Cinematica

Es. 1

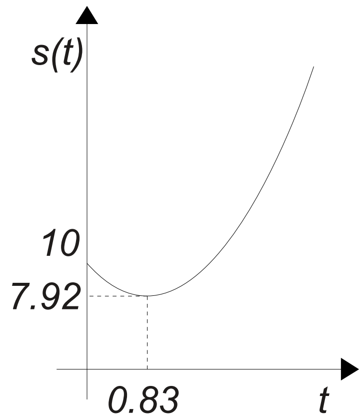
Un punto materiale si muove di moto rettilineo secondo la legge

$$s(t)=10-5t+3t^2 \quad (1)$$

Dire di che tipo di moto si tratta. Determinare la velocità istantanea $v(t)$ del punto materiale, la sua accelerazione a e l'istante *t* in cui avviene l'inversione del moto.

Soluzione

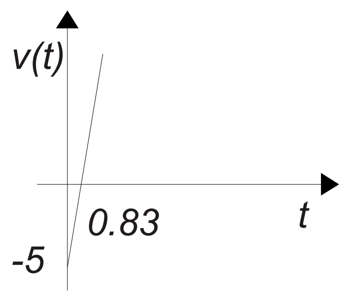
La funzione *s(t)* è un polinomio di secondo grado, che graficamente corrisponde alla parabola con concavità verso l'alto (il coefficiente del termine t^2 è positivo) che intercetta l'asse delle ordinate nel punto *s(0)=10 m*. Il grafico di tale parabola, nel semiasse *t>0 s*, è rappresentato qui sotto.



Poiché *s(t)* è un polinomio di secondo grado, esso rappresenta un moto uniformemente accelerato $s(t)=s_0+v_0 t+\frac{1}{2}at^2$ in cui $s_0=10\ m$, $v_0=-5\ m/s$ e $a=6\ m/s^2$. La velocità istantanea *v(t)* si determina derivando la legge oraria *s(t)* rispetto al tempo

$$v(t)=\frac{ds(t)}{dt}=-5+6t. \quad (2)$$

In alternativa si sarebbe potuto pervenire all'Eq. 1 tramite la relazione $v(t)=v_0+at$ in cui v_0 e *a* sono quelli determinati in precedenza. Di seguito il grafico della funzione *v(t)*.



L'istante in cui avviene l'inversione di moto è quello in cui la velocità cambia di segno, passando da positiva a negativa, o viceversa; in questo istante pertanto la velocità si annulla:

$$-5+6t=0 \quad (3)$$

da cui $t=0.83\ s$. In questo istante la sua posizione è $s(0.83)=8.48\ m.$

Interpretazione
Il punto materiale si trova ad una distanza $s_0 = 10\ m$ dall'origine degli assi *O* e si muove inizialmente in direzione negativa (v<*0*), fino al punto più vicino all'origine degli assi (*s=8.48 m*) in cui inverte il suo moto (v=0) e si allontana con velocità positiva (v>*0*). Il moto è inizialmente uniformemente decelerato; infatti velocità e accelerazione sono opposte. Dopo l'inversione della velocità abbiamo un moto uniformemente accelerato.

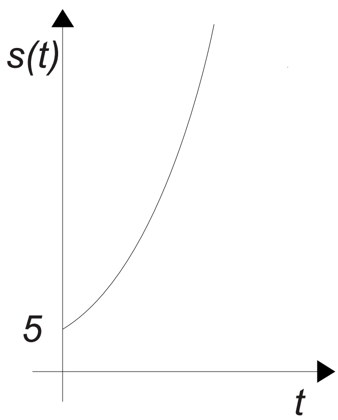
Es. 2
Un punto materiale si muove di moto rettilineo secondo la legge

$$s(t) = 5 + 3t + 2t^2 + t^3 \quad (4)$$

Dire di che tipo di moto si tratta. Determinare la velocità istantanea $v(t)$ del punto materiale, la velocità media tra gli istanti *t=0 s* e *t=2 s*, l'accelerazione nell'istante *t=0 s*.

Soluzione

La funzione *s(t)* è un polinomio di terzo grado, che per $t \geqslant 0\ s$ è rappresentata nel grafico qui sotto.



Poiché *s(t)* è un polinomio di terzo grado, l'accelerazione non è costante, ma funzione del tempo. Derivando infatti la legge oraria rispetto al tempo otteniamo le funzioni velocità e accelerazione, da cui si nota che quest'ultima non è costante:

$$\begin{cases} v(t) = \dfrac{d}{dt}(5 + 3t + 2t^2 + t^3) = 3 + 4t + 3t^2 \\ a(t) = \dfrac{d}{dt}(3 + 4t + 3t^2) = 4 + 6t. \end{cases} \quad (5)$$

La velocità media v_m si trova come rapporto incrementale tra spazio e tempo, in particolare negli istanti *t=0 s* e *t= 2 s*:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2) - s(0)}{2 - 0} = \frac{27 - 5}{2} = 11\ m/s. \quad (6)$$

L'accelerazione *a* nell'istante *t=0 s* si determina sostituendo nella seconda equazione del sistema (6) il valore del tempo: $a(0) = 4\ m/s^2$.
Interpretazione
Il punto materiale si trova ad una distanza $s_0 = 5\ m$ dall'origine degli assi *O* e si muove in direzione positiva (v>*0*), allontanandosi sempre più dall'origine degli assi. L'accelerazione non è costante, ma varia crescendo linearmente nel tempo.

Es. 3
Un punto materiale si muove nello spazio seguendo le leggi orarie

$$\begin{cases} x(t)=1+t \\ y(t)=t-2t^2. \end{cases} \quad (7)$$

Determinare il vettore spostamento, la posizione all'istante $t=0\ s$, il vettore velocità e la traiettoria.

Soluzione

Il vettore spostamento si trova componendo le coordinate lungo $\hat{i}$ e $\hat{j}$:

$$\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}=(1+t)\hat{i}+(t-2t^2)\hat{j}. \quad (8)$$

All'istante $t=0\ s$ il punto materiale si trova nella posizione

$$\vec{r}(0)=\hat{i}+0\hat{j}, \quad (9)$$

mostrando che il vettore spostamento, all'istante $t=0\ s$ si trova nel punto di coordinate *(1,0)*.

Il vettore velocità, come nel caso unidimensionale, è la derivata temporale del vettore spostamento:

$$\vec{v}(t)=\frac{d}{dt}[(1+t)\hat{i}+(t-2t^2)\hat{j}]=\hat{i}+(1-4t)\hat{j}. \quad (10)$$

Poiché la velocità lungo la direzione orizzontale è costante, mentre lungo la direzione verticale aumenta linearmente con il tempo, possiamo affermare che il moto è di tipo parabolico. Questa caratteristica è ancora più evidente se si valuta il vettore accelerazione $\vec{a}$:

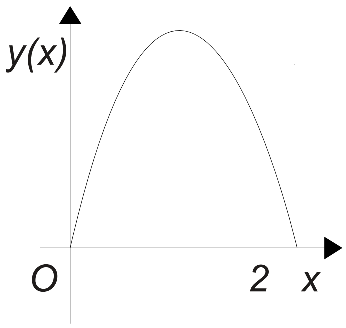
$$\vec{a}=\frac{d}{dt}\vec{v}(t)=-4\hat{j}, \quad (11)$$

notando che l'accelerazione è solo sulla componente $\hat{j}$.

La traiettoria si ottiene combinando le equazioni in (7) in modo che si elimini il tempo. A questo scopo, otteniamo il tempo dall'equazione in x e sostituiamolo nell'equazione in y:

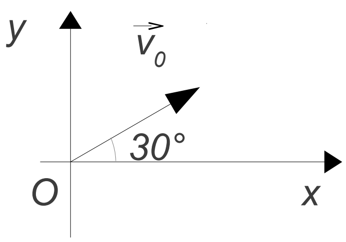
$$\begin{cases} t=1-x \\ y(x)=x-2x^2, \end{cases} \quad (12)$$

da cui si trova l'equazione della traiettoria $y(x)=x-2x^2$.



Es. 4

Un proiettile viene sparato con inclinazione $\alpha=30°$ all'orizzonte alla velocità $v_0=30\ m/s$, come in figura.



Determinare *a)* la quota massima h_{max} raggiunta e *b)* la gittata.

Soluzione
Il moto bidimensionale può essere visto come la composizione di due moti unidimensionali, nella direzione x e nella direzione y. Lungo la direzione x, non essendoci alcuna accelerazione netta, avremo un moto rettilineo e uniforme. Lungo la direzione y agisce l'accelerazione di gravità g, pertanto avremo un moto uniformemente accelerato. La posizione iniziale è 0 lungo x e lungo y. Pertanto le leggi orarie diventano:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0\text{x}} \\ v_y(t) = v_{0\text{y}} - g\,t \\ x(t) = v_{0\text{x}}\,t \\ y(t) = v_{0\text{y}}\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \end{cases}$$

dove $v_{0x}=v_0\cos\alpha$ e $v_{0y}=v_0\sin\alpha$.
Il proiettile parte inizialmente con velocità v_{0x} e v_{0y}, muovendosi pertanto verso l'alto e verso destra. L'accelerazione di gravità fa sì che la componente verticale della velocità diminuisca, annullandosi ad un certo punto, per invertire segno. Questo significa che il proiettile inverte la sua rotta iniziando a cadere: la velocità aumenta in modulo sotto l'effetto della accelerazione di gravità.
a) Per determinare la quota massima dobbiamo considerare che in corrispondenza della quota massima la velocità cambia segno, passando da positiva (ascesa) a negativa (discesa). Pertanto poniamo $v_{0y}(t)=0$, che fornisce il valore dell'istante di tempo t nel quale il proiettile raggiunge la quota massima: $t=v_{0y}/g$. Sostituendo questo valore nella legge oraria per $y(t)$ otteniamo la quota massima raggiunta:

$$h_{max} = y\left(\frac{v_{0\text{y}}}{g}\right) = \frac{v_{0\text{y}}^2}{2\text{g}} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2\text{g}}. \quad (13)$$

Nel nostro caso

$$h_{max} = \frac{30^2 \sin^2 30\,°}{2\;9.81} = 11.47\;m. \quad (14)$$

b) Per determinare la distanza massima raggiunta troviamo innanzitutto l'equazione della traiettoria $y(x)$, sostituendo alla variabile t all'interno dell'equazione $y(t)$ il valore $t=x/v_{0x}$, ricavato dall'equazione $x(t)$:

$$\begin{aligned} y(x) &= v_{0\text{y}}\,\frac{x}{v_{0\text{x}}} - \frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_{0\text{x}}}\right)^2 \\ y(x) &= \tan\alpha\,x - \frac{1}{2}\,\frac{g\,x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} \end{aligned} \quad (15)$$

Ponendo ora $y(x)=0$ otteniamo quei valori di x per i quali la quota è nulla.

$$\begin{cases} y(x) = 0 \\ \tan\alpha\,x - \frac{1}{2}\,\frac{g\,x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Da cui otteniamo le due soluzioni

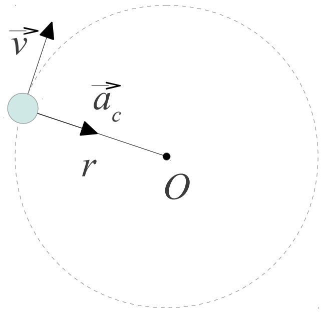
$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \end{cases} \quad (17)$$

La soluzione x_1 rappresenta il punto di partenza, la soluzione x_2 rappresenta la gittata. Nel nostro esercizio avremo

$$x_2 = \frac{30^2 \sin(2\;30\,°)}{9.81} = 79.45\;m. \quad (18)$$

Es. 5

Un punto materiale ruota di moto circolare e uniforme su una traiettoria di raggio $r=1$ m alla velocità tangenziale $v_T=10\ m/s$. Determinare l'accelerazione centripeta a_c, il numero di giro che la il punto materiale compie in un secondo e il tempo richiesto affinché il punto materiale compia un giro.



Soluzione

L'accelerazione centripeta a_c, come mostrato in figura, è rivolta verso il centro di curvatura, ovvero il centro della circonferenza. Essa è, pertanto, sempre perpendicolare alla velocità tangenziale v_T. Il valore dell'accelerazione centripeta è

$$a_c=\frac{v_T^2}{r}=100\ m/s^2. \quad \textbf{(19)}$$

Per trovare il numero di giri compiuto in un secondo, dobbiamo determinare *a)* lo spazio Δs percorso dal punto materiale in un secondo, *b)* la lunghezza C della circonferenza (lunghezza di un singolo giro) e *c)* dividere Δs per C.

a) Lo spazio Δs si determina considerando che la velocità tangenziale v_T è costante, per cui useremo la legge

$$\Delta s=v_T \Delta t=10\ 1=10\ m. \quad \textbf{(20)}$$

b) La lunghezza della circonferenza è

$$C=2\pi r=6.28\ m; \quad \textbf{(21)}$$

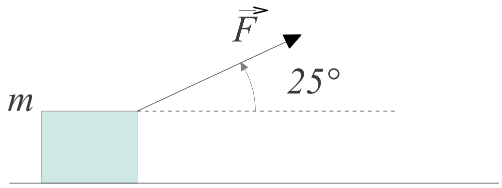
c) Il numero di giri percorso è

$$N=\frac{\Delta s}{C}=1.59. \quad \textbf{(22)}$$

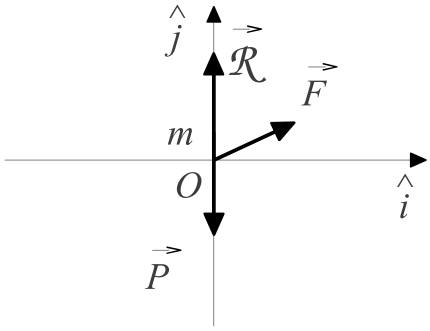
Il tempo richiesto per compiere un giro si trova sempre tramite la legge oraria $\Delta s=v_T \Delta t,$ ponendo questa volta $\Delta s=2\pi r,$ lunghezza della circonferenza, e ricavando il tempo impiegato Δt:

$$\Delta t=\frac{\Delta s}{v_T}=\frac{2\pi r}{v_T}=\frac{6.28}{10}=6.28\ 10^{-1}\ m. \quad \textbf{(23)}$$

Dinamica
Es. 6
La massa $m=1\ kg$ giace su un piano orizzontale. A essa è applicata la forza $F=10\ N$ come in figura. Determinare il moto della massa m.



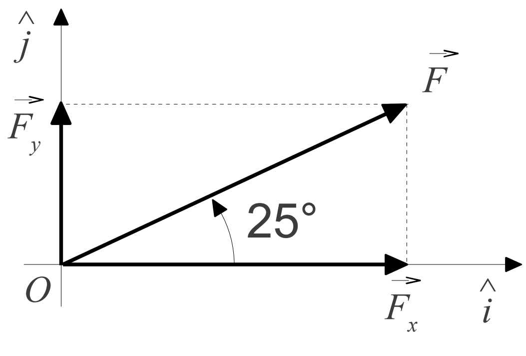
Soluzione
Per risolvere questo problema dobbiamo partire dal *grafico del corpo libero*, ovvero il grafico che mette in evidenza tutte le forze agenti sulla massa m, e successivamente scrivere le equazioni di Newton. Le forze agenti sulla massa m sono: la forza F, la forza peso $P=mg$, la reazione vincolare $\mathcal{R}$ del piano di appoggio. Mentre delle prime due conosciamo il valore, quest'ultima varia con la forza normale N agente sul piano stesso. Infatti abbiamo $\mathcal{R}=N$.



Individuate le forze, scriviamo la seconda legge di Newton $\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$:

$$\vec{\Re} + \vec{F} + \vec{P} = m\vec{a} \quad \textbf{(24)}$$

dove ci conviene scomporre la forza F nelle sue componenti orizzontale e verticale:



$$\begin{cases} \vec{F}_x = F\cos 25°\ \hat{i} \\ \vec{F}_y = F\sin 25°\ \hat{j}. \end{cases} \quad \textbf{(25)}$$

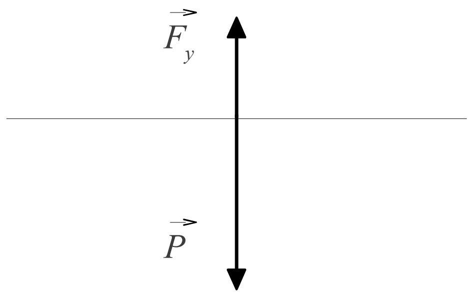
Riscriviamo l'equazione 24 sviluppando considerando le componenti dei singoli vettori, noto il fatto che $\vec{P}=-mg\,\hat{j}$ e $\vec{\Re}=\Re\,\hat{j}$:

$$F\cos 25°\,\hat{i}+F\sin 25°\,\hat{j}-mg\,\hat{j}+\Re\,\hat{j}=m\vec{a}. \quad \mathbf{(26)}$$

Riscriviamo quest'ultima come un sistema di equazioni, in *x* e in *y*:

$$\begin{cases} F\cos 25°=m a_x\,\hat{i} \\ F\sin 25°\,\hat{j}+\Re\,\hat{j}-mg\,\hat{j}=m a_y\,\hat{j}. \end{cases} \quad \mathbf{(27)}$$

Consideriamo la forza normale $\vec{N}$, somma di tutte le forze agenti sul corpo in direzione verticale (ad esclusione della reazione vincolare $\vec{\Re}$) con la quale il corpo insiste sul piano orizzontale. Se tale forza è rivolta verso il basso, allora il corpo giace sul piano orizzontale; se è rivolta verso l'alto, allora il corpo si solleva:



$$\vec{N}=F\sin 25°\,\hat{j}-mg\,\hat{j}=4.23\,\hat{j}-9.81\,\hat{j}=-5.58\,\hat{j}\ N. \quad \mathbf{(28)}$$

Come si vede da questa equazione, la normale è rivolta verso le $\hat{j}$ negative, per cui concludiamo che il corpo non si solleva.

Tornando al sistema 27, sappiamo che la reazione vincolare $\vec{\Re}$ bilancia completamente l'effetto della forza normale $\vec{N}$; pertanto il corpo non sarà accelerato lungo la direzione $\hat{j}$. Poniamo pertanto $a_y=0\ m/s^2$. L'accelerazione del corpo, e quindi il moto, saranno in direzione orizzontale $\hat{i}$. Risolviamo rispetto all'accelerazione a_x la prima equazione del sistema 27,

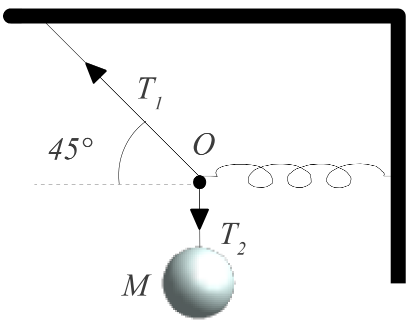
$$a_x=\frac{F\cos 25°}{m}=9.06\ m/s^2. \quad \mathbf{(29)}$$

Il corpo di massa *m* pertanto si muove con legge oraria

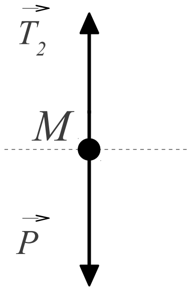
$$x(t)=\frac{1}{2}a_x t^2=4.53\,t^2. \quad \mathbf{(30)}$$

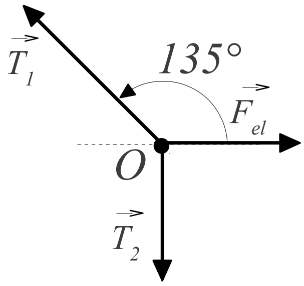
Es. 7

Nel sistema all'equilibrio di figura, determinare il valore della massa *m* di figura, sapendo che la molla di costante elastica $k=100\ N/m$ è allungata di una quantità $\Delta x=10\ cm$.



Soluzione
Poiché il sistema è all'equilibrio, le accelerazioni sono tutte nulle. Il problema si risolve scrivendo la seconda legge di Newton per la massa M e la relazione tra le tensioni al nodo O. In entrambi i casi è utile fare un grafico delle forze:





L'equazione di Newton applicata alla massa M è:

$$\vec{T}_2 + \vec{P} = 0, \quad \textbf{(31)}$$

la quale si risolve ponendo $\vec{T}_2 = T_2 \hat{j}$ e $\vec{P} = -P\hat{j}$ e ricavando il modulo di T_2:

$$\begin{aligned} &T_2 \hat{j} - P\hat{j} = 0 \\ &T_2 - P = 0 \qquad \textbf{(32)} \\ &T_2 = P \end{aligned}$$

dove abbiamo innanzitutto semplificato per $\hat{j}$ e quindi spostato P al secondo membro. Non conoscendo la massa M, incognita, non possiamo ricavare il valore della tensione T_2. L'equazione al nodo O somiglia alla seconda legge di Newton. Tuttavia non possiamo dire che sia tale in quanto il nodo O non è un punto materiale dotato di massa. Nel caso statico vale comunque la relazione:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{el} = 0, \quad \textbf{(33)}$$

che va riscritta prendendo in considerazione le componenti vettoriali delle forze:

$$\begin{aligned} &\vec{T}_1 = T_1 \cos 135° \hat{i} + T_1 \sin 135° \hat{j} = -T_1 \cos 45° \hat{i} + T_1 \sin 45° \hat{j} \\ &\vec{T}_2 = -T_2 \hat{j} \qquad \textbf{(34)} \\ &\vec{F}_{el} = F_{el} \hat{i} \end{aligned}$$

<u>Nota</u>: la forza elastica F_{el} rispetta la legge di Hooke $F_{el}=-k\Delta x$, inducendo molti studenti a considerare quest'ultima sempre negativa. NIENTE DI PIÙ SBAGLIATO! Il segno "-" all'interno della legge di Hooke significa che la forza esercitata da una molla è opposta al relativo spostamento!

Sostituendo le espressioni del sistema 34 nell'equazione 33 otteniamo

$$-T_1 \cos 45° \hat{i} + T_1 \sin 45° \hat{j} - T_2 \hat{j} + F_{el} \hat{i} = 0 \quad \textbf{(35)}$$

e raccogliendo i versori:

$$(-T_1 \cos 45° + F_{el})\hat{i} + (T_1 \sin 45° - T_2)\hat{j} = 0 \quad \textbf{(36)}$$

da cui ricaviamo le due equazioni scalari:

$$\begin{cases} -T_1 \cos 45° + F_{el} = 0 \\ T_1 \sin 45° - T_2 = 0. \end{cases} \quad \textbf{(37)}$$

Il modulo della forza elastica F_{el} si ottiene dalla legge di Hooke: $F_{el} = k\,\Delta x = 100\ 0.10 = 10\ N.$ Possiamo quindi ricavare, dalla prima equazione del sistema 37, il valore della tensione T_1:

$$T_1 = \frac{F_{el}}{\cos 45°} = 14.14\ N. \quad \textbf{(38)}$$

Il valore di T_2 si ricava dalla seconda equazione del sistema 37:

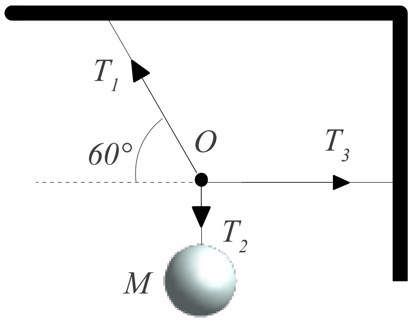
$$T_2 = T_1 \sin 45° = 10\ N. \quad \textbf{(39)}$$

Possiamo finalmente ricavare il valore della massa M, dalla terza equazione del sistema 32

$$M = \frac{T_2}{g} = \frac{10}{9.81} = 1.02\ kg. \quad \textbf{(40)}$$

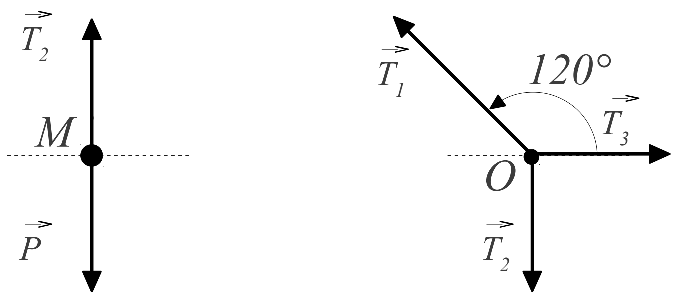
Es. 8

Nel sistema all'equilibrio di figura si ha la massa $m=10\ kg$. Determinare i valori delle tensioni T_1, T_2 e T_3.



Soluzione

Poiché il sistema è all'equilibrio, le accelerazioni sono tutte nulle. Il problema si risolve scrivendo la seconda legge di Newton per la massa M e la relazione tra le tensioni al nodo O. In entrambi i casi è utile fare un grafico delle forze:



L'equazione di Newton applicata alla massa M è:

$$\vec{T}_2 + \vec{P} = 0. \quad \textbf{(41)}$$

Questa si risolve ponendo $\vec{T}_2 = T_2 \hat{j}$ e $\vec{P} = -P \hat{j}$ e ricavando il modulo di T_2:

$$\begin{aligned} &T_2 \hat{j} - P \hat{j} = 0 \\ &T_2 - P = 0 \\ &T_2 = P = Mg = 10\ 9.81 = 98.1\ N. \end{aligned} \quad \textbf{(42)}$$

L'equazione al nodo O è simile alla seconda legge di Newton, ma non possiamo dire che sia tale in quanto il nodo O non è un punto materiale dotato di massa. Nel caso statico vale la relazione:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0. \quad \textbf{(43)}$$

Le componenti vettoriali delle forze in esame sono:

$$\vec{T}_1 = T_1 \cos 120° \hat{i} + T_1 \sin 120° \hat{j} = -T_1 \cos 60° \hat{i} + T_1 \sin 60° \hat{j}$$
$$\vec{T}_2 = -T_2 \hat{j} = -98.1 \ \hat{j} \qquad \textbf{(44)}$$
$$\vec{T}_3 = T_3 \hat{i}.$$

Sostituendo le espressioni del sistema 44 nell'equazione 43 otteniamo

$$-T_1 \cos 60° \hat{i} + T_1 \sin 60° \hat{j} - T_2 \hat{j} + T_3 \hat{i} = 0 \quad \textbf{(45)}$$

e raccogliendo i versori:

$$(-T_1 \cos 60° + T_3)\hat{i} + (T_1 \sin 60° - T_2)\hat{j} = 0 \quad \textbf{(46)}$$

da cui ricaviamo le due equazioni scalari:

$$\begin{cases} -T_1 \cos 60° + T_3 = 0 \\ T_1 \sin 60° - T_2 = 0. \end{cases} \quad \textbf{(47)}$$

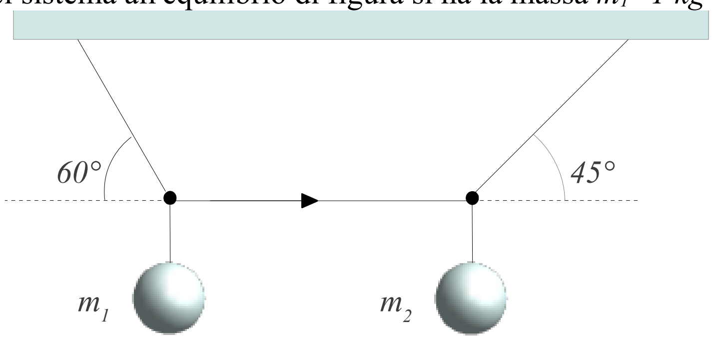
Possiamo quindi ricavare, dalla seconda equazione del sistema 47, il valore della tensione T_1:

$$T_1 = \frac{T_2}{\cos 60°} = \frac{98.10}{\frac{1}{2}} = 196.20 \ N. \quad \textbf{(48)}$$

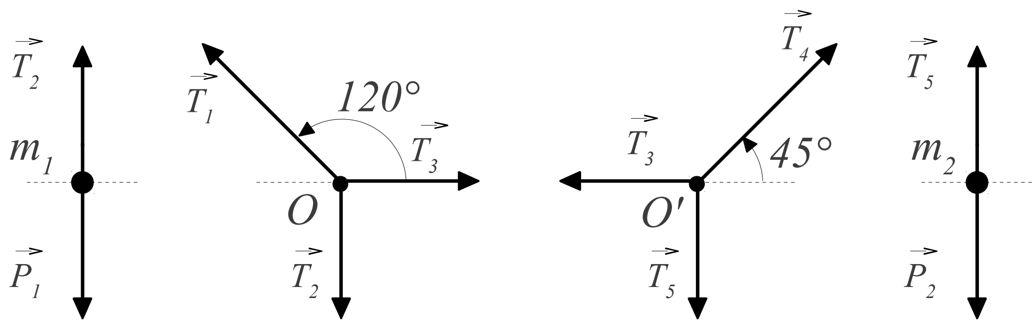
Il valore di T_3 si ricava dalla prima equazione del sistema 47:

$$T_2 = T_1 \cos 60° = 192.20 \ \frac{\sqrt{3}}{2} = 169.91 \ N. \quad \textbf{(49)}$$

Es. 9
Nel sistema all'equilibrio di figura si ha la massa $m_1 = 1\ kg$. Determinare il valore della massa m_2.



Soluzione
Poiché il sistema è all'equilibrio, è possibile risolvere il problema come il precedente. Dobbiamo tuttavia tenere conto del fatto che essendoci due masse e due nodi avremo il doppio delle equazioni e dei grafici. Iniziamo dal grafico del corpo libero:



Notiamo subito che la tensione T_2 è uguale alla forza peso P_1, ovvero

$$T_2 = m1\ g = 9.81 \ kg. \quad \textbf{(50)}$$

La tensione T_2 eguaglia la componente verticale della tensione T_1, da cui deriviamo quest'ultima:

$$T_1 = T_2 / \sin 60° = 11.33\ N. \quad \textbf{(51)}$$

La componente orizzontale della tensione T_1 eguaglia la tensione T_3, da cui deriviamo anche questa:

$$T_3 = T_2 \cos 60° = 5.66\ N. \quad \textbf{(52)}$$

Da T_3 deriviamo la tensione T_4 in quanto la componente orizzontale di questa equilibra la tensione T_3:

$$T_4 = T_3 / \cos 45° = 8.01\ N \quad \textbf{(53)}$$

quindi la tensione T_5 che eguaglia il valore della componente verticale di T_4:

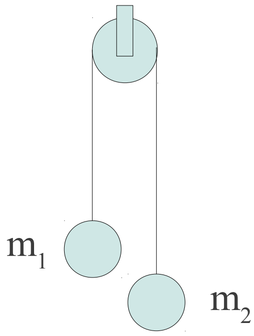
$$T_5 = T_4 \sin 45° = 5.66\ N \quad \textbf{(54)}$$

e finalmente, eguagliando la tensione T_5 alla forza peso P_2 calcoliamo la massa m_2:

$$m_2 = \frac{T_5}{g} = 0.58\ N. \quad \textbf{(55)}$$

Es. 10

Le masse $m_1 = 10\ kg$ e $m_2 = 15\ kg$ sono collegate da una fune senza massa e inestensibile, appoggiata ad una carrucola (macchina di Atwood). Esso sono inizialmente ferme, quando esse vengono lasciate libere di muoversi. Determinare il moto delle due masse.

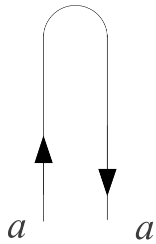


Soluzione

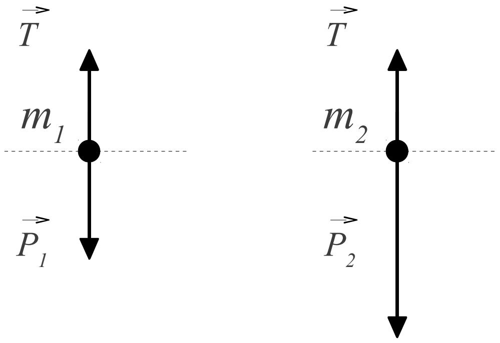
Le masse sono singolarmente soggette alla forza peso e alla tensione della fune. Nel momento in cui vengono lasciate libere di muoversi, la carrucola si metterà in rotazione, una delle due masse accelererà verso l'alto e l'altra verso il basso. Per determinare quale massa sale e quale scende scriviamo le equazioni di Newton relative:

$$\begin{cases} T - P_1 = m_1 a \\ P_2 - T = m_2 a. \end{cases} \quad \textbf{(56)}$$

L'accelerazione è la stessa per entrambe le masse in quanto la fune è inestensibile. Per quanto riguarda i segni abbiamo scelto arbitrariamente nella prima equazione accelerazione concorde alla tensione T. Per continuità del moto (vedi disegno seguente) l'accelerazione dovrà essere rivolta verso il basso in corrispondenza della massa m_2, e pertanto concorde alla forza peso.



I diagrammi del corpo libero per entrambe le masse sono mostrati di seguito:



Tensione e forza peso, nel sistema 56 sono opposte in segno in quanto i vettori sono opposti, come mostrato nel grafico qui sopra. Il sistema si risolve sommando le due equazioni membro a membro, situazione nella quale scompare la tensione *T* e si può quindi determinare l'accelerazione *a*:

$$\begin{cases} T-P_1+P_2-T=m_1a+m_2a \\ P_2-P_1=(m_1+m_2)a \\ (m_2-m_1)g=(m_1+m_2)a \end{cases} \quad \textbf{(57)}$$

da cui finalmente

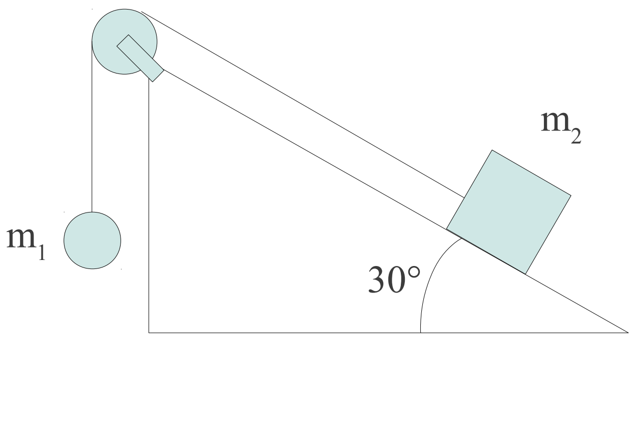
$$a=\frac{(m_2-m_1)g}{(m_1+m_2)}=1{,}96 \quad m/s^2. \quad \textbf{(58)}$$

Il valore della tensione *T* si determina dall'equazione uno del sistema 56:

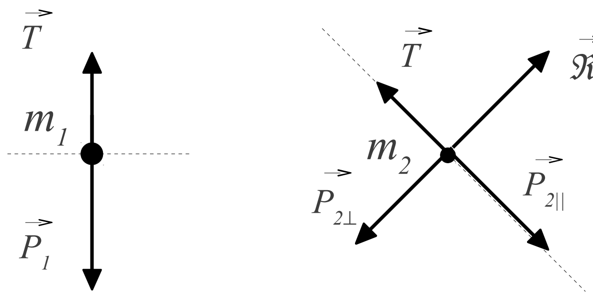
$$T=P_1+m_1a=m_1(g+a)=10(9.81+1.96)=11{,}67 \quad N. \quad \textbf{(59)}$$

Es. 11

Le masse $m_1=10\ kg$ e $m_2=15\ kg$ sono collegate da una fune senza massa e inestensibile, appoggiata ad una carrucola. Esso sono inizialmente ferme, quando esse vengono lasciate libere di muoversi. Determinare il moto delle due masse.



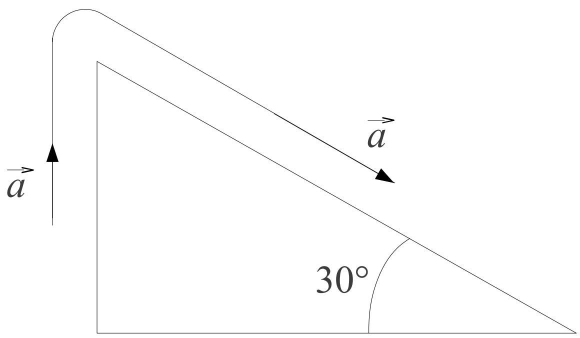
Soluzione
Le due masse m_1 e m_2 sono collegate dalla fune. Esse esercitano la forza peso: nel caso della massa m_1 la forza peso $\vec{P}_1$ è rivolta nella direzione verticale, verso negativo; la massa m_2 esercita una forza peso $\vec{P}_2$ che si scompone nella direzione parallela $\vec{P}_{2\parallel}$ al piano inclinato e perpendicolare $\vec{P}_{2\perp}$ al piano inclinato. Quest'ultima è bilanciata dalla reazione vincolare $\vec{\Re}$, mentre la componente parallela è rivolta lungo il piano. Entrambe le masse sono soggette alla tensione della fune che le connette.
Il diagramma del corpo libero del sistema è mostrato nella figura qui sotto:



La reazione vincolare $\Re$ bilancia la forza peso perpendicolare $\vec{P}_{2\perp}$ annullandone l'effetto. Le equazioni di Newton del sistema diventano:

$$\begin{cases} T - P_1 = m_1 a \\ P_{2\parallel} - T = m_2 a \end{cases} \quad \textbf{(60)}$$

dove l'accelerazione a delle masse è la stessa in quanto la fune è inestensibile. Per quanto riguarda la scelta dei segni abbiamo agito in questo modo: nella prima equazione abbiamo posto positiva la tensione e negativa la forza peso; abbiamo quindi scelto liberamente il segno dell'accelerazione a, ponendola positiva e quindi concorde con T, ovvero verso l'alto. La scelta dei segni della seconda equazione è invece vincolata a quella della prima: se l'accelerazione a è rivolta verso l'alto nella prima equazione, questo significa che per continuità del moto essa dovrà essere rivolta verso il basso nella seconda equazione: infatti se la massa m_1 sale, allora la massa m_2 scende; viceversa se m_1 scende, allora la massa m_2 sale.



Nella seconda equazione quindi l'accelerazione a è concorde con la forza peso parallela, anch'essa rivolta verso il basso: da questa considerazione la scelta dei segni a primo membro.

Per risolvere il sistema 60 isoliamo la tensione T nella prima equazione e la sostituiamo nella seconda:

$$\begin{cases} T = P_1 + m_1 a \\ P_{2\parallel} - (P_1 + m_1 a) = m_2 a \end{cases} \quad \textbf{(61)}$$

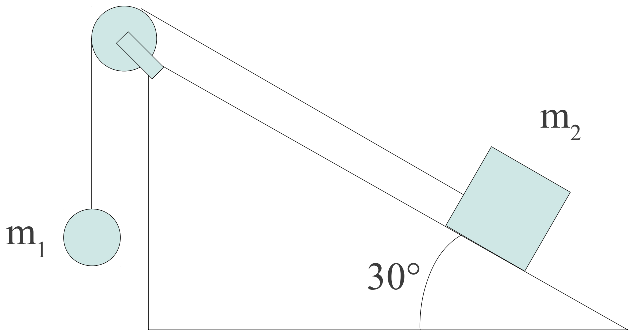
ricaviamo quindi l'accelerazione a dalla seconda equazione:

$$a=\frac{P_{2\|}-P_1}{m_2-m_1}=\frac{m_2 g\sin 30°-m_1 g}{m_2-m_1}=-4.91\ m/s. \quad \textbf{(62)}$$

L'accelerazione *a* è negativa, pertanto la massa m_1 scende e m_2 sale. La tensione *T* si trova tramite la prima equazione del sistema 61:

$$T=P_1+m_1 a=m_1(a+g)=49.05\ N. \quad \textbf{(63)}$$

Es. 12
Le masse $m_1=10\ kg$ e m_2 sono collegate da una fune senza massa e inestensibile, appoggiata ad una carrucola. Esso sono in equilibrio statico. Determinare il valore della massa m_2.

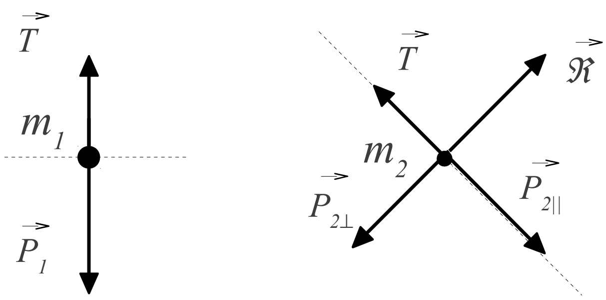


Soluzione
Nel caso statico, ovvero in cui le masse sono ferme, l'accelerazione *a* è nulla per entrambe. Le equazioni di Newton viste negli esercizi precedenti pertanto si riducono a:

$$\begin{cases} T-P_1=0 \\ P_{2\|}-T=0. \end{cases} \quad \textbf{(64)}$$

Per quanto riguarda la massa m_2 essa subisce anche l'effetto della forza peso perpendicolare $\vec{P}_{2\perp}$ che si bilancia con la reazione vincolare $\Re$ del piano inclinato.

Il diagramma del corpo libero per entrambe le masse è lo stesso dell'esercizio precedente:

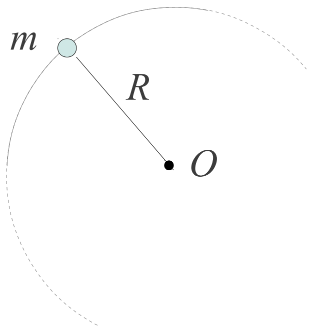


Il sistema 64 si risolve sommando le due equazioni membro a membro e ricavando la massa m_2:

$$\begin{aligned} &T-P_1+P_{2\|}-T=0 \\ &P_{2\|}=P_1 \\ &m_2 g\sin 30°=m_1 g \\ &m_2=\frac{m_1}{\sin 30°}=2\ 10=20\ kg. \end{aligned} \quad \textbf{(65)}$$

Es. 13

La massa *m=1 kg* si muove di moto circolare lungo una traiettoria di raggio *R=1 m*. All'istante $t=0\,s$ essa possiede velocità angolare $\omega_0=10\ rad/s$, e accelerazione $\alpha_0=10\ rad/s^2$. Determinare la velocità angolare all'istante $t=10\,s$ e l'angolo θ, descritto nel corrispondente intervallo di tempo. Determinare inoltre la tensione *T* della fune all'istante $t=10\,s$.



Soluzione

Il corpo si muove seguendo le leggi della cinematica rotazionale:

$$\begin{cases} \theta(t)=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega(t)=\omega_0+\alpha t, \end{cases} \quad \textbf{(66)}$$

dove $\theta_0=0\ rad$, $\omega_0=10\ rad/s$ e $\alpha_0=10\ rad/s^2$:

$$\begin{cases} \theta(t)=+10t+1.5t^2 \\ \omega(t)=10+3t. \end{cases} \quad \textbf{(67)}$$

Risolviamo pertanto ponendo $t=10\,s$ nelle due equazioni:

$$\begin{cases} \theta(10\ s)=+10\ 10+1.5\ 10^2=250\ rad \\ \omega(t)=10+3\ 10=40\ rad/s. \end{cases} \quad \textbf{(68)}$$

La velocità tangenziale in questo istante è

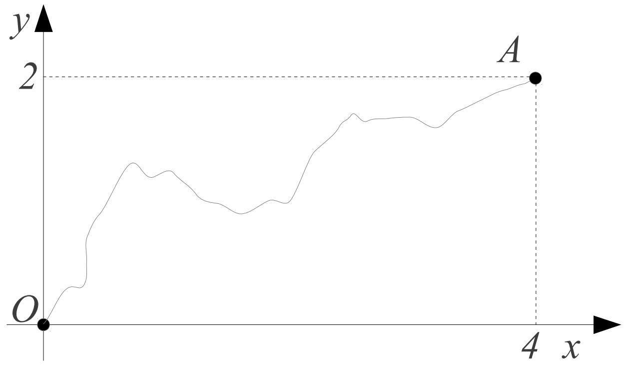
$$v(10)=r\ w(10)=40\ m/s. \quad \textbf{(69)}$$

La tensione *T* è la forza centripeta del sistema, pertanto

$$T(10)=v^2(10)=1600\ N. \quad \textbf{(70)}$$

Lavoro ed energia

Es. 14
Determinare il lavoro svolto dalla forza costante $\vec{F}=0\,\hat{i}+10\,\hat{j}\ N$ sulla massa *m* che si sposta dal punto *O(0,0)* al punto A*(4,2)* lungo il cammino di figura.



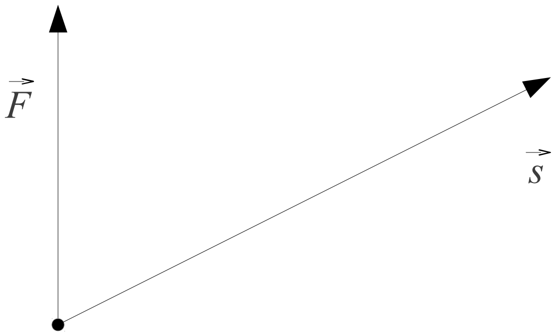
Soluzione
Il lavoro svolto dalla forza *F* è

$$W=\vec{F}\cdot\vec{s} \quad \textbf{(71)}$$

dove $\vec{s}$ è lo spostamento relativo alla massa *m*. Lo spostamento è definito come differenza tra la posizione iniziale e la posizione finale:

$$\vec{s}=\vec{r}_f-\vec{r}_i=(4\,\hat{i}+2\,\hat{j})-(0\,\hat{i}+0\,\hat{j})=4\,\hat{i}+2\,\hat{j}. \quad \textbf{(72)}$$

Il disegno di sotto mostra forza e spostamento:



Non conoscendo l'angolo tra forza e spostamento, conoscendo le coordinate cartesiane, utilizziamo il prodotto scalare nella forma:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y\,, \quad \textbf{(73)}$$

che, applicata all'equazione 71 diventa:

$$W=\vec{F}\cdot\vec{s}=F_x s_x+F_y s_y=0\ \ 4+10\ \ 2=20\ J. \quad \textbf{(74)}$$

Possiamo risolvere il problema anche utilizzando la forma del prodotto scalare che segue:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a\,b\cos\theta_{ab}\,, \quad \textbf{(75)}$$

dove θ_{ab} è l'angolo tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Nel caso dei vettori in questo esercizio, sappiamo che l'angolo θ_F tra la forza *F* e l'asse delle ascisse è di *90°*; l'angolo θ_s tra lo spostamento *s* e l'asse delle ascisse è dato dalla relazione:

$$\theta_s = \arctan\left(\frac{s_y}{s_x}\right) = \arctan\left(\frac{2}{4}\right) = 26.57\,°. \quad \textbf{(76)}$$

L'angolo tra la forza e lo spostamento è quindi

$$\theta_{Fs} = \theta_F - \theta_s = 90\,° - 26.57\,° = 63.43\,°. \quad \textbf{(77)}$$

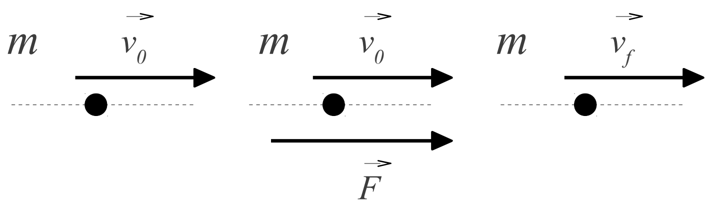
Il modulo dello spostamento e della forza si trova tramite il teorema di Pitagora:

$$\begin{cases} s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = 4.47\,N \\ F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 10\,N \end{cases} \quad \textbf{(78)}$$

da cui finalmente il lavoro

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F\,s \cos\theta_{Fs} = 10\;\,4.47\;\cos 63.43\,° = 20\;J. \quad \textbf{(79)}$$

Es. 15
Il punto materiale di massa *m=1 kg* si muove inizialmente sulla retta con velocità $v_0=10\ m/s$. A esso è applicata una forza *F=10 N* che agisce nella direzione del moto per una distanza *d=2 m* del percorso. Determinare la velocità v_f a cui la forza *F* porta la massa *m*.
Soluzione
Il sistema è quello di figura:



Applicando il teorema lavoro energia cinetica possiamo ricavare la velocità finale. Il teorema lavoro energia cinetica sostiene che il lavoro svolto da una forza *F* su una particella di massa *m* è uguale alla variazione di energia cinetica della forza stessa:

$$W_F = \Delta K. \quad \textbf{(80)}$$

Poiché

$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{d} = F\,d = 10\;\,2 = 20\;J\,, \quad \textbf{(81)}$$

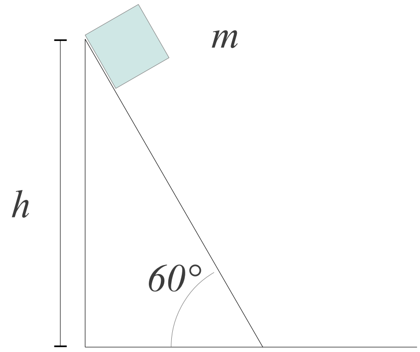
avremo che la variazione di energia cinetica della massa *m* è *Δk=20 J*. Scriveremo quindi:

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = 20\;J\,, \quad \textbf{(82)}$$

da cui

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{m}\left(20 + \frac{1}{2} m v_i^2\right)} = \sqrt{\frac{2}{1}\left(20 + \frac{1}{2} 1\;\,10^2\right)} = \sqrt{140} = 11.83\;m/s. \quad \textbf{(83)}$$

Es. 16
La massa *m=1 kg* scivola lungo il piano inclinato senza attrito di figura. Determinare la velocità alla base del piano.



Soluzione
La massa *m* è soggetta alla forza peso che la fa muovere lungo il piano inclinato. Poiché è una forza di tipo conservativo, il lavoro compiuto dalla forza peso dipenderà solo dalle posizioni iniziali e finali. Fissiamo pertanto un valore $U=0$ per il potenziale gravitazionale: conviene, per ragioni di calcolo, che questo sia posto alla base del piano. Infatti in questo modo semplifichiamo la formula per l'energia totale, come vedremo qui sotto. L'energia potenziale gravitazionale alla sommità del piano è $U_i=mg\Delta y$, dove Δy è la differenza di altezza tra la posizione iniziale e di moto e quella finale. Pertanto avremo $\Delta y=h$. Poiché non esistono altre forze nel sistema, l'energia meccanica si conserva:

$$\Delta E=0. \quad \textbf{(84)}$$

Questo significa che i valori di energia meccanica, considerati in due qualsiasi istanti di tempo, sono uguali:

$$E_i=E_f, \quad \textbf{(85)}$$

con la conclusione che, se valutiamo i valori di energia meccanica alla sommità del piano e alla sua base, essi saranno uguali.

Alla sommità del piano la massa è ferma, pertanto la sua energia è tutta potenziale gravitazionale. Alla base essa è il moto, e l'energia potenziale gravitazionale è nulla, ma la massa *m* è in movimento, e di conseguenza la sua energia cinetica è diversa da zero. Pertanto scriviamo le due equazioni in questo modo:

$$\begin{cases} E_i=U_i=mgh \\ E_f=K_f=\frac{1}{2}mv_f^2 \end{cases} \quad \textbf{(86)}$$

che, eguagliate, danno

$$mgh=\frac{1}{2}mv_f^2 \quad \textbf{(87)}$$

da cui ricaviamo la velocità v_f:

$$v_f=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\ 9.81\ 10}=14.01\ m/s. \quad \textbf{(88)}$$

<u>Nota</u>: questo esercizio poteva essere risolto anche tramite la cinematica.

Es. 17
Risolvere l'esercizio precedente nel caso di attrito dinamico ($\mu_k=0.2$) tra piano inclinato e massa *m*.
Soluzione
In questo caso sulla massa *m* agisce anche la forza di attrito f_k che è non conservativa. Pertanto l'energia meccanica si conserva e dobbiamo introdurre a secondo membro dell'equazione 84 il lavoro della forza di attrito

$$W_{att} = -f_k d \quad \textbf{(89)}$$

dover *d* è la distanza percorsa dalla massa, ovvero la lunghezza del piano inclinato:

$$d = \frac{h}{\sin 60°} = 11.55\ m. \quad \textbf{(90)}$$

La forza di attrito statico f_k è

$$f_k = \mu_k m g \cos 60° = 0.981\ N. \quad \textbf{(91)}$$

La variazione di energia meccanica è pertanto

$$\Delta E = W_{att} \quad \textbf{(92)}$$

ovvero

$$E_f - E_i = W_{att} \quad \textbf{(93)}$$

e finalmente

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - mgh = -\mu_k mg \cos 60° d \quad \textbf{(94)}$$

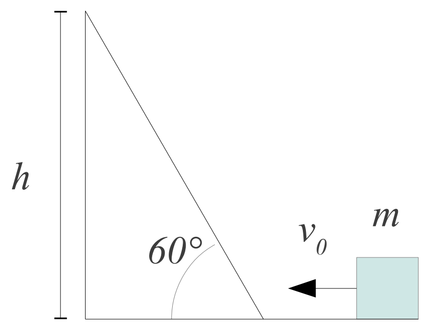
da cui ricaviamo la velocità

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{m}\left(mgh - \mu_k mg \cos 60° d\right)} = 9.32\ m/s. \quad \textbf{(95)}$$

Come ci aspettavamo, questa velocità è inferiore a quella ottenuta nell'esercizio precedente, in quanto l'attrito dinamico ha frenato la massa *m*.

Es. 18

La massa $m=1\ kg$ sale sul piano inclinato di figura con velocità iniziale $v_0=10\ m/s$. Tra la massa e il piano vi è attrito dinamico ($\mu_k=0.2$). Determinare la massima quota raggiunta.



Soluzione

L'esercizio si risolve esattamente come il precedente, tranne per il fatto che in questo caso energia iniziale e finale sono invertite: infatti la massa *m* parte con velocità iniziale v_i diversa da zero a quota zero (energia potenziale iniziale nulla) per giungere, con velocità nulla, alla quota massima, ovvero energia potenziale massima.

L'equazione che risolve il problema è

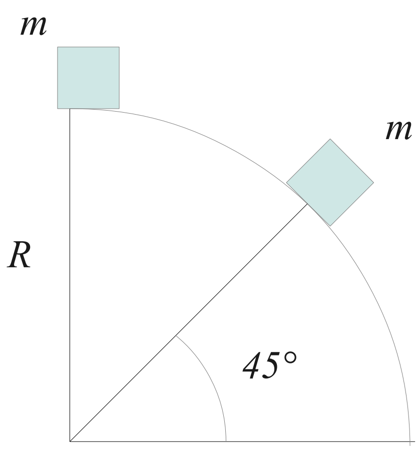
$$mgh - \frac{1}{2} m v_i^2 = -\mu_k mg \cos 60° \frac{h}{\sin 60°} \quad \textbf{(96)}$$

da cui ricaviamo l'altezza *h*:

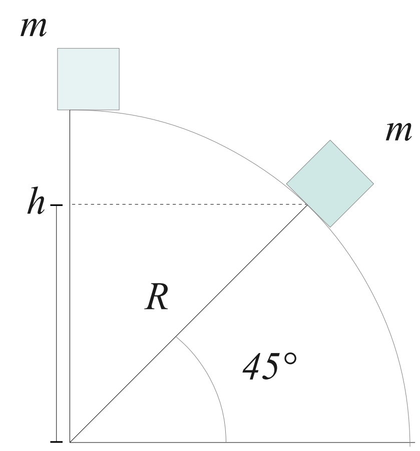
$$h=\frac{\frac{1}{2}v_i^2}{g\left(1+\mu_k\cot 60°\right)}=4.57\ m.\quad \textbf{(97)}$$

Come ci aspettavamo, questa velocità è inferiore a quella ottenuta nell'esercizio precedente, in quanto l'attrito dinamico ha frenato la massa *m*.

Es. 19
La massa *m=1 kg* scivola lungo il piano di sezione circolare di raggio *R=10 m* senza attrito. Determinare la velocità della massa nel momento in cui l'angolo $\alpha=45°$.



Soluzione
Utilizziamo la conservazione dell'energia per risolvere questo esercizio. La massa scivola lungo il piano inclinato a causa della forza di gravità, che è conservativa. Pertanto l'energia meccanica *E* si conserva. Ci manca l'altezza *h* a cui si trova la massa *m* in corrispondenza dell'angolo $\alpha=45°$: essa si trova tramite semplici considerazioni trigonometriche, come mostrato qui sotto in figura



in cui si vede che $h=R\sin 45°=7.07\ m$. Applicando la conservazione dell'energia meccanica otteniamo:

$$\Delta E=0\quad \textbf{(98)}$$

Da cui $E_f=E_i$. Ponendo i livelli iniziali e finali alla sommità del piano e alla quota *h*, e considerando come livello fondamentale per l'energia potenziale la base del piano, scriveremo:

$$\begin{cases} E_i = U_i = mgR \\ E_f = mgh + \frac{1}{2} m v_f^2 = mgR \sin 45° + \frac{1}{2} m v_f^2 . \end{cases} \quad \textbf{(99)}$$

Eguagliando i due valori di energia otteniamo l'equazione

$$mgR = mgR \sin 45° + \frac{1}{2} m v_f^2 . \quad \textbf{(100)}$$

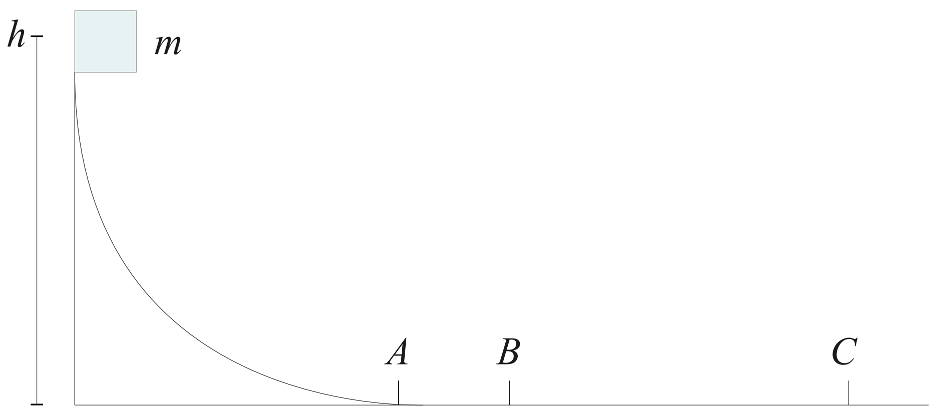
da cui ricavare la velocità v_f:

$$v_f = \sqrt{2gR(1 - \sin 45°)} = 7.58 \; m/s . \quad \textbf{(101)}$$

Es. 20

La massa *m=5 kg* scivola lungo il piano inclinato di figura da un'altezza *h=25 m* senza attrito. Alla base del piano essa prosegue nel suo moto lungo la direzione orizzontale. Sapendo che c'è attrito con coefficiente di attrito dinamico μ_k*=0.5* tra piano orizzontale e massa *m*, determinare:

1) la velocità nel punto *A*, punto più basso del piano inclinato;
2) la velocità nel punto *B* a distanza *d=5 m* dal punto *A*;
3) la distanza *d* dal punto *A* al punto *C,* al quale la massa si ferma.



Soluzione

Il punto *1)* si risolve considerando che, agendo solo la forza di gravità (forza di tipo conservativo) sulla massa *m*, allora l'energia meccanica *E* si conserva; pertanto considerando come valore iniziale dell'energia E_i quello alla sommità del piano e come valore finale dell'energia E_i quello alla base del piano e come livello *U=0* per l'energia potenziale, scriveremo:

$$\begin{gathered} E_i = E_f \\ mgh = \frac{1}{2} m v^2 \end{gathered} \quad \textbf{(102)}$$

dove abbiamo posto l'energia iniziale solo potenziale (la massa *m* parte da ferma) e l'energia finale solo cinetica (la massa *m* è a livello fondamentale dell'energia potenziale). Risolvendo l'equazione appena vista troviamo:

$$v = \sqrt{2gh} = 22.15 \; m/s. \quad \textbf{(103)}$$

Per risolvere il punto *2)* consideriamo che qui non interviene l'energia potenziale gravitazionale in quanto il punto materiale si muove sempre sullo stesso livello; l'energia meccanica *E* non si conserva poiché vi è la forza di attrito dinamico $f_k = \mu_k mg$ che agisce tra massa *m* e piano. Considerando come valore iniziale per l'energia meccanica quello alla base del piano inclinato e come valore finale per l'energia meccanica quello a distanza *d=5 m* dalla base del piano, scriveremo

$$\Delta E = W_{att} \quad \textbf{(104)}$$

ovvero

$$E_f - E_i = W_{att}, \quad \textbf{(105)}$$

dove le energie finale e iniziale sono entrambe energie cinetiche:

$$\begin{cases} E_i = \frac{1}{2} m v_i^2 \\ E_f = \frac{1}{2} m v_f^2. \end{cases} \quad \textbf{(106)}$$

Sostituendo queste relazioni nell'equazione 105 otteniamo

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = -\mu_k mgd, \quad \textbf{(107)}$$

dove abbiamo attribuito al lavoro svolto dall'attrito dinamico il valore $-\mu_k mgd$, negativo in quanto forza di attrito e spostamento sono sempre opposti. Risolviamo l'equazione ottenendo:

$$v_f = \sqrt{v_i^2 - 2\mu_k gd} = 21.01\ m/s. \quad \textbf{(108)}$$

Il punto *c)* si risolve come il precedente, ma ponendo $v_f = 0\ m/s$ in quanto viene chiesto a quale distanza la massa si ferma, e ponendo come incognita la distanza *d*.

Risolviamo quindi l'equazione 107 modificata in questo modo:

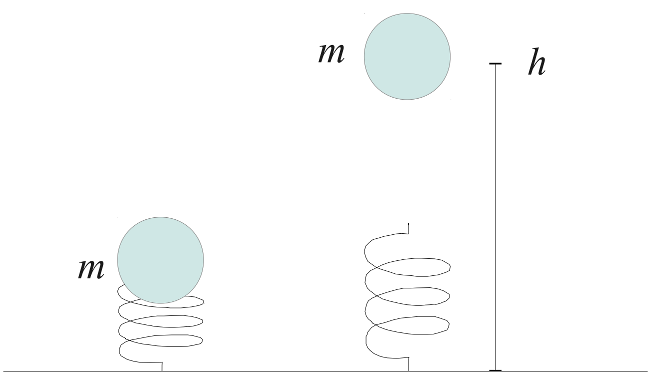
$$-\frac{1}{2} m v_i^2 = -\mu_k mgd, \quad \textbf{(109)}$$

da cui

$$d = \frac{v_i^2}{2\mu_k g} = 50.01\ m. \quad \textbf{(110)}$$

Es. 21

La massa $m = 100\ g$ è appoggiata a una massa ideale di costante elastica $k = 1000\ N/m$, compressa di una quantità $\Delta x = 5\ cm$. Determinare la velocità della massa nel momento in cui essa si separa dalla molla e la massima quota *h* raggiunta.



Soluzione

La massa *m* è sottoposta a due forze: la forza elastica F_{el} e la forza peso *P*. Entrambe sono forze di tipo conservativo, pertanto ammettono l'esistenza di un potenziale; inoltre l'energia meccanica E si conserva.

Posto uguale a zero l'energia potenziale gravitazionale della massa m nel punto di partenza, consideriamo l'energia meccanica iniziale E_i come la sola energia potenziale elastica della molla:

$$E_i = U_{el} = \frac{1}{2} k \Delta x^2. \quad \textbf{(111)}$$

Nel momento in cui la massa m lascia la molla, essa ha acquisito dalla molla tutta l'energia potenziale possibile, trasformata in energia potenziale gravitazionale ed energia cinetica: infatti la massa m viene accelerata in direzione verticale dal basso verso l'alto, e pertanto la sua energia potenziale gravitazionale sarà aumentata della quota Δx. L'energia in questo punto sarà pertanto

$$E_f = U_g + K = mg \Delta x + \frac{1}{2} m v^2. \quad \textbf{(112)}$$

Eguagliando l'equazione 111 all'equazione 112 ricaviamo:

$$\frac{1}{2} k \Delta x^2 = mg \Delta x + \frac{1}{2} m v^2 \quad \textbf{(113)}$$

che, risolta, fornisce

$$v = \sqrt{\frac{k}{m} \Delta x^2 - 2\mathrm{g} \Delta x} = 4.90 \quad m/s. \quad \textbf{(114)}$$

Quantità di moto e urti

Es. 22

La massa $m_1=1\ kg$, in moto con velocità $v_{1i}=10\ m/s$, urta la massa $m_2=2\ kg$ inizialmente ferma, come in figura. La massa m_1 esce dal moto con velocità $v_{1f}=2\ m/s$. Determinare il moto delle due cariche dopo l'urto.

Soluzione

Non essendo specificato nulla a proposito dell'energia, non possiamo affermare che questa si conserva. Al contrario, essendo il sistema delle due particelle isolato, siamo sicuri che la quantità di moto P del sistema si conserva. Pertanto la quantità di moto prima dell'urto e dopo l'urto sarà la stessa:

$$\begin{aligned} &P_i=P_f \\ &p_{1i}+p_{2i}=p_{1f}+p_{2f} \\ &m_1 v_{1i}+m_2 v_{2i}=m_1 v_{1f}+m_2 v_{2f} \end{aligned} \quad \textbf{(115)}$$

Considerato ora che la particella 2 è inizialmente ferma, porremo $v_{2i}=0\ m/s$, e la particella 1 esce dall'urto con velocità $v_{1f}=2\ m/s$, sostituiamo nell'equazione 115 e ricaviamo il valore di v_{2i}:

$$\begin{aligned} &1\quad 10+2\quad 0=1\quad 2+2\quad v_f \\ &v_{2f}=4\quad m/s. \end{aligned} \quad \textbf{(116)}$$