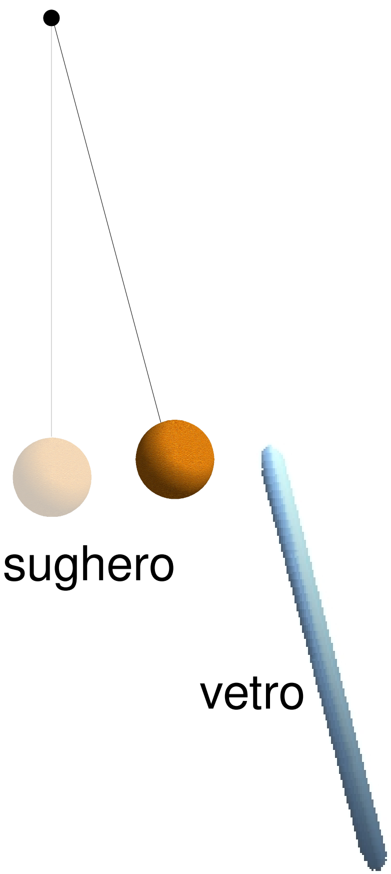
INGEGNERIA GESTIONALE
corso di Fisica Generale

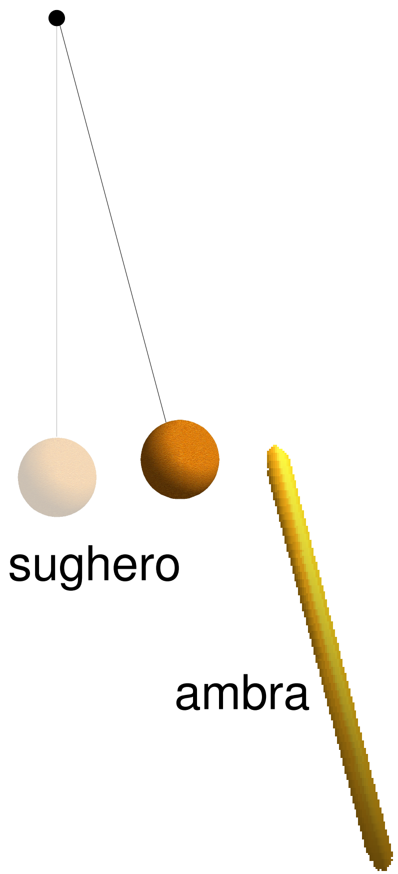
Prof. E. Puddu

Interazioni di tipo elettrico

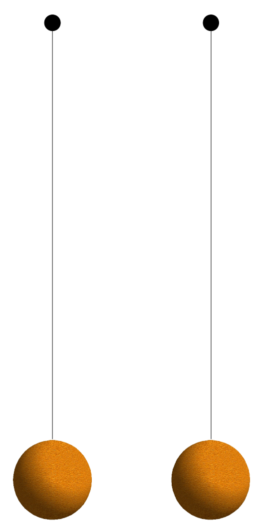
L'elettrizzazione

Dei primi semplici esperimenti fornirono le caratteristiche di una proprietà della materia chiamata *elettrizzazione*. La realizzazione di questi esperimenti è semplice: si prende una bacchetta di ambra o vetro e la si strofina. Quindi la si avvicina ad una sfera di sughero (molto leggera, per ridurre al minimo la forza peso) appesa ad un filo e si nota che sia ambra sia vetro attirano allo stesso modo la sfera di sughero, spostandola dalla condizione di equilibrio.





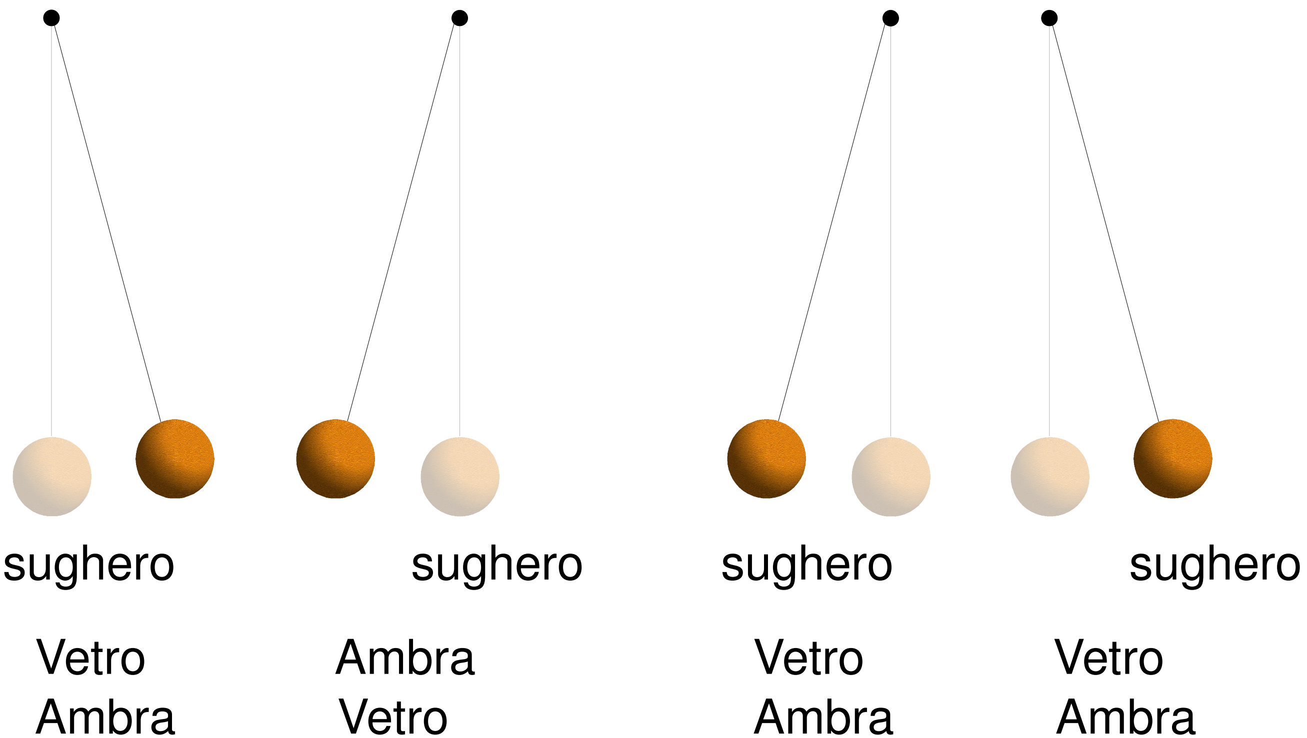
L'elettrizzazione di ambra e vetro era ottenuta tramite strofinio. Il sughero, il quale non aveva subito alcun processo di strofinamento ed il quale non attraeva altri corpi. Per questa ragione all'elettrizzazione del sughero si diede il nome di elettrizzazione per induzione, ovvero una forma passiva di elettrizzazione, indotta da un corpo con elettrizzazione permanente!!!



Due sfere di sughero elettrizzate per induzione non sono in grado di attrarsi in quanto, allontanate le bacchette, l'elettrizzazione per induzione termina!

L'elettrizzazione

Ai fenomeni di elettrizzazione appena visti, per strofinio e per induzione, aggiungiamo l'elettrizzazione per contatto. Infatti, mettendo a contatto le sferette di sughero con la bacchetta di ambra o vetro, queste si elettrizzavano in modo permanente! In particolare si notò che: due sferette con lo stesso tipo di elettrizzazione (ovvero messe a contatto con la stessa bacchetta) si respingevano mentre due sferette con tipo diverso di elettrizzazione (messe a contatto con due bacchette diverse) si attraevano!



Questo fondamentale esperimento fece capire che, a differenza della forza di gravità, la forza di elettrizzazione esiste in due possibili stati che vennero chiamati positivo (tipo vetro) e negativo (tipo ambra).

Possiamo quindi concludere che: corpi elettrizzati allo stesso modo si respingono, mentre corpi elettrizzati in modo diverso si attraggono!

La carica elettrica

Per quantificare l'elettrizzazione è stato introdotto il concetto di carica elettrica, che fornisce una misura dello stato di elettrizzazione stesso. La carica elettrica si indica con la lettera “q” ed è posseduta da un corpo quando questo è elettrizzato.

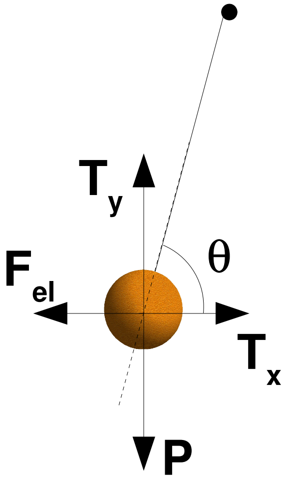
Se q>0 si dice che il corpo è elettrizzato positivamente; se q>0 si dice che il corpo è elettrizzato negativamente; se q=0 il corpo è globalmente neutro o non elettrizzato. Per misurare una carica elettrica si prende una carica campione q e la si avvicina ad una sfera di sughero. Lo stesso esperimento viene svolto con la carica q' da misurare. Il rapporto tra le due forze ci fornisce il rapporto tra le cariche:

$$\frac{q}{q'}=\frac{F}{F'}$$

da cui

$$q=\frac{F}{F'}q'$$

Per quanto riguarda la misura delle forze si agisce come sul pendolo:



il diagramma del corpo libero qui sotto, per la sfera di sughero all'equilibrio, fornisce le due equazioni di Newton

$$F_{el}=T\sin\theta$$
$$mg=T\cos\theta$$

che danno come soluzione, per la forza elettrica,

$$F_{el}=mg\,tg\,\theta$$

Legge di Coulomb

"L'interazione elettrica fra due particelle in quiete o in moto relativo a velocità molto basse è proporzionale alle loro cariche elettriche e all'inverso del quadrato della loro distanza. La sua direzione è lungo la congiungente delle due particelle:"

$$F_{el}=k_e\frac{q_1 q_2}{d^2}\quad\left(cfr.\ F_g=G\frac{m_1 m_2}{d^2}\right)$$

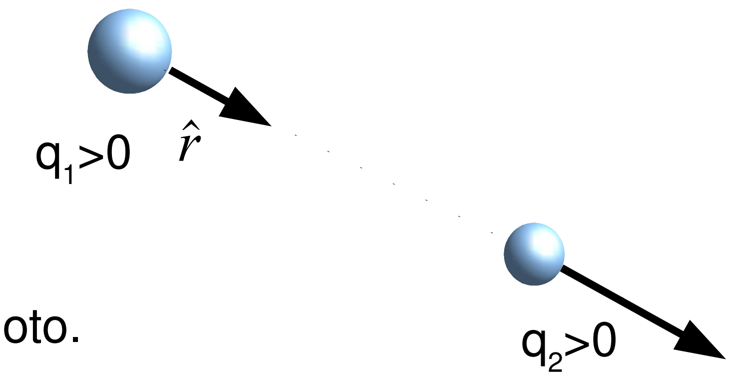
per comodità si è scelto di porre

$$k_e=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

dove ε_0 è definita come la permittività elettrica del vuoto.

Il vettore forza elettrica si scrive in questo modo

$$\vec{F}_{el}=k_e\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$



$$\vec{F}_{el}=k_e\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$

da cui si nota la dipendenza radiale della forza, proprio come nel caso gravitazionale.

Data la velocità della luce $c=2.9979\ 10^8\ m/s$, si è deciso di porre $k_e=10^{-7}c^2=8.9874\ 10^9$, spesso approssimato con $9\ 10^9$.

L'unità di misura della carica elettrica è il coulomb, indicato con la lettera C ed è definito come la carica che, posta alla distanza di un metro da una carica uguale nel vuoto, la respinge con

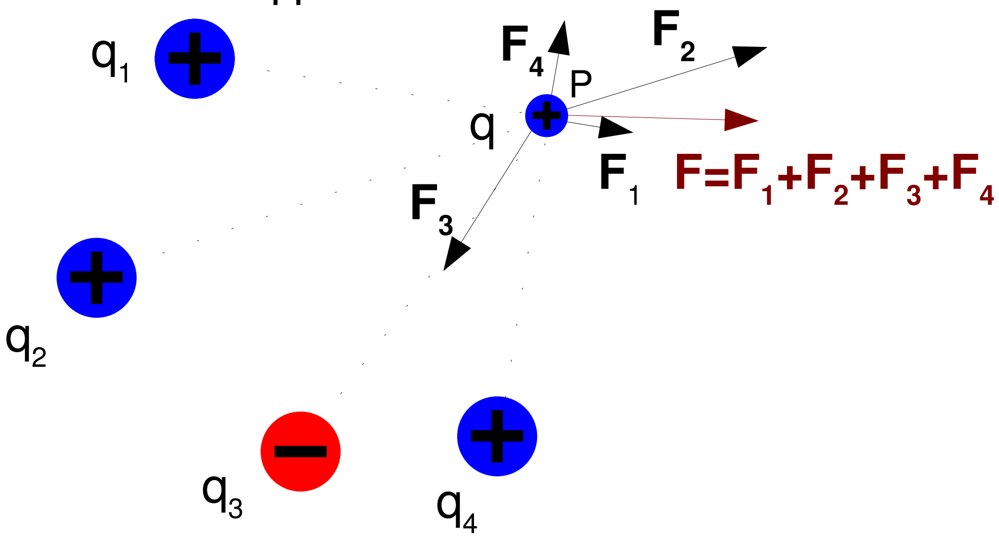
una forza di $8.9874\ 10^9$ N. L'unità di misura di k_e è Nm^2/C^2 mentre $\varepsilon_0=\ 8.854\ 10^{12}$ C^2/Nm^2.

Il campo elettrico

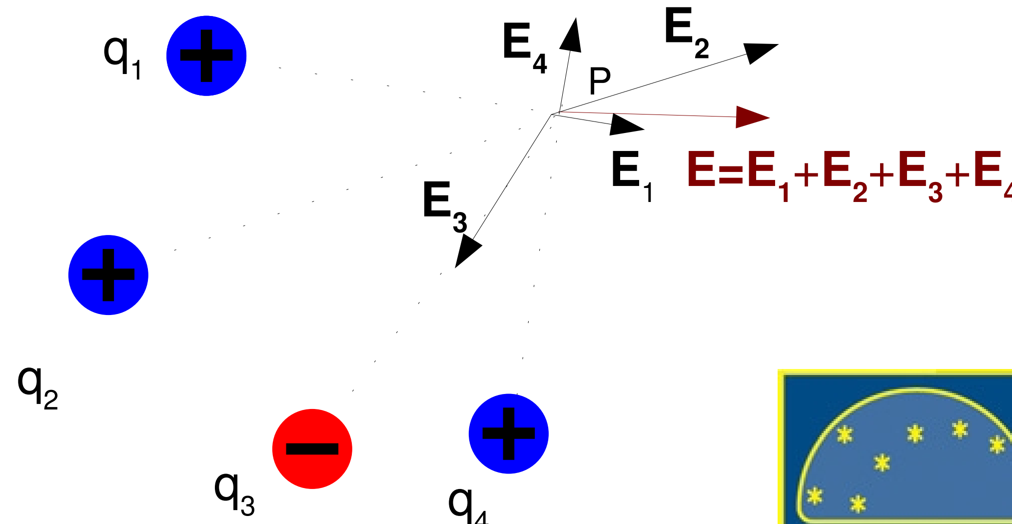
Il campo elettrico è una regione dello spazio in cui una carica elettrica q>0 di test è soggetta all'azione di una forza. La forza è causata da un'altra carica elettrica, sorgente del campo.
Se le sorgenti del campo elettrico sono N: $q_1, q_2, \dots, q_N$, allora la forza agente sulle nostra carica elettrica è $\mathbf{F}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\dots+\mathbf{F}_N$. Questa proprietà del campo elettrico, di sommarsi vettorialmente, si chiama principio della sovrapposizione degli effetti.
Se voglio definire una proprietà dello spazio che non dipenda dalla mia carica di test ma solo dalle cariche sorgenti, allora devo eliminare la dipendenza da q dalla forza **F**. Definisco quindi il campo elettrico, o forza per unità di carica

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}$$

la cui unità di misura è N/C. Il verso del campo elettrico è quello della forza sentita da una carica test q positiva.



Forza esercitata su carica test



Campo elettrico in P

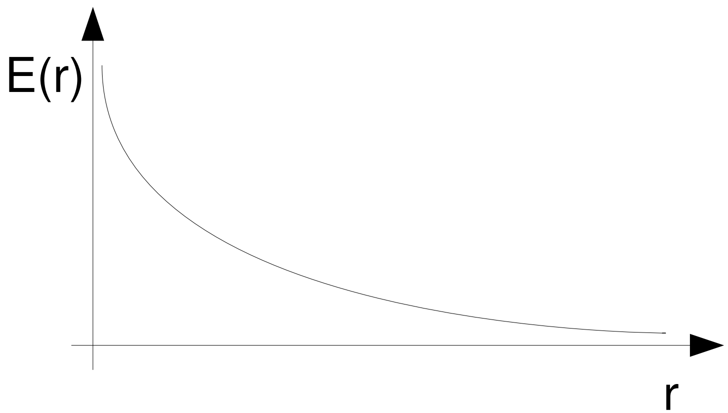
Il campo elettrico generato da una carica puntiforme

La forza che una carica Q esercita su una carica q è

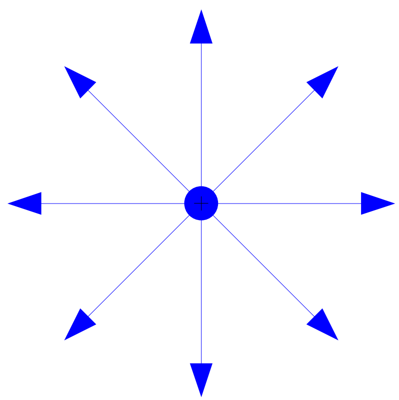
$$\vec{F} = k_e \frac{Q\,q}{r^2}\hat{r}$$

Il campo elettrico generato nello spazio da una carica puntiforme Q è quindi

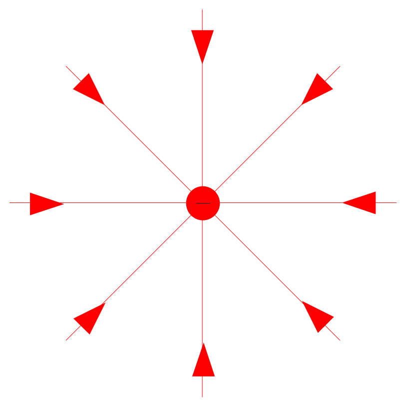
$$\vec{E} = k_e \frac{Q}{r^2}\hat{r}$$



Modulo del campo elettrico in funzione della distanza r dalla particella di carica q>0 che lo genera



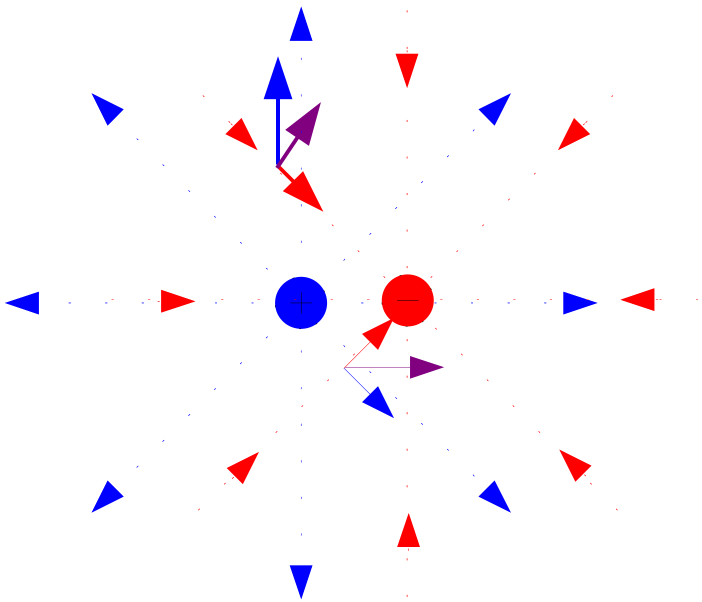
Rappresentazione del campo elettrico nello spazio generato da una particella q>0

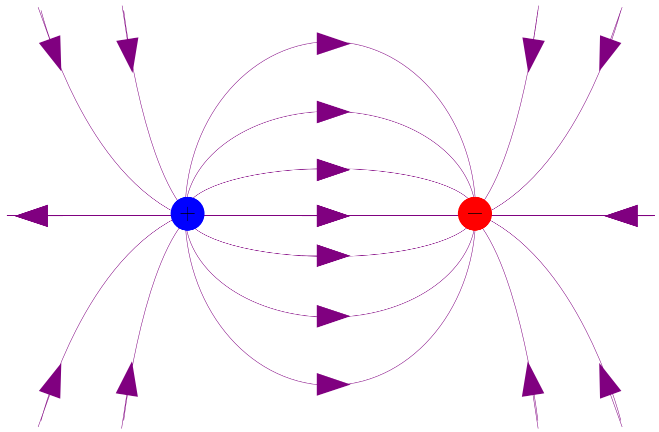


Rappresentazione del campo elettrico nello spazio generato da una particella q<0

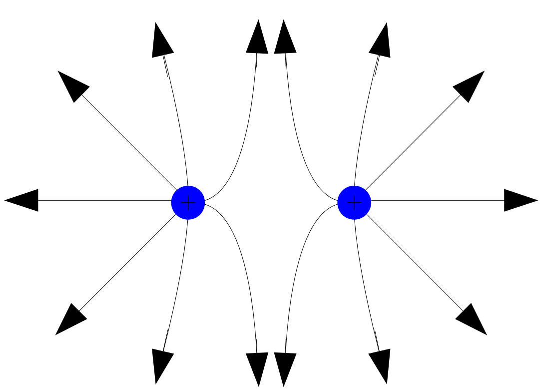
Il campo elettrico generato da due cariche puntiformi

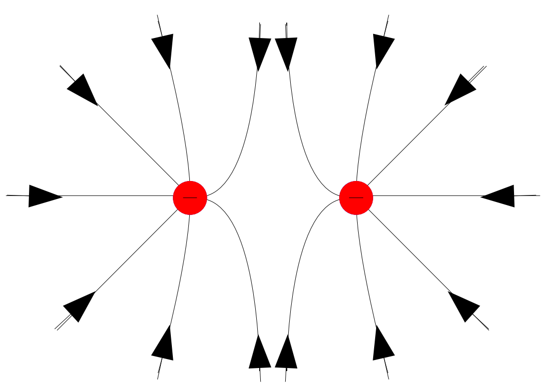
Le linee di campo di un campo elettrico generato da due o più cariche puntiformi si ottengono tramite la somma vettoriale, punto per punto, dei singoli campi elettrici, come nell'esempio riportato qui sotto.





Il risultato di questa procedura permette di trovare le linee di campo di un sistema formato da due particelle di carica opposta $\pm q$. Il caso di particelle con la stessa carica è mostrato qui sotto.





Esperimento di Millikan

La carica elettrica non assume qualsiasi valore ma si presenta sempre come multiplo di una carica elettrica fondamentale o *quanto elettrico*. Questa realtà fu messa in evidenza da Millikan con *l'esperimento della goccia d'olio*.

Una goccia molto piccola, ottenuta da un vaporizzatore, è libera di cadere nell'aria, nella quale raggiunge ben presto la velocità limite. L'aria esercita sulla particella una forza di attrito viscoso proporzionale a questa velocità F=kv (k è una costante che dipende dal mezzo e dal raggio della particella). L'equazione di Newton in questa situazione è

$$mg - kv_1 = 0 \qquad \text{ovvero}$$

$$v_1 = \frac{mg}{k}$$

Supponiamo ora che la goccia abbia carica positiva (ottenuta tramite strofinio con l'aria) e che si applichi un campo elettrico costante ed uniforme diretto verso l'alto. La velocità limite con cui la goccia ora sale è

$$v_2 = \frac{qE - mg}{k}$$

ora risolviamo le due equazioni per eliminare mg e ricavare q

$$q = \frac{k(v_1 + v_2)}{E}$$

Dopo una piccola salita la carica elettrica cambierà, per strofinio, dandoci il nuovo valore

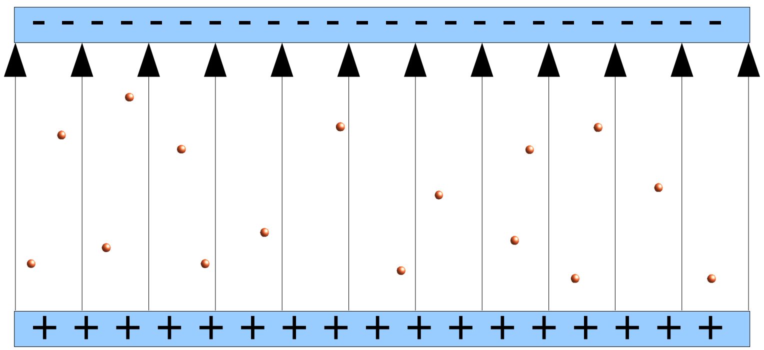
$$q' = \frac{k(v_1 + v'_2)}{E}$$

Esperimento di Millikan

Dalle due espressioni di q e q' ricaviamo la variazione di carica in funzione della velocità v_2

$$\Delta q = \frac{k}{E} \Delta v_2$$

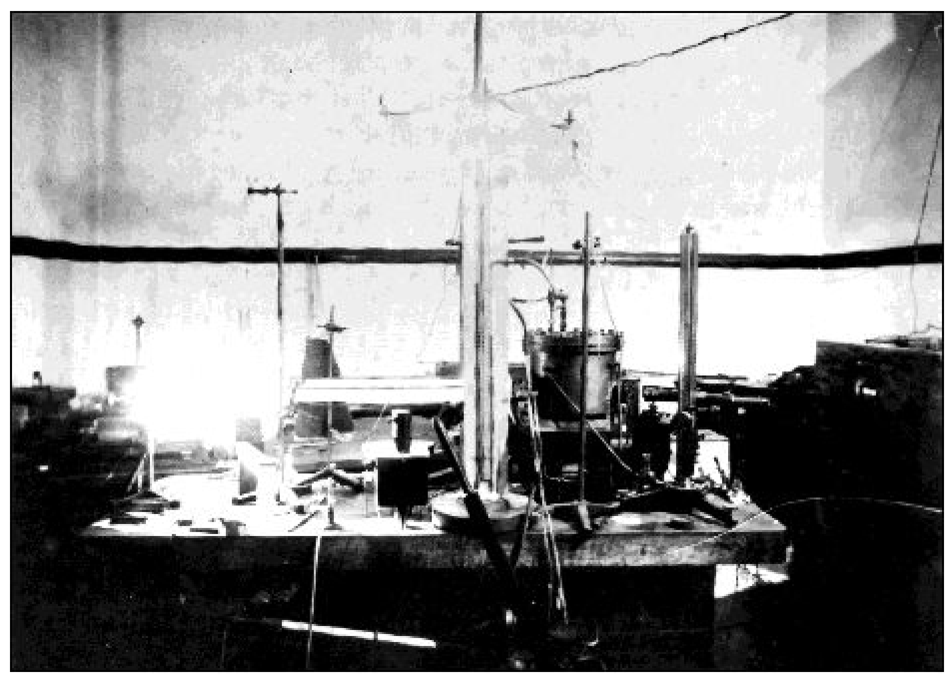
Questa espressione ci permette di calcolare le variazioni di carica in termini di quantità misurabili in laboratorio.



microscopio

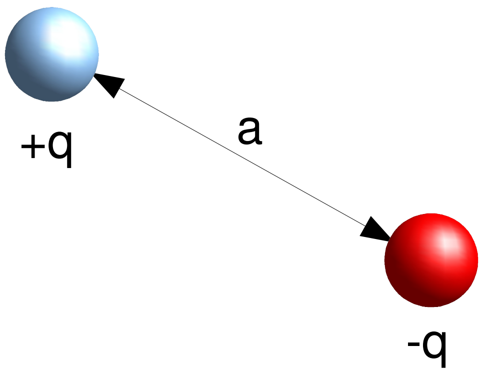
Schema dell'esperimento di Millikan

Laboratorio di Millikan

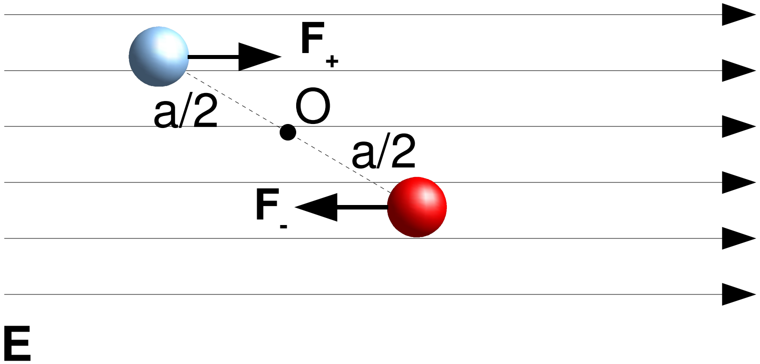


Dipolo elettrico

Un dipolo elettrico è un sistema formato da due cariche uguali ±q e di egual massa separate da una distanza a.



È interessante studiare come un dipolo elettrico si comporta all'interno di un campo elettrico. Per semplificare lo studio consideriamo il caso di un campo elettrico costante:



La somma delle forze agenti sul dipolo elettrico é

$$F_{+} + F_{-} = qE - qE = 0$$

per questa ragione il centro di massa de sistema non subisce alcuna accelerazione ed esso non trasla dalla posizione originale O. Poiché il dipolo è un corpo esteso, dobbiamo studiarne anche la somma dei momenti meccanici (rispetto al punto O)

$$\vec{M} = \frac{1}{2}\vec{a} \wedge q\vec{E} + \left(-\frac{1}{2}\vec{a}\right) \wedge (-q\vec{E})$$

$$= \vec{a} \wedge q\vec{E} = q\vec{a} \wedge \vec{E}$$

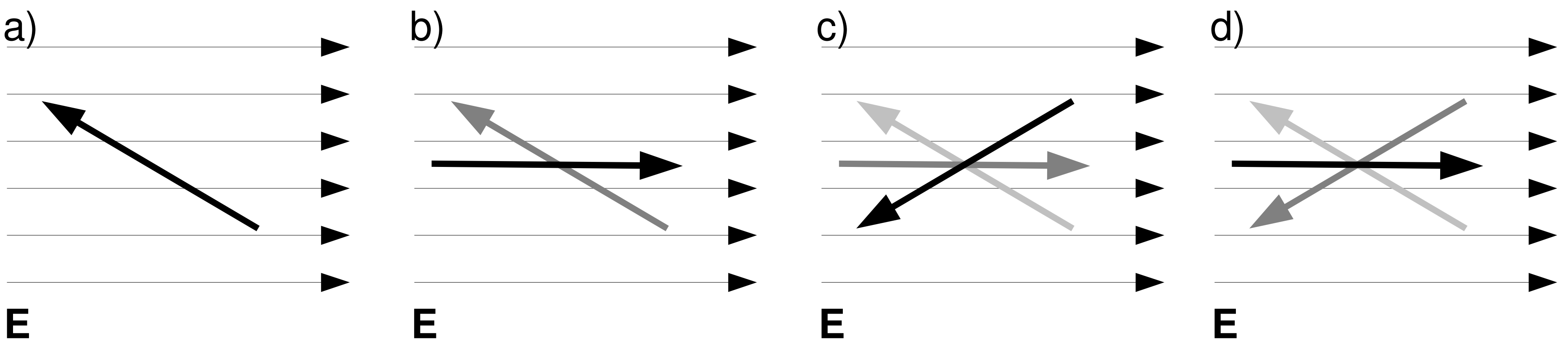
Definiamo allora il vettore dipolo elettrico **p**=q**a**, vettore avente per modulo il prodotto dell'intensità della carica q per la distanza a, e per verso il versore che va dalla carica negativa -q alla carica positiva +q.

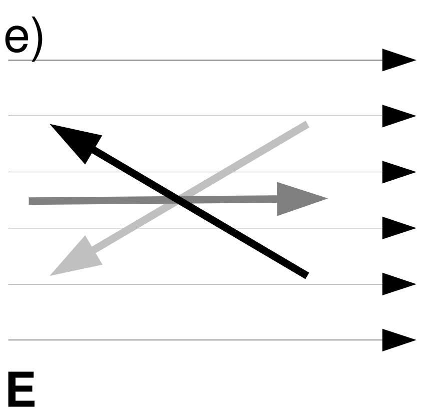
Dipolo elettrico

Il questo modo il momento delle forze di un dipolo elettrico immerso in un campo elettrico costante E diventa

$$\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

Un dipolo elettrico immerso in un campo elettrico, sotto l'effetto di questo momento inizierà a ruotare fino alla posizione in cui **p** è allineato ad **E**. Giunto a questa posizione, esso proseguirà oltre e (per la conservazione dell'energia) giungerà ad una posizione simmetrica (rispetto ad **E**) di quella iniziale. In condizioni di assenza di attrito questo moto sarà un moto periodico.



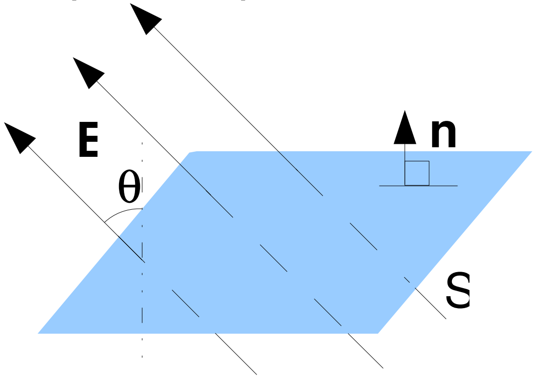


In *a)* il dipolo è fermo. All'accendersi del campo elettrico esso inizia a ruotare fino alla posizione di equilibrio in *b)*. Poiché al passaggio dalla posizione di equilibrio il dipolo possiede ancora energia cinetica, la supera ed inizia a rallentare, richiamato nuovamente dal campo elettrico verso la posizione di equilibrio. Per la conservazione dell'energia il dipolo si fermerà in *c)* proprio in una posizione simmetrica ad *a)*.

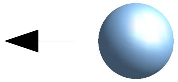
Flusso del campo elettrico

Il flusso del campo elettrico è una quantità che permette di misurare quante linee di forza passano attraverso una superficie. Nel caso di una sorgente puntiforme, ad esempio, il campo elettrico decresce con il quadrato della distanza, ovvero come l'area investita dalle sue linee di campo. Una quantità come il flusso, ottenuta dal prodotto tra campo ed area investita, permette di ottenere informazioni sul campo che sono indipendenti dalla geometria dello spazio. Vedremo in seguito come...

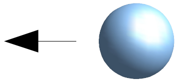
Definiamo innanzitutto il flusso di un campo elettrico costante ed uniforme **E** attraverso una superficie piana di area *S* (vedi figura) $\phi_S(E) = ES\cos\theta = \vec{E} \cdot \hat{n}\, S$



Il termine cosθ è introdotto in quanto la superficie effettiva che raccoglie le linee di campo elettrico non è S, bensì la sua proiezione sulla direzione ortogonale a quella del campo elettrico E. Per capire questo concetto è sufficiente pensare all'esempio di una racchetta da tennis che voglia colpire una pallina. La superficie utile all'urto non è tutta la superficie della racchetta bensì la sua proiezione sulla normale alla direzione di propagazione della pallina!



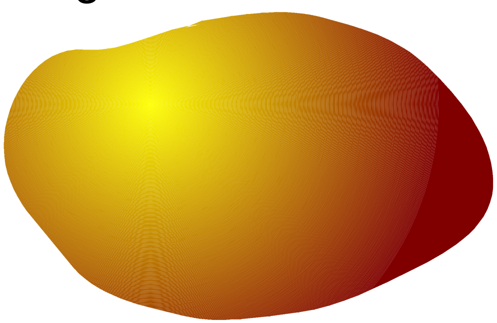
Se la racchetta è ortogonale rispetto alla direzione di arrivo della pallina, l'area utile per colpire la pallina è l'area totale della racchetta!



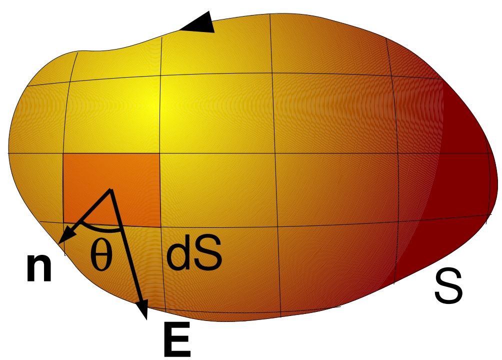
Se la racchetta è obliqua rispetto alla direzione di arrivo della pallina, l'area utile per colpire la pallina sarà ridotta!

Flusso del campo elettrico

Spesso ci si trova di fronte a superfici non piane bensì curve e asimmetriche, ed il campo elettrico, tranne in rari casi, non è omogeneo ed uniforme. In questo caso il flusso lo si calcola nel seguente modo: si divide la superficie *S* in areole di area *dS*, sufficientemente piccole da poter essere considerate costanti e da poter considerare costante il campo elettrico al loro interno. Quindi si calcolano i singoli flussi come visto in precedenza e si sommano algebricamente!



Supponiamo di avere una generica superficie attraversata da un campo elettrico E



Il verso della normale n è scelto con la regola della mano destra, una volta scelto un verso di percorrenza del bordo della superficie.

Il flusso del campo elettrico è

$$\phi_S(E) = \vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1\, dS + \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2\, dS + \cdots + \vec{E}_N \cdot \hat{n}_N\, dS$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i\, dS$$

e, passando al continuo (ovvero mandando l'areola *ds* a zero)

$$\phi_S(E) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS$$

Il pedice S all'integrale indica che l'integrale si calcola su tutta la superficie S.

Se la superficie è chiusa allora la normale **n** alla superficie è presa con verso uscente da essa, e l'integrale si scrive in questo modo

$$\phi_S(E) = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS$$

Il flusso è una quantità algebrica che può essere positiva o negativa. In particolare il flusso totale è positivo se globalmente uscente, negativo se entrante!

Legge di Gauss per il campo elettrico

Sia data una carica elettrica q. Vogliamo calcolare il flusso del campo elettrico generato da essa. Il campo elettrico generato dalla carica è

$$\vec{E}(r) = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

e di conseguenza il flusso, calcolato per semplicità su una sfera sarà dato dall'integrale

$$\phi_S(E) = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \oint_S k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{n} \, dS$$

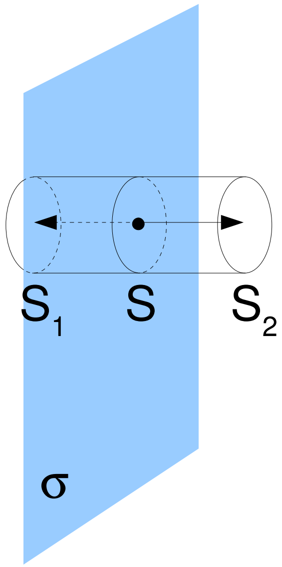
notiamo che il campo elettrico, sulla superficie di una sfera, è costante, in quanto dipende solo dal raggio *r* della sfera. Inoltre la normale ***n*** alla superficie sferica ha direzione radiale, e quindi i versori ***n*** ed ***r*** coincidono. L'integrale quindi diventa

$$\phi_S(E) = k_e \frac{q}{r^2} \oint_S \hat{r} \cdot \hat{r} \, dS = k_e \frac{q}{r^2} \oint_S dS = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4 \pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

questo fatto ci dice che il flusso del campo elettrico è proporzionale alla carica elettrica contenuta all'interno della superficie di integrazione. Inoltre il flusso NON dipende dalla superficie sferica. Quindi se abbiamo diverse superfici sferiche tutte intorno alla stessa carica, i loro flussi saranno uguali. Se abbiamo N cariche elettriche racchiuse all'interno della stessa superficie, il flusso sarà dato da

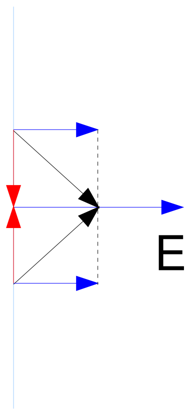
$$\phi_S(E) = \frac{\sum_i^N q_i}{\epsilon_0}$$

Campo elettrico da piano infinito uniformemente caricato



Sia dato un piano infinito uniformemente carico con densità superficiale di carica σ. Vogliamo calcolare il campo elettrico generato da questo piano nello spazio. Innanzitutto notiamo che le linee del campo elettrico sono uscenti (q>0) da entrambe le facce del piano. Inoltre le linee del campo elettrico sono tutte orizzontali in quanto le componenti verticali si eliminano vicendevolmente (vedi figura sottostante). Consideriamo la superficie di un cilindro retto con asse perpendicolare al piano. Il flusso di E attraverso la superficie laterale del cilindro è nullo in quanto le linee di campo sono parallele e quindi tangenti alla superficie laterale stessa. Il flusso totale è quindi solo dato dalle superfici di base, ed è positivo per entrambe.

$$\phi_S(E)=ES_1+ES_2=2\mathrm{ES}$$



Considerato che il flusso è la somma delle cariche contenute all'interno della superficie scriveremo:

$$2\mathrm{ES}=\frac{\sum q}{\epsilon_0}=\frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

da cui finalmente

$$E=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Quello che si nota è che il campo elettrico non dipende dalla distanza dal piano e quindi è uniforme in tutto lo spazio!

Campo elettrico da una distribuzione di carica sferica

Sia data una distribuzione uniforme, sferica, di carica nello spazio. L'andamento nello spazio del campo elettrico va studiato in due porzioni: all'interno della sfera ed all'esterno della sfera!

Applichiamo due volte la Legge di Gauss, prima su una superficie sferica di raggio r'>R:

$$\phi_S(E) = E\, 4\pi r'^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

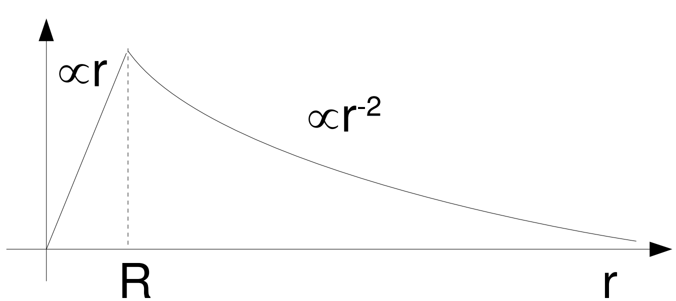
Il flusso è il prodotto tra il campo e l'area della superficie sferica in quanto il campo elettrico è uniforme ad una data distanza dal centro della sfera. Otteniamo quindi il campo elettrico E

$$E(r') = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2}$$

e notiamo che esso ha la stessa forma di un campo generato da una carica puntiforme Q. Se ora consideriamo una superficie sferica di raggio r'<R, notiamo subito che la carica elettrica contenuta al suo interno è Qr'^3/R^3. Il calcolo del campo tramite la Legge di Gauss quindi ci da

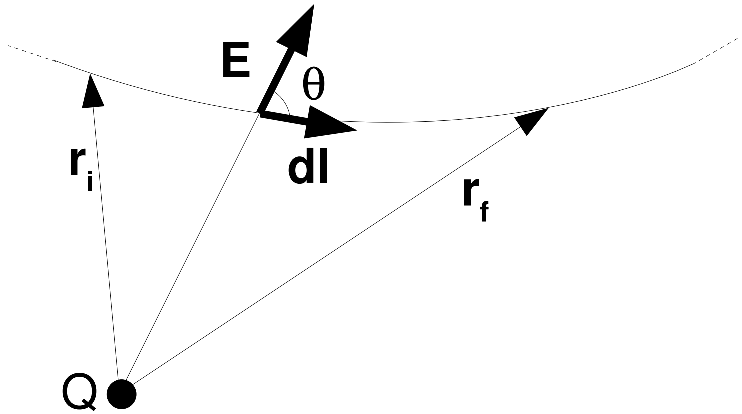
$$E(r') = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cancel{r'^2}} \frac{r'^{\cancel{3}}}{R^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r'$$

da cui notiamo l'andamento lineare del campo elettrico. Un grafico di E(r) quindi sarà:



Potenziale elettrostatico

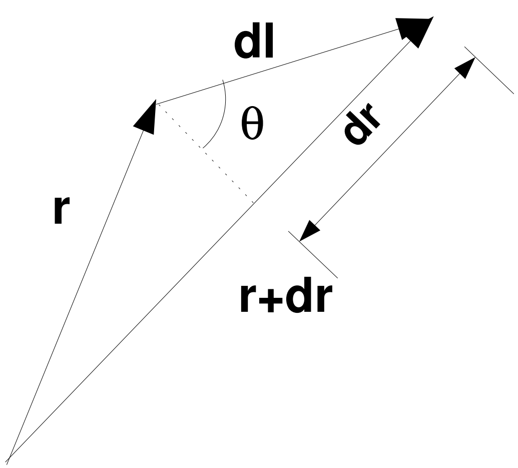
Dimostriamo innanzitutto che il campo elettrostatico è conservativo. Per fare questo, basta calcolare il lavoro svolto dal campo elettrico per spostare una particella da una posizione iniziale ad una finale e verificare che non dipenda dal cammino percorso.



$$E(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r},\ \vec{F}=q\,E(\vec{r})$$

$$W=\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f}\vec{F}\cdot\vec{dl}=q\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f}\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{dl}=\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f}\frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot\vec{dl}$$

Per risolvere l'integrale dobbiamo calcolare il prodotto scalare $\hat{r}\cdot\vec{dl}$. Dalla figura si vede che $\hat{r}\cdot\vec{dl}=1\,dl\cos\theta$ e sostituendo nell'integrale



$$W=\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f}\frac{1}{r^2}dr=\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)_{r_i}^{r_f}=\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_f}\right)$$

che come si vede, dipende solo dalle posizioni iniziale e finale!!!
Questo significa che il campo elettrostatico è un campo conservativo.

Potenziale elettrostatico

Poiché un campo conservativo ammette l'esistenza di una differenza di energia potenziale, definiamo

$$\Delta U_{el} = -\int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Per definire il potenziale in un singolo punto dello spazio, prendiamo come punto di partenza, o di riferimento, l'infinito. Notiamo quindi che per $r \rightarrow \infty$ il potenziale si annulla. Definiamo quindi il potenziale nel punto *r* come:

$$U_{el}(\vec{r}) = U_{el}(\vec{r}) - U_{el}(\vec{\infty}) = \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

ma poiché F=qE(r)

$$U_{el}(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot \vec{dl} = -q\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(r) \cdot \vec{dl}$$

Dobbiamo notare che U(r) contiene la carica elettrica generante (in E) e quella di test q. poiché le cariche elettriche possono essere positive o negative, concludiamo che per cariche concordi $U_{el}>0$ mentre per cariche discordi $U_{el}<0$.

Definiamo ora il *"potenziale elettrostatico"* come il potenziale per unità di carica:

$$V(\vec{r}) = \frac{U_{el}(\vec{r})}{q} = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{dl}$$

Il potenziale elettrostatico si misura in J/C=V (volt)

Potenziale elettrostatico

La differenza di potenziale elettrostatico è quindi definita come

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = V_A - V_B$$