Secondo appello 03 luglio 2012

1. Risolvere i seguenti esercizi

a. (4pt) Enunciare la definizione di punto di massimo locale per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Data la funzione $f(x) = x^2 \ln x$

   1. Verificare che $f(x)$ ha esattamente un punto x_0 di estremo locale e determinarne la natura.
   2. Stabilire se il punto x_0 è anche di estremo globale. Giustificare la risposta.

b. (3pt) Data la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, verificare che $\mathbf{A}$ è invertibile. Dire inoltre, giustificando la risposta quale tra le matrici $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ sia l'inversa di $\mathbf{A}$.

c. (3pt) Data la funzione $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, scrivere una sua generica primitiva G. Calcolare poi l'integrale improprio (generalizzato) $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

2. Un bene di valore $A = 12.500,00$ € viene concesso in leasing. Il cliente dovrà pagare 3 canoni anticipati e 5 canoni trimestrali posticipati, oltre ad un premio di estinzione $E = 8.000,00$ € (da versare alla scadenza del contratto tra due anni da oggi). Il contratto è stipulato con un tasso annuo effettivo $i = 8,46\%$ ed i canoni sono di importo costante.

a. (2pt) Enunciare la condizione di chiusura per un contratto di leasing (si consideri la presenza simultanea di un anticipo in contanti B e di r canoni anticipati oltre ad n canoni posticipati). Calcolare il tasso trimestrale (i_4) equivalente al tasso contrattuale i.

b. (3pt) Calcolare l'importo del canone che dovrà essere versato e l'anticipo pagato.

c. (3pt) Scrivere i flussi di cassa generati dal contratto per la società di leasing e rappresentare graficamente il DCF dell'operazione finanziaria.

d. (3pt) Il contratto prevede $150,00$ € di spese di istruttoria da corrispondere alla sottoscrizione e $5,50$ € di spese di incasso per ogni canone posticipato. Si dica, motivando la risposta, se il TAEG del contratto superi il $9,00\%$ annuo.

3. (Standard) Risolvere i seguenti esercizi:

a. (6pt) Data la funzione

$$f(x) = \frac{2x+6}{x^2}$$

1. Determinarne il dominio, il segno e l'intersezione con gli assi cartesiani. Individuare, calcolando i limiti alla frontiera, eventuali asintoti (orizzontali, verticali od obliqui) della funzione.
2. Determinarne gli eventuali punti stazionari e studiarne la monotonia (il crescere e decrescere), individuando eventuali massimi e/o minimi.
3. Trovare eventuali punti di flesso, indicare in quali sottoinsiemi del dominio risulta concava e tracciare un grafico qualitativo della funzione.

b. (5pt) Sono noti i tassi spot $h^{(0)}(0,1) = 2,80\%$ e $h^{(0)}(0,2) = 3,05\%$ ed il tasso forward $h^{(0)}(1,3) = 2,95\%$. Calcolare il prezzo di non arbitraggio (cioé coerente con la struttura a termine descritta) di un titolo che pagherà cedole di importo 10,00 € alle scadenze $t = 1,2,3$ e rimborserà 1.000,00 alla maturità $T = 3$.

3. (Challenge) Risolvere i seguenti esercizi.

   a. (3pt) Il mercato è caratterizzato da una struttura a termine piatta con $i = 4,56\%$. Determinare la duration dell'operazione finanziaria (espressa in anni)

epoca (mesi)	4	10	16
flussi €	$75,00$	$75,00$	$10.075,00$

   b. (2pt) Determinare il numero delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ -6 & -9 & -12 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 12 \\ -4 \end{bmatrix}$$

   c. (6pt) Data la funzione obiettivo $F(x, y, z) = 2x^3 - 4x^2 + y^2 + 2xy + z^3 - 12z$

      1. Calcolare il gradiente di F;
      2. Calcolare gli eventuali punti stazionari della funzione;
      3. Dopo avere calcolato la matrice Hessiana in un generico punto (x, y, z), determinare se il punto di coordinate $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 2\right)$ è un estremante della funzione.

1. (a) 1. La funzione $f(x)$ è definita nel dominio $A = (0, +\infty)$ ed è derivabile in tutto A. La sua derivata è $f'(x) = x + 2x \ln x = x(1 + 2\ln x)$. Si ha $f'(x) = 0$ quando $1 + 2\ln x = 0$, ovvero per $x = e^{-1/2}$. Si ha poi $f'(x) < 0$ per $0 < x < e^{-1/2}$ e $f'(x) > 0$ per $x > e^{-1/2}$. Il punto $x = e^{-1/2}$ è quindi di minimo locale.

2. Il dominio A è un intervallo. La funzione $f(x)$ è sempre decrescente prima di $x = e^{-1/2}$ e sempre crescente dopo $x = e^{-1/2}$. Il punto $x = e^{-1/2}$ è quindi anche di minimo globale.

(b) Poiché $\det \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 8 \neq 0$, la matrice $\mathbf{A}$ è invertibile. Per determinare quale sia la sua inversa tra le alternative proposte, sono corretti vari procedimenti, tra cui almeno i due seguenti (nei quali non è necessario calcolare l'inversa $\mathbf{A}^{-1}$).

* Poiché $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ si differenziano solo per il termine situato nel posto di indice 2,3, basta ricavare il termine corrispondente dell'inversa $\mathbf{A}^{-1}$. Si ha $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il complemento algebrico del termine situato nel posto di indice 2,3 è $(-3) \cdot (-1) = 3$, che diviso per $\det \mathbf{A} = 8$ porge il risultato $\frac{3}{8}$. Quindi la risposta corretta è $\mathbf{C}$.

** Deve essere $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Svolgendo il prodotto $\mathbf{AB}$, nel posto di indice 2,3 la matrice ottenuta recherà il termine $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$. Mentre svolgendo il prodotto $\mathbf{AC}$, nel posto di indice 2,3 la matrice ottenuta recherà il termine $-\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0$. Quindi la risposta corretta è $\mathbf{C}$.

(c) Si ha $G(x) = \int \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \int (\ln x) \frac{1}{x^2}\, dx$. Integrando per parti, si ottiene $G(x) = \ln x \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}\right) dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$. Si ha quindi $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{k \to +\infty} \int_1^k \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \lim_{k \to +\infty} \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^k =$ $\lim_{k \to +\infty} \left(-\frac{\ln k}{k} - \frac{1}{k} + 1\right) = 1.$

2. (a) Il tasso periodale del contratto è $i_4 = 2,05\%$ circa.

(b) L'importo del canone deve essere tale che

$$12.500 = 3 \times C + C \times a_{5\rceil 2,05\%} + \frac{8000}{(1 + 2,05\%)^8}$$

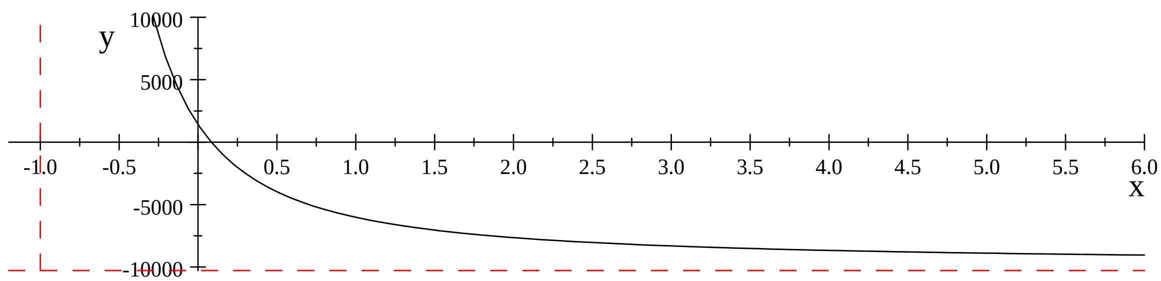
da cui si ricava che $C = 739,467$ € circa. L'anticipo che dovrà essere pagato è quindi $2.218,40$ €.

(c) L'operazione finanziaria genera, per il creditore i flussi di cassa

epoca (trimestre)	flussi (€)
0	$-10.281,60$
1	$739,467$
2	$739,467$
3	$739,467$
4	$739,467$
5	$739,467$
6	0
7	0
8	$8.000,000$

Si tratta di un investimento puro, il cui DCF è la funzione

$$G(x) = -10.281,60 + \frac{739,467}{(1+x)^{\frac{1}{4}}} + \frac{739,467}{(1+x)^{\frac{2}{4}}} + \frac{739,467}{(1+x)^{\frac{3}{4}}} + \frac{739,467}{(1+x)^{\frac{4}{4}}} + \frac{739,467}{(1+x)^{\frac{5}{4}}} + \frac{8.000}{(1+x)^{\frac{8}{4}}}$$



(d) Aggiungendo gli oneri descritti, il contratto prevede i flussi di cassa

epoca (trimestre)	flussi (€)
0	$-10.131,60$
1	$744,967$
2	$744,967$
3	$744,967$
4	$744,967$
5	$744,967$
6	0
7	0
8	$8.005,500$

Osservando il problema dal punto di vista del creditore (primo flusso di cassa negativo) e calcolando il $NPV(0,09) = +99,791 > 0$, si deduce che il TAEG è maggiore del 9%.

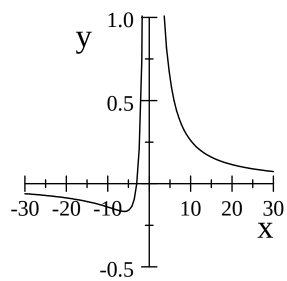
3. (St) 1. La funzione è definita nell'insieme $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, non interseca l'asse y e interseca l'asse x nel punto $(-3,0)$. Risulta inoltre positiva per $x\in(-3,0)\cup(0,+\infty)$, negativa altrove. Poiché agli estremi del dominio ha limite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= 0^+\\ \lim_{x\to0^\pm} f(x) &= +\infty\\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= 0^-\end{aligned}$$

presenta quindi un asintoto orizzontale $y=0$ per $x\to\pm\infty$ ed un asintoto verticale in $x=0$.

2. La derivata prima risulta essere $f'(x)=\dfrac{-2(6+x)}{x^3}$, definita in tutto il dominio della funzione primitiva. Poiché la funzione risulta crescente $(f'(x)>0)$ nell'intervallo $x\in(-6,0)$ e decrescente $(f'(x)<0)$ nell'intervallo $(-\infty,-6)$ e nell'intervallo $(0,+\infty)$, si deduce che $x=-6$ è un punto di minimo almeno locale (anche globale).

3. La derivata seconda risulta essere $f''(x)=\dfrac{4x+36}{x^4}$. Si ha un punto di flesso in $x=-9$ con f concava nell'intervallo $(-\infty,-9)$. Un grafico qualitativo è



(e) In base alla struttura a termine disponibile, il prezzo di non arbitraggio del titolo può essere espresso come $P=10\times v^{(0)}(0,1)+10\times v^{(0)}(0,2)+1.010\times v^{(0)}(1,3)\times v^{(0)}(0,1)$.Poiché i prezzi spot sono $v^{(0)}(0,1)=0,9728$ e $v^{(0)}(0,2)=0,9417$ ed il prezzo forward è $v^{(0)}(1,3)=0,9435$, si ricava che il prezzo è $P=946,14$ €.

3. (Ch) (a) Risulta

$$\begin{aligned}D &= \frac{\frac{4}{12}\times75\times(1,0456)^{-\frac{4}{12}}+\frac{10}{12}\times75\times(1,0456)^{-\frac{10}{12}}+\frac{16}{12}\times10075\times(1,0456)^{-\frac{16}{12}}}{75\times(1,0456)^{-\frac{4}{12}}+75\times(1,0456)^{-\frac{10}{12}}+10075\times(1,0456)^{-\frac{16}{12}}}=\\ &= 1,3219 \text{ anni.}\end{aligned}$$

(b) La matrice dei coefficienti risulta avere almeno rango 1. Considerando le orlate della sottomatrice $\mathbf{B} = [2]$, corrispondente all'elemento di posizione $3, 1$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{C}_1 &= \det \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 0 \\
\det \mathbf{C}_2 &= \det \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 0 \\
\det \mathbf{C}_3 &= \det \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 0 \\
\det \mathbf{C}_4 &= \det \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 0
\end{aligned}$$

quindi la matrice ha rango 1. Poiché il vettore $\mathbf{b}$ è la terza colonna della matrice dei coefficienti, moltiplicata per -1, la matrice completa $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ avrà lo stesso rango della matrice dei coefficienti. Il sistema ammette quindi infinite soluzioni con due gradi di libertà.

(c) 1. Il gradiente di $F(x, y, z)$ è $\nabla F(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6x^2 - 8x + 2y & 2x + 2y & 3z^2 - 12 \end{bmatrix}$

2. I punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 6x^2 - 8x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 3z^2 - 12 = 0 \end{cases}$$

ovvero $P_1 = \left[x = \frac{5}{3}, y = -\frac{5}{3}, z = -2\right]$, $P_2 = [x = 0, y = 0, z = -2]$, $P_3 = \left[x = \frac{5}{3}, y = -\frac{5}{3}, z = 2\right]$, $P_4 = [x = 0, y = 0, z = 2]$

3. La matrice Hessiana di $F(x, y, z)$ è:

$$\nabla^2 F(x, y, z) = \begin{bmatrix} 12x - 8 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{bmatrix}$$

Poiché il punto assegnato è un punto stazionario, la matrice Hessiana nel punto ha valore

$$\nabla^2 F\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 2\right) = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

e la catena dei segni è $H_1 = 12 > 0$; $H_2 = 20 > 0$; $H_3 = 240 > 0$, il punto è di minimo almeno relativo forte.