School of
Economics and Management

Matematica per Economia Finanza e Management

A86001/02 – a.a. 2012/13

MATEMATICA per ECONOMIA, FINANZA e MANAGEMENT

Correttore	Voto

Esercizio	1	2	3
Voto			

Sessione straordinaria
Primo appello

29 ott. 2013 – S5/01

Cognome ______________________________

Nome ______________________________

Matricola ______________________________

Anno di corso ______________________________

Classe: S H

A86001
A86002

Le risposte devono essere scritte unicamente sui fogli allegati. Motivare sempre i risultati ottenuti.
Compilare la prima facciata con i propri dati.
I primi due esercizi sono comuni per tutti gli studenti. Risolvere il terzo esercizio relativo alla propria classe. Non saranno attribuiti punti per esercizi aggiuntivi risolti.

Primo appello 29 ottobre 2013

1. Risolvere i seguenti esercizi.

a. (4 pt) Dati i tre vettori $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, determinare quanti tra essi siano linearmente indipendenti.

b. (3 pt) Il profitto marginale di una azienda è dato dalla funzione della quantità prodotta $q > 0$, $\pi'(q) = 2q - \dfrac{10}{(q+1)^2}$. Determinare la funzione profitto $\pi(q)$ sapendo che si ottiene un profitto di 100 € quando la quantità prodotta è $q = 9$

c. (2 pt) Enunciare la definizione di funzione derivabile in un punto x_0 interno al dominio. Fornire un esempio (espressione analitica e grafico) di funzione continua in $x_0 = 1$ ma non derivabile nello stesso punto.

d. (2 pt) Data la funzione di domanda $Q_d(p) = 100e^{-\frac{1}{10}p+3}$, calcolare l'elasticità e determinare per quale valore di p la domanda abbia elasticità uguale a 1.

2. Un prestito personale di $S = 7.500,00$ € può essere concesso con due diverse soluzioni:

   - Rimborso in 24 rate mensili posticipate di importo costante al tasso annuo nominale convertibile mensilmente $j_{12} = 8,400\%$;
   - Rimborso in 12 rate bimestrali posticipate di importo costante al tasso annuo nominale convertibile bimestralmente $j_6 = 8,429\%$

a. (2 pt) Determinare i tassi annui effettivi delle due diverse proposte di ammortamento.

b. (2 pt) Calcolare l'importo della rata nelle due diverse soluzioni;

c. (4 pt) Scomporre la seconda rata in quota di capitale e quota di interesse nei due diversi ammortamenti;

d. (3 pt) Calcolare il monte interessi corrisposto nelle due diverse soluzioni.

3. (standard) Risolvere i seguenti quesiti.

   a. (6 pt) Data la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$$

   1. determinarne il dominio, eventuali simmetrie, le intersezioni con gli assi ed il segno;
   2. calcolare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti orizzontali e verticali;
   3. studiarne la monotonia evidenziando gli eventuali estremanti (punti di massimo o di minimo, locali o globali);
   4. studiarne la convessità, evidenziando eventuali flessi, e tracciare un grafico qualitativo.

   b. (3 pt) Determinare il valore del flusso di cassa a tale che $x = 5\%$ sia il tasso interno di rendimento dell'operazione finanziaria

tempo (mesi)	0	1	5	7
flussi di cassa (€)	$-10.000,000$	$+8.000,000$	a	$-3.000,000$

   c. (2 pt) Una operazione finanziaria prevede un capitale iniziale pari a $984,50$ € ed un montante di $1.000,00$ € tra 224 giorni. Determinare il tasso di interesse annuo composto (i_{civ}) che rappresenta l'operazione finanziaria descritta secondo la convenzione dell'anno civile.

3. (challenge) Risolvere i seguenti quesiti:

a. (2 pt) Calcolare la Duration dell'operazione finanziaria

tempo (mesi)	0	3	6	9
flussi di cassa (€)	−10.000	8.500	1.500	1.500

al tasso di interesse $i = 4,50\%$.

b. (5 pt) Enunciare la definizione di punto di massimo locale per una funzione $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Determinare inoltre gli eventuali estremanti liberi della funzione

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

c. (4 pt) Determinare il numero delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -4x + 2y + z = 3 \\ -2x + y + 4z = 4 \\ 10x - 5y - 6z = -10 \end{cases}$$

1.

(a) Considerando la matrice $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, ottenuta affiancando i tre vettori proposti, il numero di vettori linearmente indipendenti è pari al rango, che risulta essere $r(\mathbf{M}) = 2$. Si deduce che i vettori linearmente indipendenti sono due.

(b) Per determinare la funzione profitto si deve calcolare $\int \left(2q - \frac{10}{(q+1)^2}\right) dq$ e si ottiene $\pi(q) = q^2 + \frac{10}{q+1} + k$. Dovendo, infine, essere $\pi(9) = 100$, si ottiene $k = 18$.

(c) Per la definizione si veda il libro di testo. Un esempio potrebbe essere la funzione $f(x) = |x-1|$, non derivabile nel punto $x = 1$, ma ivi continua.

(d) Si ha $Q'_d(p) = -10e^{-\frac{1}{10}p+3}$ e quindi $E_Q(q) = \left|\frac{p}{10}\right|$. Si ha quindi che l'elasticità è uguale a 1 per $p = 10$.

2.

(a) I tassi periodali risultano essere, rispettivamente $i_{12} = 0,700\%$ e $r_6 = 1,405\%$. Pertanto si ottengono i tassi annui effettivi $i = (1 + 0,7\%)^{12} = 8,731\%$ e $r = (1 + 1,405\%)^6 = 8,731\%$.

(b) L'importo della rata si può calcolare come

$$R = S \times \frac{i_m}{1 - (1 + i_m)^{-n}}$$

dove n rappresenta il numero delle rate da corrispondere. Si ottiene quindi

	Rata mensile	**Rata bimestrale**
$R =$	$7500 \times \frac{0,7\%}{1-(1+0,7\%)^{-24}} = 340,575$ €	$7500 \times \frac{1,405\%}{1-(1+1,405\%)^{-12}} = 683,533$ €

(c) Per scomporre la seconda rata occorre il debito residuo dopo il pagamento della prima rata:

	Rata mensile	**Rata bimestrale**
$D_1 =$	$S \times (1,007\%) - 340,575 = 7.211,925$	$S \times (1,01405\%) - 683,533 = 6.921,834$
$I_2 =$	$7.211,925 \times 0,07\% = 50,483$	$6.921,834 \times 1,405\% = 97,245$
$C_2 =$	$340,575 - 50,483 = 290,091$	$683,533 - 97,245 = 586,288$

(d) Il monte interessi risulta dalla differenza tra il netto finanziato e la somma delle rate, pertanto si ottiene:

	Rata mensile	**Rata bimestrale**
$MI =$	$340,575 \times 24 - 7500 = 673,79$ €	$683,533 \times 12 - 7500 = 702,40$ €

3. (standard)

(a)

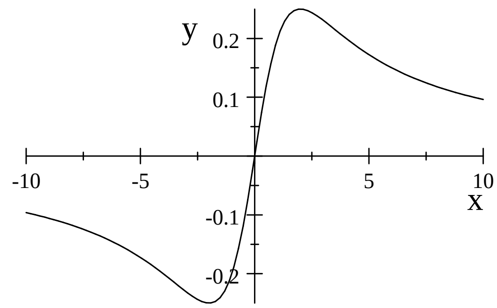
1. Il domino della funzione è $A = (-\infty, +\infty)$. Inoltre la funzione risulta essere dispari, ovvero $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. L'unica intersezione con gli assi cartesiani è nel punto $(0, 0)$.
   Il segno della funzione viene determinato risolvendo la disequazione $f(x) \geq 0$, vera per $x \geq 0$, essendo il denominatore sempre positivo. La funzione risulta quindi positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$.
2. Agli estremi del dominio si ottengono i limiti
   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^- \quad y = 0 \text{ è asintoto orizzontale}$$
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+ \quad y = 0 \text{ è asintoto orizzontale}$$
3. La funzione risulta derivabile nel proprio dominio, infatti
   $$f'(x) = \frac{x^2 + 4 - 2x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2+4)^2}$$
   e $\texttt{dom} f' = A$. Inoltre la funzione ammette punti stazionari in $x_1 = -2$ e $x_2 = +2$. La monotonia della funzione può essere studiata attraverso il segno della derivata prima ($e^x > 0$ per ogni $x \in A$):

	$(-\infty, -2]$	$[-2, +2]$	$[+2, +\infty)$
$4 - x^2$	$-$	$+$	$-$
$(x^2+4)^2$	$+$	$+$	$+$
f'	$-$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

   Pertanto il punto $x = -2$ è di minimo almeno locale. Il punto $x = 2$, risulta invece di massimo almeno locale.
4. La funzione risulta derivabile due volte nel proprio dominio, infatti
   $$f''(x) = \frac{2x^3 - 24x}{(x^2+4)^3} = \frac{2x(x^2 - 12)}{(x^2+4)^3}$$
   e $\texttt{dom} f'' = A$. La convessità della funzione può essere studiata attraverso il segno della derivata seconda, che si annulla nei punti $x_{3,4} = \pm 2\sqrt{3}$ e $x_5 = 0$.

	$(-\infty, -2\sqrt{3}]$	$[-2\sqrt{3}, 0]$	$[0, 2\sqrt{3}]$	$[2\sqrt{3}, +\infty)$
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x^2 - 12)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$(x^2+4)^3$	$+$	$+$	$+$	$+$
f'	$-$	$+$	$-$	$+$
f	concava	convessa	concava	convessa

   I punti $x_{3,4,5}$ sono punti di flesso a tangente obliqua. Un grafico qualitativo della funzione è



(b) Deve risultare

$$0 = -10000 + \frac{8000}{(1,05)^{1/12}} + \frac{a}{(1,05)^{5/12}} - \frac{3000}{(1,05)^{7/12}}$$

Pertanto

$$a = \left[10000 - \frac{8000}{(1,05)^{1/12}} + \frac{3000}{(1,05)^{7/12}}\right] \times (1,05)^{5/12} = 5.049,906 \text{ €}$$

(c) Deve risultare

$$1000 = 984,50 \times (1 + i_{civ})^{224/365}$$

da cui si ottiene $i_{civ} = \left(\frac{1000}{984,50}\right)^{365/224} - 1 = 2,578\%$.

3. (challenge)

(a) La Duration risulta essere

$$D = \frac{\frac{3}{12} \times \frac{8500}{(1,045)^{3/12}} + \frac{6}{12} \times \frac{1500}{(1,045)^{6/12}} + \frac{9}{12} \times \frac{1500}{(1,045)^{9/12}}}{\frac{8500}{(1,045)^{3/12}} + \frac{1500}{(1,045)^{6/12}} + \frac{1500}{(1,045)^{9/12}}} = 0,3325$$

(b) Per la definizione, si veda il libro di testo.
La funzione ammette vettore gradiente

$$\nabla F(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{bmatrix}$$

I candidati estremanti sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases}$$

ovvero i punti $P = (0,0)$ e $Q = (1,1)$. Poiché la matrice Hessiana, in un generico punto, risulta essere

$$\nabla^2 F(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$$

si ottiene che il punto P non è un estremante, mentre il punto Q risulta essere un punto di minimo locale (forte).

(c)

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -4x + 2y + z = 3 \\ -2x + y + 4z = 4 \\ 10x - 5y - 6z = -10 \end{cases}$$

Il sistema lineare in forma matriciale risulta essere

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 10 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$$

La matrice dei coefficienti ha almeno rango 2, infatti è non singolare la sottomatrice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

le cui orlate sono singolari:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 10 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{C}_1 = 0 \qquad \det \mathbf{C}_2 = 0$$

Pertanto il rango della matrice dei coefficienti è 2. La matrice completa può avere rango 2 o 3. Poiché le ulteriori orlate di $\mathbf{B}$ sono

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 10 & -6 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{C}_3 = 0 \qquad \det \mathbf{C}_4 = 0$$

si ottiene $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2 < n = 3$ quindi il sistema ammette infinite soluzioni (con 1 grado di libertà).