussi di cassa

epoca (anni)	0	1/2	1	3/2	2
flussi €	$-38.430,000$	$8.238,869$	$8.238,869$	$8.238,869$	$17.398,869$

Considerando il grafico del DCF di un investimento, si può valutare il TAEG in base al segno del valore attuale netto. Poiché $NPV(6\%) = 379,084 > 0$, il TAEG sarà maggiore del 6% (compreso tra il 4,59% ed il 6%).

(d) (Si veda il libro di testo).

3. (St.) (a) 1. Il dominio è $A := (-\infty, +\infty)$. La funzione interseca l'asse delle ordinate nel punto $(0, e^{-2})$. Agli estremi del dominio si trovano i valori dei limiti $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Si presenta quindi la possibilità che vi siano degli asintoti obliqui. Poiché

$x \to -\infty$	$x \to +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = -2$
no asintoti obliqui	$y = x - 2$ asintoto obliquo

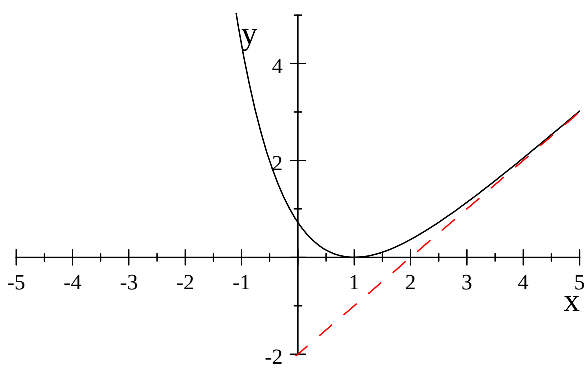
2. Si ha

$$f'(x) = -\left(e^{-x+1} - 1\right)$$

(la funzione è derivabile in tutto il suo dominio) da cui $f'(x) = 0$ per $x = 1$

	$(-\infty, 1]$	$[1, +\infty)$
$1 - e^{1-x}$	$-$	$+$
monotonia di f	$\searrow$	$\nearrow$

Pertanto si ha un punto di minimo relativo in $x = 1$ $(f(1) = 0)$ La funzione ammette derivata seconda $f''(x) = e^{-x+1}$. Pertanto, poiché $f''(x) > 0$ $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, la funzione sarà convessa in tutto il suo dominio, senza punti di flesso. Inoltre il punto di minimo trovato è anche globale. Il grafico qualitativo è



Dal grafico si ricava che la funzione interseca l'asse x solo nel punto $(1, 0)$.

3. La funzione è sempre positiva nell'intervallo, quindi l'area richiesta è $A = \int_0^1 \left(x - 2 + e^{1-x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x - e^{1-x}\right]_0^1 = e - \frac{5}{2} > 0.$

b. Il titolo propone i flussi di cassa

epoca (anni)	0	1	2
flussi (€)	$-987,800$	$+38,500$	$+1.038,500$

pertanto, posto $v = (1 + x)^{-1}$, il rendimento effettivo è l'unica soluzione $x^* > -1$ dell'equazione

$$-987,8 + 38,5v + 1038,5v^2 = 0$$

ovvero $x^* = 4,501\%$.

3. (Ch) (a) L'investimento propone i flussi di cassa (complessivi)

scadenza (giorni)	0	30	212	364	396
flussi (€)	$-2.002,407$ (prezzo)	$23,750$	$23,750$	$1.000,000$	$1.023,750$

La duration è quindi

$$\begin{aligned} D &= \frac{\frac{23{,}75}{(1{,}0331)^{30/360}} \times \frac{30}{360} + \frac{23{,}75}{(1{,}0331)^{212/360}} \times \frac{212}{360} + \frac{1.000}{(1{,}0331)^{364/360}} \times \frac{364}{360} + \frac{1.023{,}75}{(1{,}0331)^{396/360}} \times \frac{396}{360}}{2.002,407} = \\ &= 1,039 \text{ anni} \end{aligned}$$

1. Il sistema è quadrato, per essere determinato, quindi, deve avere matrice dei coefficienti non singolare:

$$\det \begin{bmatrix} k+1 & 2 & -1 \\ 2 & k+1 & 0 \\ -1 & 0 & k+1 \end{bmatrix} = (k+1)\left(2k+k^2-4\right) \neq 0$$

ovvero per $k \neq -1; -1 \pm \sqrt{5}$.

2. Per $k=0$ il sistema ammette una sola soluzione. Poiché

$$\begin{bmatrix} +1 & 2 & -1 \\ 2 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -7/4 \\ -5/2 \\ 5/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

il vettore non è soluzione del sistema lineare.

c. 1. La funzione Lagrangiana risulta essere $\mathcal{L}(\lambda, x, y) = 2x + 3y + 4 + \lambda(6 - 2xy)$.

2. Il gradiente di $\mathcal{L}(\lambda, x, y)$ è

$$\nabla \mathcal{L}(\lambda, x, y) = \begin{bmatrix} 6 - 2xy \\ 2 - 2y\lambda \\ -2x\lambda + 3 \end{bmatrix}$$

i punti stazionari sono quindi le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 6 - 2xy = 0 \\ 2 - 2y\lambda = 0 \\ -2x\lambda + 3 = 0 \end{cases}$$

ovvero i punti $P = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, e $Q = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

3. Conoscendo i punti stazionari, gli eventuali estremanti si possono individuare attraverso lo studio della matrice Hessiana di $\mathcal{L}(\lambda, x, y)$:

$$\nabla^2 \mathcal{L}(\lambda, x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -2y & -2x \\ -2y & 0 & -2\lambda \\ -2x & -2\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

Si ottiene, nei due punti stazionari:

$$P:\ \nabla^2\mathcal{L}\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2},-\tfrac{3}{2}\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=.\begin{bmatrix}0 & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\\ 3\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$$

Poiché $H_3 = 24\sqrt{2} > 0$ il punto è di massimo locale vincolato.

$$Q:\ \nabla^2\mathcal{L}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\tfrac{3}{2}\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=\begin{bmatrix}0 & -2\sqrt{2} & -3\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\ -3\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$$

Poiché $H_3 = -24\sqrt{2} < 0$, il punto è di minimo locale vincolato.