A86001/02 – a.a. 2012/13
MATEMATICA per ECONOMIA, FINANZA e MANAGEMENT

Correttore	Voto

Esercizio	1	2	3
Voto			

Sessione invernale
Secondo appello
mod. A

30 gen. 2014 – S1/02

Cognome ______________________________

Nome ______________________________

Matricola ______________________________

Anno di corso ______________________________

Classe: S H

A86001
A86002

Le risposte devono essere scritte unicamente sui fogli allegati. Motivare sempre i risultati ottenuti.
Compilare la prima facciata con i propri dati.
I primi due esercizi sono comuni per tutti gli studenti. Risolvere il terzo esercizio relativo alla propria classe. Non saranno attribuiti punti per esercizi aggiuntivi risolti.

L.I.U.C. School of Economics and Management

Primo appello 30 gennaio 2014 (Mod. A)

1. Risolvere i seguenti esercizi.

a. (3 pt) Sia $C(q) = 10e^{\frac{1}{50}q^2-1}$, con $q \geq 0$, la funzione di costo per produrre la quantità q di un certo bene. Determinare per quali valori di q essa risulti elastica.

b. (3 pt) Sia data la successione definita per ricorrenza $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \frac{1}{2} \cdot a_{n-1} \end{cases}$. Scrivere i primi cinque termini di tale successione. Calcolare inoltre la somma della serie geometrica $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c. (3 pt) Calcolare l'area della regione limitata di piano compresa tra $y = x^3 + 1$ e l'asse delle x nell'intervallo $[-2, 0]$

d. (2 pt) Enunciare la definizione di vettori linearmente indipendenti. Dati i vettori

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

determinare se sono linearmente dipendenti. In caso affermativo, dire, motivando la risposta, quanti tra essi sono linearmente indipendenti.

2. Un veicolo di valore $A = 48.950,00$ € viene proposto in leasing. Il contratto prevede il pagamento di un anticipo in contanti pari al 5% del valore del bene, un premio di estinzione pari al 15% del valore del bene da corrispondere assieme all'ultimo canone e 36 canoni mensili posticipati di importo costante. Il contratto prevede il $9,48\%$ quale TAN convertibile mensilmente

a. (2 pt) Determinare il tasso annuo effettivo del finanziamento.

b. (3 pt) Calcolare l'importo del canone;

c. (4 pt) Il contratto prevede inoltre $200,00$ € quali spese di istruzione pratica e $2,50$ € di spese di incasso canoni versate in corrispondenza di ogni canone. Determinare se il TAEG del contratto supera il tasso soglia 10%. Se le spese di incasso fossero versate in un'unica soluzione, per un importo pari a $2,50 \times 36$ all'inizio del contratto, il TAEG risulterebbe maggiore o minore, rispetto all'incasso periodico dei medesimi importi? (motivare la risposta)

d. (2 pt) Enunciare due condizioni necessarie e sufficienti per la scindibilità di una legge finanziaria.

3. (standard) Risolvere i seguenti quesiti.

   a. (6 pt) Data la funzione:
$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

      1. determinarne il dominio, le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani ed il segno;
      2. calcolare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti orizzontali, verticali ed obliqui;
      3. studiarne la monotonia evidenziando gli eventuali estremanti (punti di massimo o di minimo, locali o globali);
      4. studiarne la convessità, evidenziando eventuali flessi, e tracciare un grafico qualitativo.

   b. (2 pt) Una operazione finanziaria prevede lo scambio di $987,38$ € disponibili oggi, contro $1.000,00$ € disponibili tra 345 giorni. Calcolare il tasso di interesse annuo semplice dell'operazione, nell'ipotesi di anno commerciale. Calcolare poi il tasso di sconto commerciale dell'operazione nell'ipotesi di anno civile.

   c. (3 pt) Una legge finanziaria in una variabile ha intensità istantanea d'interesse $\rho(t) = 0,001t + 0,002$. Calcolare il valore attuale di $1.500,00$ € disponibili all'epoca $t = 3$.

3. (challenge) Risolvere i seguenti quesiti:

a. (2 pt) Un investimento prevede i pagamenti

tempo (anni)	$5/12$	$11/12$	$17/12$
flussi di cassa (€)	$122,50$	$122,50$	$10.122,50$

Il mercato presenta una struttura per scadenze piatta con $i = 3,15\%$. Calcolare la Duration dell'operazione finanziaria.

b. (5 pt) Data la funzione

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

1. Determinare i punti stazionari della funzione.
2. Calcolare, in un generico punto (x_1, x_2, x_3, x_4), la matrice Hessiana $\nabla^2 F(x_1, x_2, x_3, x_4)$.
3. Indicare quale dovrebbe essere la catena dei segni dei minori principali di nord-ovest della matrice Hessiana perché un punto stazionario di F sia di minimo locale. Determinare, attraverso la matrice Hessiana, eventuali estremanti liberi della funzione.

c. (4 pt) Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ k & 2 & 3 \\ 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

School of Economics and Management

Matematica per Economia Finanza e Management

A86001/02 – a.a. 2012/13

MATEMATICA per ECONOMIA, FINANZA e MANAGEMENT

Correttore	Voto

Esercizio	1	2	3
Voto			

Sessione invernale
Secondo appello
mod. B

30 gen. 2014 – S1/02

Cognome ______________________________

Nome ______________________________

Matricola ______________________________

Anno di corso ______________________________

Classe: S H

A86001
A86002

Le risposte devono essere scritte unicamente sui fogli allegati. Motivare sempre i risultati ottenuti.
Compilare la prima facciata con i propri dati.
I primi due esercizi sono comuni per tutti gli studenti. Risolvere il terzo esercizio relativo alla propria classe. Non saranno attribuiti punti per esercizi aggiuntivi risolti.

Primo appello 07 gennaio 2014 (Mod. B)

1. Risolvere i seguenti esercizi.

a. (3 pt) Sia $C(q) = 8e^{\frac{1}{32}q^2-1}$, con $q \geq 0$, la funzione di costo per produrre la quantità q di un certo bene. Si determini per quali valori di q essa risulti inelastica.

b. (3 pt) Sia data la successione definita per ricorrenza $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \frac{1}{3} \cdot a_{n-1} \end{cases}$. Scrivere i primi cinque termini di tale successione. Calcolare inoltre la somma della serie geometrica $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

c. (3 pt) Calcolare l'area della regione limitata di piano compresa tra $y = -x^2 + 1$ e l'asse delle x nell'intervallo $[-2, 0]$

d. (2 pt) Enunciare la definizione di vettori linearmente indipendenti. Dati i vettori

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

determinare se sono linearmente dipendenti. In caso affermativo, dire, motivando la risposta, quanti tra essi sono linearmente indipendenti.

2. Un veicolo di valore $A = 52.350,00$ € viene proposto in leasing. Il contratto prevede il pagamento di un anticipo in contanti pari al 5% del valore del bene, un premio di estinzione pari al 15% del valore del bene da corrispondere assieme all'ultimo canone e 36 canoni mensili posticipati di importo costante. Il contratto prevede il $8,64\%$ quale TAN convertibile mensilmente

a. (2 pt) Determinare il tasso annuo effettivo del finanziamento.

b. (3 pt) Calcolare l'importo del canone;

c. (4 pt) Il contratto prevede inoltre $200,00$ € quali spese di istruzione pratica e $2,50$ € di spese di incasso canoni versate in corrispondenza di ogni canone. Determinare se il TAEG del contratto supera il tasso soglia $9,50\%$. Se le spese di incasso fossero versate in un'unica soluzione, per un importo pari a $2,50 \times 36$ all'inizio del contratto, il TAEG risulterebbe maggiore o minore, rispetto all'incasso periodico dei medesimi importi? (motivare la risposta)

d. (2 pt) Enunciare due condizioni necessarie e sufficienti per la scindibilità di una legge finanziaria.

3. (standard) Risolvere i seguenti quesiti.

   a. (6 pt) Data la funzione:
   $$f(x) = -\frac{x}{\ln x}$$
      1. determinarne il dominio, le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani ed il segno;
      2. calcolare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti orizzontali, verticali ed obliqui;
      3. studiarne la monotonia evidenziando gli eventuali estremanti (punti di massimo o di minimo, locali o globali);
      4. studiarne la convessità, evidenziando eventuali flessi, e tracciare un grafico qualitativo.

   b. (2 pt) Una operazione finanziaria prevede lo scambio di $987,38$ € disponibili oggi, contro $1.000,00$ € disponibili tra 315 giorni. Calcolare il tasso di interesse annuo semplice dell'operazione, nell'ipotesi di anno commerciale. Calcolare poi il tasso di sconto commerciale dell'operazione nell'ipotesi di anno civile.

   c. (3 pt) Una legge finanziaria in una variabile ha intensità istantanea d'interesse $\rho(t) = 0,002t + 0,001$. Calcolare il valore attuale di $2.500,00$ € disponibili all'epoca $t = 2$.

3. (challenge) Risolvere i seguenti quesiti:

   a. (2 pt) Un investimento prevede i pagamenti

tempo (anni)	5/12	11/12	17/12
flussi di cassa (€)	122, 50	122, 50	10.122, 50

   Il mercato presenta una struttura per scadenze piatta con $i = 3,15\%$. Calcolare la Duration dell'operazione finanziaria.

   b. (5 pt) Data la funzione

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

   1. Determinare i punti stazionari della funzione.
   2. Calcolare, in un generico punto (x_1, x_2, x_3, x_4), la matrice Hessiana $\nabla^2 F(x_1, x_2, x_3, x_4)$.
   3. Indicare quale dovrebbe essere la catena dei segni dei minori principali di nord-ovest della matrice Hessiana perché un punto stazionario di F sia di minimo locale. Determinare, attraverso la matrice Hessiana, eventuali estremanti liberi della funzione.

   c. (4 pt) Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ k & 2 & 3 \\ 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

1.

(a) Poiché

$$C'(q) = \begin{array}{|c|}\hline \frac{2}{5} q e^{\frac{1}{50}q^2-1} \\ \hline \text{mod. A} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline \frac{1}{16} q e^{\frac{1}{32}q^2-1} \\ \hline \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$$

L'elasticità risulta essere

$$E_C(q) = \begin{array}{|c|}\hline \frac{1}{25}q^2 \\ \hline \text{mod. A} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline \frac{1}{16}q^2 \\ \hline \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$$

Deve quindi essere

$$\begin{array}{|c|}\hline |E_C(q)| > 1 \\ \hline \text{mod. A} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline |E_C(q)| < 1 \\ \hline \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$$

Da cui si ottiene

$$\begin{array}{|c|}\hline q > 5 \\ \hline \text{mod. A} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline 0 < q < 4 \\ \hline \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$$

(b) I primi cinque termini sono

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$	mod. A	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$	mod. B

La serie geometrica, poiché il primo termine è per $n = 1$, ha somma $S = \frac{1}{1-q} - 1$, ovvero

1	mod. A	$\frac{1}{2}$	mod. B

(c) La funzione cambia segno nell'intervallo assegnato, quindi, per impiegare l'integrale nel calcolo dell'Area è necessario spezzare l'intervallo di integrazione e cambiare segno al valore dell'integrale nell'intervallo in cui $f(x) < 0$

$\int_{-2}^{-1} -(x^3+1)dx + \int_{-1}^{0}(x^3+1)dx = -\left[\frac{x^4}{4}+x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^4}{4}+x\right]_{-1}^{0} = \frac{14}{4}$	mod. A

$-\int_{-2}^{-1}(-x^2+1)dx + \int_{-1}^{0}(-x^2+1)dx = -\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{0} = 2$	mod. B

(d) Per la definizione si veda il libro di testo. Per determinare quanti vettori sono linearmente indipendenti, è opportuno costruire la matrice composta dall'affiancamento delle colonne che rappresentano i vettori:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} & \text{mod. A} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$$

Il rango della matrice è il numero di vettori linearmente indipendenti. Poiché la matrice è singolare, i tre vettori sono linearmente dipendenti. Il rango della matrice può essere 1 o 2. Poiché la sottomatrice $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ è non singolare, il rango è 2 e due sono i vettori linearmente indipendenti.

2.

(a) Il tasso periodale risulta essere, $i_{12} = \begin{array}{|c|c|}\hline 0,790\% & \text{mod. A} \\ \hline 0,720\% & \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$. Pertanto si ottiene il tasso annuo effettivo $i = (1 + i_{12})^{12} - 1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 9,903\% & \text{mod. A} \\ \hline 8,990\% & \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$.

(b) L'importo della rata si può calcolare come

$$C = \left(A - 5\%A - \frac{15\%A}{(1+i_{12})^{36}} \right) \times \frac{i_{12}}{1 - (1+i_{12})^{-36}}$$

dove n rappresenta il numero delle rate da corrispondere. Si ottiene quindi

$$C = \begin{array}{|c|}\hline 1.312,050 \text{ €} \\ \hline \text{mod. A} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline 1.381,305 \text{ €} \\ \hline \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$$

(c) Calcolando, dal punto di vista della società di leasing, il valore attuale netto dell'operazione finanziaria gravata delle spese, si ottiene

$$\begin{array}{|l|c|}\hline NPV\,(10\%) = 210,19 > 0 & \text{mod. A} \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{|l|c|}\hline NPV\,(9,50\%) = -105,25 < 0 & \text{mod. B} \\ \hline \end{array}.$$

Poiché l'operazione è un investimento puro, questo significa che $TAEG \begin{array}{|c|c|}\hline > 10\% & \text{mod. A} \\ \hline < 9,5\% & \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$.
Poiché se le spese di incasso venissero corrisposte immediatamente, per un pari importo nominale (cioè non attualizzate) rappresenterebbero un costo maggiore, il $TAEG$ risulterebbe necessariamente maggiore in questa seconda ipotesi.

(d) Si veda il libro di testo.

3. (standard)

(a)

1. Il domino della funzione è $A = (0,1) \cup (1,+\infty)$. Inoltre la funzione non interseca gli assi cartesiani. La funzione è positiva per $x \in$

$(1,+\infty)$	mod. A
$(0,1)$	mod. B

2. Agli estremi del dominio si ottengono i limiti

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & \text{mod. A} \\ \hline 0 & \text{mod. B} \\ \hline\end{array} \qquad \text{non c'è asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \begin{array}{|c|c|}\hline \pm\infty & \text{mod. A} \\ \hline \mp\infty & \text{mod. B} \\ \hline\end{array} \qquad x = 1 \text{ è asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \begin{array}{|c|c|}\hline +\infty & \text{mod. A} \\ \hline -\infty & \text{mod. B} \\ \hline\end{array} \qquad \text{possibile asintoto obliquo}$$

Poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ non c'è alcun asintoto obliquo.

3. La funzione risulta derivabile nel proprio dominio, infatti

$$f'(x) = \begin{array}{|c|c|}\hline \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} & \text{mod. A} \\ \hline \dfrac{1-\ln x}{\ln^2 x} & \text{mod. B} \\ \hline\end{array}$$

e $\texttt{dom} f' = A$. Inoltre la funzione ammette un unico punto stazionario in $x^* = e$. La monotonia della funzione può essere studiata attraverso il segno della derivata prima:

	$(0,1)$	$(1,e]$	$[e,+\infty)$	
$\ln x - 1$	$-$	$-$	$+$	mod. A
$\ln^2 x$	$+$	$+$	$+$	
f'	$-$	$-$	$+$	
f	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

	$(0,1)$	$(1,e]$	$[e,+\infty)$	
$1 - \ln x$	$+$	$+$	$-$	mod. B
$\ln^2 x$	$+$	$+$	$+$	
f'	$+$	$+$	$-$	
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

Pertanto il punto $x^* = e$ è di

minimo	mod. A
massimo	mod. B

almeno locale.

4. La funzione risulta derivabile due volte nel proprio dominio, infatti

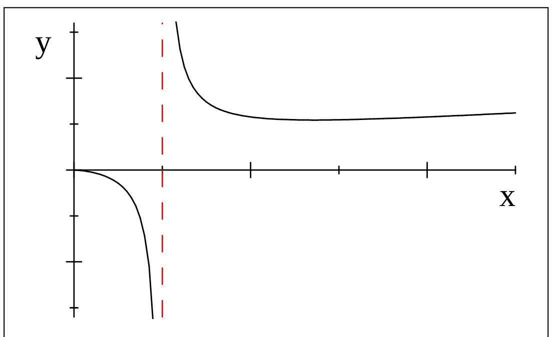
$$f''(x) = \begin{array}{|c|c|}\hline \dfrac{2-\ln x}{x\ln^3 x} & \text{mod. A} \\ \hline \dfrac{\ln x - 2}{x\ln^3 x} & \text{mod. B} \\ \hline\end{array}$$

e $\mathtt{dom} f'' = A$. La convessità della funzione può essere studiata attraverso il segno della derivata seconda, che si annulla nel punto $x = e^2$. Poiché

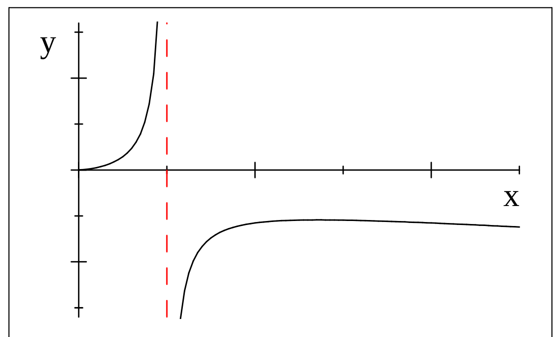
	$(0,1)$	$(1,e^2]$	$[e^2,+\infty)$	
$2-\ln x$	$+$	$+$	$-$	mod. A
$\ln^3 x$	$-$	$+$	$+$	
x	$+$	$+$	$+$	
f''	$-$	$+$	$-$	
f	concava	convessa	concava	

	$(0,1)$	$(1,e^2]$	$[e^2,+\infty)$	
$\ln x - 2$	$-$	$-$	$+$	mod. B
$\ln^3 x$	$-$	$+$	$+$	
x	$+$	$+$	$+$	
f''	$+$	$-$	$+$	
f	convessa	concava	convessa	

Il punto $x = e^2$ è di flesso a tangente obliqua. Un grafico qualitativo della funzione è



mod. A



mod. B

(b) Il tasso di interesse semplice risulta

$$i_s = \begin{cases} \dfrac{1000-987,38}{987,38 \times \frac{345}{360}} = 1,334\% & \text{mod. A} \\[2ex] \dfrac{1000-987,38}{987,38 \times \frac{315}{360}} = 1,461\% & \text{mod. B} \end{cases}$$

Il tasso di sconto commerciale

$$d = \begin{cases} \dfrac{1000-987,38}{1000 \times \frac{345}{365}} = 1,335\% & \text{mod. A} \\[2ex] \dfrac{1000-987,38}{1000 \times \frac{315}{365}} = 1,462\% & \text{mod. B} \end{cases}$$

(c) La legge finanziaria ha fattore di montante

$$f(t) = e^{\int_0^t \rho(s)ds} = \begin{array}{|c|c|}\hline e^{0{,}002t+0{,}001\frac{t^2}{2}} & \text{mod. A} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline e^{0{,}001t+0{,}002\frac{t^2}{2}} & \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$$

Il valore attuale incassato è $A = \begin{array}{|c|c|}\hline N \times \frac{1}{f(3)} = 1.484{,}332 & \text{mod. A} \\ \hline N \times \frac{1}{f(2)} = 2.485{,}045 & \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$ €.

3. (challenge)

(a) La Duration risulta essere

$$\begin{aligned} D &= \frac{\frac{5}{12} \times \frac{122{,}5}{(1{,}0315)^{5/12}} + \frac{11}{12} \times \frac{122{,}5}{(1{,}0315)^{11/12}} + \frac{17}{12} \times \frac{10.122{,}5}{(1{,}0315)^{17/12}}}{\frac{122{,}5}{(1{,}0315)^{5/12}} + \frac{122{,}5}{(1{,}0315)^{11/12}} + \frac{10.122{,}5}{(1{,}0315)^{17/12}}} = \\ &= 1{,}398 \text{ anni.} \end{aligned}$$

(b)

1. I punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases}$$

ovvero l'origine $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$.

2. La matrice Hessiana è

$$\nabla^2 F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$$

3. Poiché vi sono 4 variabili, la catena dei segni deve essere $+, +, +, +$ per un punto di minimo locale forte. Nell'origine (ed in qualsiasi punto) i minori principali di NW risultano essere $H_1 = 4 > 0$, $H_2 = -1 < 0$, $H_3 = -2 < 0$ e $H_4 = -4$. Il punto non è quindi un estremante.

(c)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ k & 2 & 3 \\ 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

La matrice dei coefficienti ha rango maggiore o uguale 2, come si evince considerando la sottomatrice $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ non singolare per ogni k. Le orlate di $\mathbf{B}$

sono

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ k & 2 & 3 \\ 1 & -k & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ k & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{C}_1 = -5k^2 + 6k - 1 \qquad \det \mathbf{C}_2 = 2k - 2$$

Poiché $\mathbf{C}_2$ non è singolare per $k \neq 1$, per tali valori, la matrice dei coefficienti ha rango 3, come il numero delle incognite. Per $k = 1$, $\det \mathbf{C}_1 = -5 + 6 - 1 = 0$, tutte le orlate sono singolari e la matrice ha rango 2. La matrice orlata è

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -2 \\ k & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Per $k \neq 1$ il determinante è $\det(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 8k\,(k-1) = 0$ per $k = 0$ e $k = 1$. Quindi per $k = 0$ il sistema ammette un'unica soluzione, per altri valori di $k \neq 1, 0$ il sistema non ammette soluzioni. Per $k = 1$ interessano le orlate di $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{C}_3 = 4 \qquad \det \mathbf{C}_2 = 0$$

Poiché una non è singolare, il rango è maggiore di 2 ed il sistema non ammette soluzioni.