ESERCITAZIONE 6 - LA TEORIA DELLA CRESCITA

ESERCIZIO 1

Considerate un'economia descritta dai seguenti dati:

$Y = K^{\frac{1}{2}}(LE)^{\frac{1}{2}}$

$s = 0.2$

$\delta = 0.02$

$g = 0.03$

a) Calcolate i valori di stato stazionario del capitale, del prodotto e del consumo per lavoro effettivo: $k_0^*; y_0^*; c_0^*$. Trovate inoltre i rispettivi valori di regola aurea: $k_{g0}^*; y_{g0}^*; c_{g0}^*$. Date una rappresentazione grafica dei nuovi valori trovati.

La funzione di produzione deve essere riscritta in termini di prodotto per lavoro effettivo:

$$Y = K^{\frac{1}{2}}(LE)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{Y}{LE} = \frac{K^{\frac{1}{2}}(LE)^{\frac{1}{2}}}{LE} \Rightarrow \frac{Y}{LE} = \frac{K^{\frac{1}{2}}}{(LE)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{Y}{LE} = \left(\frac{K}{LE}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y = k^{\frac{1}{2}}$$

La condizione di stato stazionario è

$s \cdot f(k) = (\delta + g) \cdot k$

che nel nostro esempio diventa

$$0{,}2 \cdot k^{\frac{1}{2}} = (0{,}02 + 0{,}03)k \quad \Rightarrow \quad k^{\frac{1}{2}} = 4 \quad \Rightarrow \quad k_0^* = 16$$

Il valore di y di steady state viene calcolato sostituendo il valore di capitale di steady state nella funzione di produzione

$$y_0^* = f(k_0^*) \quad \Rightarrow \quad y_0^* = (16)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y_0^* = 4$$

Il consumo di steady state è , per definizione, il reddito di steady state – investimenti, quindi

$$c_0^* = y_0^* - s \cdot y_0^* = 4 - 0.2(4) = 3.2$$

Valori di <u>regola aurea</u>: Ricordiamo che il livello di steady state di regola aurea corrisponde al livello di capitale che massimizza il consumo. Il consumo è pari a reddito – investimenti:

$$c = f(k) - i \quad \Rightarrow \quad c = f(k) - s \cdot f(k)$$

che data la condizione di steady state $s \cdot f(k) = (\delta + g) \cdot k$ diventa

$$c = f(k) - (\delta + g) \cdot k$$

La condizione di massimo consumo è

$$\frac{\partial c}{\partial k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(k)}{\partial k} - \frac{\partial((\delta + g) \cdot k)}{\partial k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(k)}{\partial k} = \delta + g$$

In questo esercizio

$$\frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}} = (0{,}02 + 0{,}03) \quad \Rightarrow \quad k^{-\frac{1}{2}} = 0{,}05 \cdot 2 \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{k}} = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{k} = 10 \quad \Rightarrow \quad k_g = 100$$

Per trovare il valore di y e di c che corrispondono al capitale di regola aurea basta sostituire k nelle relative definizioni

$$y_{g,0} = (k_{0g})^{\frac{1}{2}} = (100)^{\frac{1}{2}} = 10$$

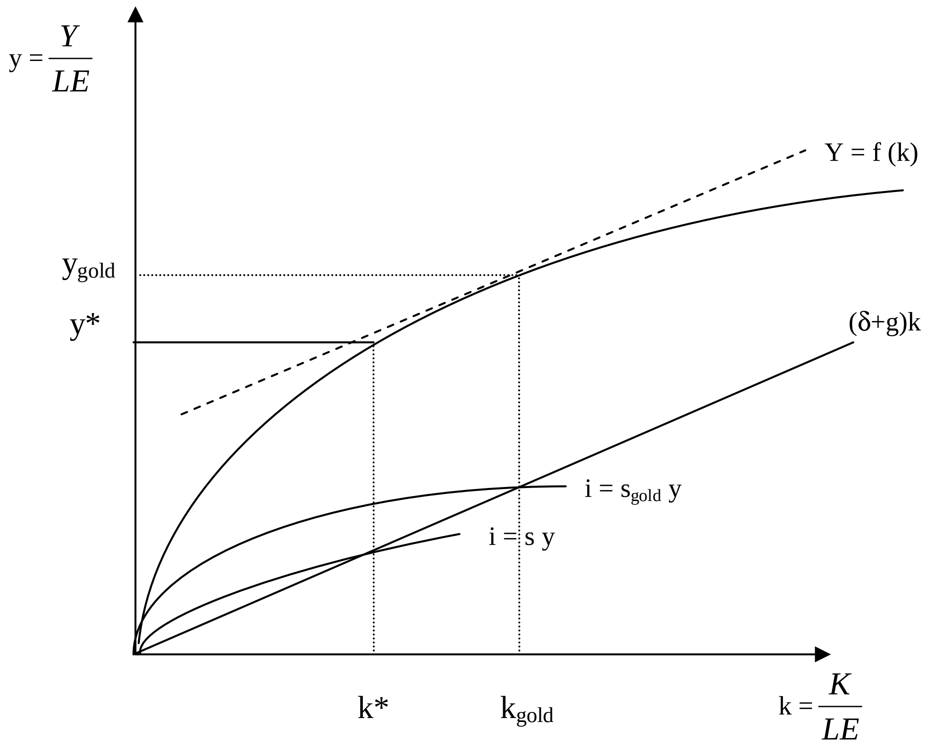
$$c_{g,0} = y_{g,0} - i_{g,0} = y_{g0} - s_{g,0} \cdot f(k_{g0})$$

$s_{g,0}$ è però incognito in quanto il tasso di risparmio che corrisponde al livello di regola aurea non sarà uguale al tasso di risparmio che corrisponde allo stato stazionario iniziale. Per risolvere il problema sfrutto la condizione di stato stazionario $s_{g,0} \cdot f(k_{g0}) = (\delta + g) \cdot k_{g0}$

$$c_{g0} = y_{g0} - (\delta + g) \cdot k_{0g} = 10 - ((0.02 + 0.03) \cdot 100) = 10 - 5 = 5$$

Dato il valore del consumo è possibile anche trovare il tasso di risparmio di regola aurea

$$c_{g,0} = y_{g0} - s_{g,0} \cdot f(k_{g0}) \Rightarrow s_{g,0} \cdot f(k_{g0}) = y_{g0} - c_{g,0} \quad \Rightarrow s_{g,0} = \frac{y_{g0} - c_{g,0}}{f(k_{g0})} = \frac{10-5}{10} = 0.5$$



<u>N.B. Il livello di capitale di regola aurea si trova nel punto in cui è massima la distanza tra la retta del deprezzamento e la funzione di produzione. La massima distanza si ha quando la funzione di produzione e la retta del deprezzamento hanno la stessa pendenza, cioè quando f'(k)=δ+g.</u>

b) Supponete che il progresso tecnico diventi nullo ($g = 0$) mentre $\delta = 0.03$. Calcolate i nuovi valori di stato stazionario del capitale, del prodotto e del consumo per lavoratore: $k_1^*; y_1^*; c_1^*$. Trovare inoltre i rispettivi valori di regola aurea: $k_{g1}^*; y_{g1}^*; c_{g1}^*$. Date una rappresentazione grafica dei nuovi valori trovati.

Per trovare k_1^* devo imporre: $s \cdot f(k) = (\delta') \cdot k$

$$0.2k^{\frac{1}{2}} = (0.03)k \quad \Rightarrow \quad k^{\frac{1}{2}} = 6.6 \quad \Rightarrow \quad k_1^* = 44.4$$

$$y_1 = (k_1)^{\frac{1}{2}} = (44.4)^{\frac{1}{2}} = 6.6$$

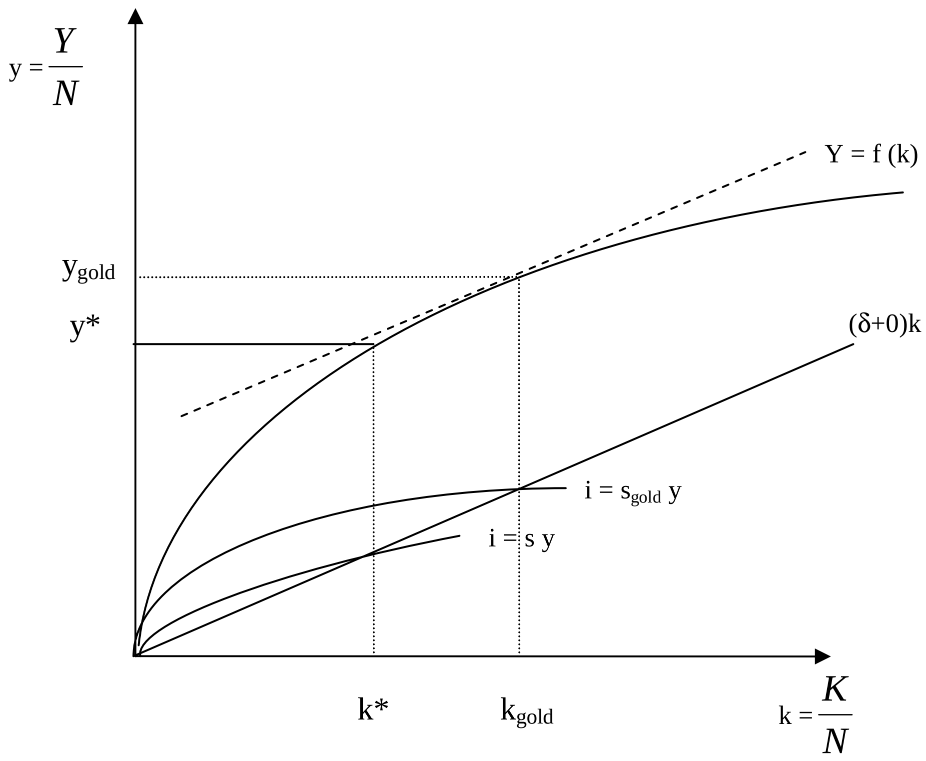
$c_1 = y_1 - s_1 \cdot f(k_1) = 6.6 - 0.2 \cdot 6.6 = 5.3$

Per trovare i valori di regola aurea si deve imporre la condizione di massimizzazione del consumo $\frac{\partial f(k)}{\partial k} = \delta'$

$\frac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}} = 0.03 \;\Rightarrow\; k^{-\frac{1}{2}} = 0.06 \qquad \Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{k}} = 0.06 \qquad \Rightarrow\; \sqrt{k} = 16.7 \Rightarrow\; k = 278.9$

$y_{g,1} = (278{,}9)^{\frac{1}{2}} = 16.7$

$c_{g,1} = y_{g,1} - i_{g,1} = y_{g1} - s_{g,1} \cdot f(k_{g1}) = y_{g1} - (\delta + g) \cdot k_{1g} = 16.7 - 0.03 \cdot 278.9 = 16.7 - 8.4 = 8.3$



<u>N.B. Il livello di capitale di regola aurea si trova nel punto in cui è massima la distanza tra la retta del deprezzamento e la funzione di produzione. La massima distanza si ha quando la funzione di produzione e la retta del deprezzamento hanno la stessa pendenza, cioè quando f'(k)=δ+g. In questo caso dove g=0 si ha che la retta del deprezzamento è meno inclinata (coefficiente angolare minore, pari a d=0.03) rispetto al caso del punto a).</u>

ESERCIZIO 2

Considerate un'economia descritta dai seguenti dati:

$Y = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$

$\delta = 0.02$

a) Calcolate la propensione al risparmio "s" che garantisce che il capitale per lavoratore di stato stazionario (K*) sia uguale al capitale per lavoratore di regola aurea (Kg): $K^* = K_g$. Date una rappresentazione grafica dei nuovi valori trovati.

La funzione di produzione può essere riscritta come segue:

$$Y=K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{Y}{L}=\frac{K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}}{L} \Rightarrow \frac{Y}{L}=\frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{Y}{L}=\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y=k^{\frac{1}{2}}$$

Notate come l'incognita dell'esercizio sia "s". La condizione che definisce il problema è $k = k_g$
Ricordiamo che il livello di steady state di regola aurea corrisponde al livello di capitale che massimizza il consumo. Il consumo è pari a reddito – investimenti:

$$c = f(k) - i \quad \Rightarrow \quad c = f(k) - s \cdot f(k)$$

ma in steady state

$$s \cdot f(k) = \delta \cdot k \Rightarrow \quad c = f(k) - \delta \cdot k$$

La condizione che corrisponde al massimo consumo è

$$\frac{\partial c}{\partial k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(k)}{\partial k} - \frac{\partial(\delta \cdot k)}{\partial k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(k)}{\partial k} = \delta$$

Sostituendo i valori dati dal problema:

$$\frac{\partial k^{\frac{1}{2}}}{\partial k} = \delta \Rightarrow \frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}} = 0.02 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{k}} = 0.02 \Rightarrow \sqrt{k} = 0.04 \Rightarrow \sqrt{k} = 25 \Rightarrow k_g = 625$$

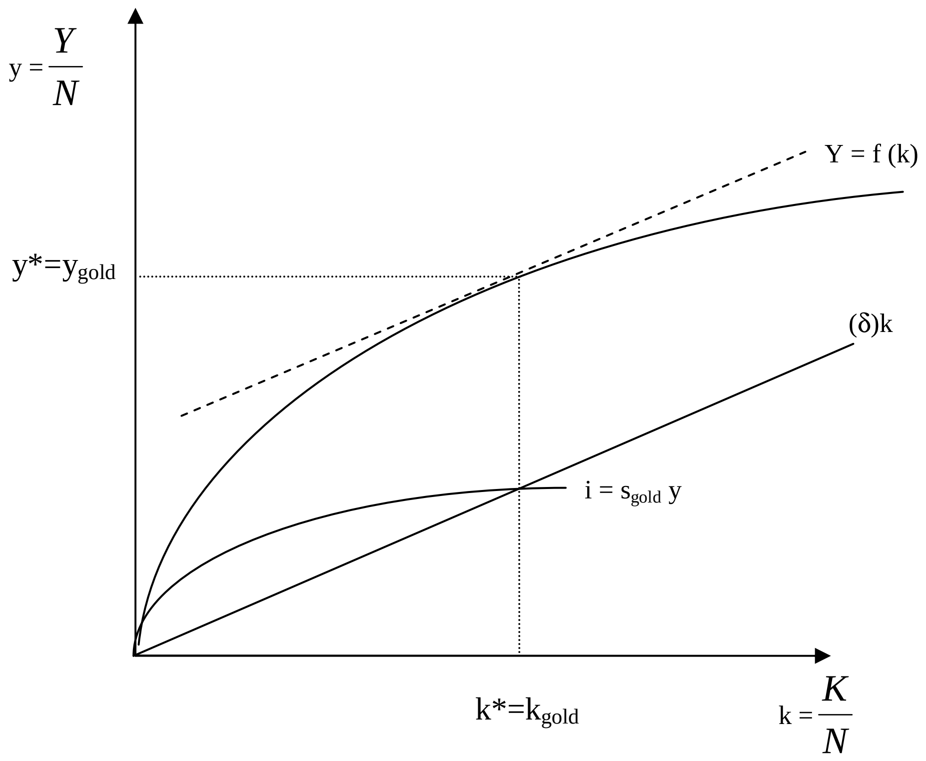
Per calcolare la propensione al risparmio devo guardare alla condizione di steady-state

$$s \cdot f(k) = \delta \cdot k \quad \Rightarrow \quad s \cdot k^{\frac{1}{2}} = 0.02 \cdot k \quad \Rightarrow \quad s = 0.02 \cdot k^{\frac{1}{2}}$$

sostituendo $k = k_g = 625$

$$s = 0.02 \cdot 625^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad s = 0.02 \cdot 25 = 0.5$$

Rappresentazione grafica

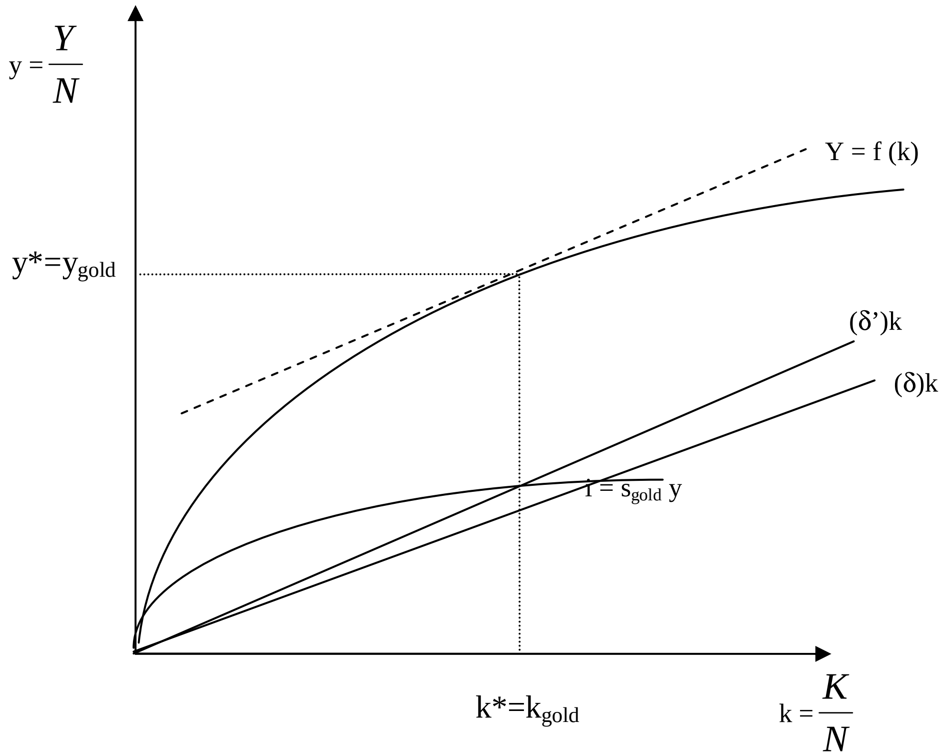


N.B. Il livello di capitale di regola aurea si trova nel punto in cui è massima la distanza tra la retta del deprezzamento e la funzione di produzione. La massima distanza si ha quando la funzione di produzione e la retta del deprezzamento hanno la stessa pendenza, cioè quando $f'(k)=\delta+g$.

b) Consideriamo che l'ammortamento vari ($\delta = 0.05$) mentre s rimanga $s = \tilde{s}$. Calcolate i nuovi valori di stato stazionario del capitale e del prodotto per lavoratore: $K_1^*;Y_1^*$. Date una rappresentazione grafica dei nuovi valori trovati. (Nota: s = pms)

Per trovare k_1^* devo imporre: $s \cdot f(k) = \delta \cdot k \Rightarrow 0.5k^{\frac{1}{2}} = 0.05k \Rightarrow k^{\frac{1}{2}} = 10 \Rightarrow k_1^* = 100$

Per trovare y_1^* devo imporre: $y_1^* = f(k_1^*) \Rightarrow y_1^* = (k_1^*)^{\frac{1}{2}} = 10$



ESERCIZIO 3

Considerate un'economia <u>senza progresso tecnologico</u> descritta dalle seguenti equazioni:

$$Y = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}}$$

propensione marginale al risparmio =PMS = s = 0,375

tasso di ammortamento = δ = d = 0,025

a) Calcolate i valori di <u>stato stazionario</u> del capitale procapite (k = K/L) e del reddito pro capite (y = Y/L) e rappresentate graficamente l'equilibrio.

La funzione di produzione può essere riscritta come segue:

$$Y = K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{Y}{L} = \frac{K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}}{L} \Rightarrow \frac{Y}{L} = \frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{Y}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \quad y = k^{\frac{1}{2}}$$

La condizione di stato stazionario è

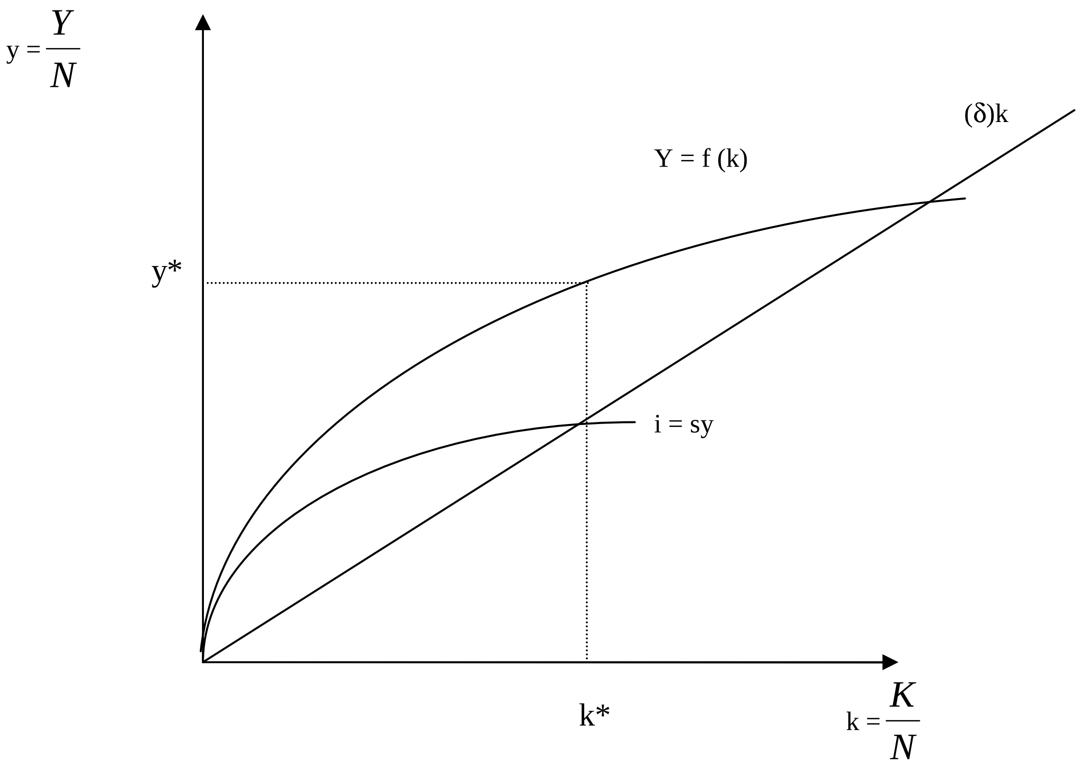
$s \cdot f(k) = (\delta) \cdot k$

che nel nostro esempio diventa

$$0{,}375 \cdot k^{\frac{1}{2}} = (0{,}025)k \quad \Rightarrow \quad k^{\frac{1}{2}} = 15 \Rightarrow \quad k_0^* = 225$$

Il valore di y di steady state è calcolato sostituendo il valore di capitale di steady state nella funzione di produzione

$$y_0^* = f(k_0^*) \quad \Rightarrow \quad y_0^* = (225)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y_0^* = 15$$



b) Calcolate i rispettivi valori di <u>regola aurea</u> e ricavate la corrispondente propensione marginale al risparmio, fornendo una rappresentazione grafica del nuovo equilibrio di regola aurea (in un nuovo grafico).

La condizione di massimo consumo è

$$\frac{\partial c}{\partial k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(k)}{\partial k} - \frac{\partial((\delta)\cdot k)}{\partial k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(k)}{\partial k} = \delta$$

In questo esercizio

$$\frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}} = 0{,}025 \quad \Rightarrow \quad k^{-\frac{1}{2}} = 0{,}025 \cdot 2 \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{k}} = 0{,}05 \Rightarrow \quad \sqrt{k} = 20 \Rightarrow \quad k_g = 400$$

Per trovare il valore di y di regola aurea basta sostituire k_{gold} nella funzione di produzione:

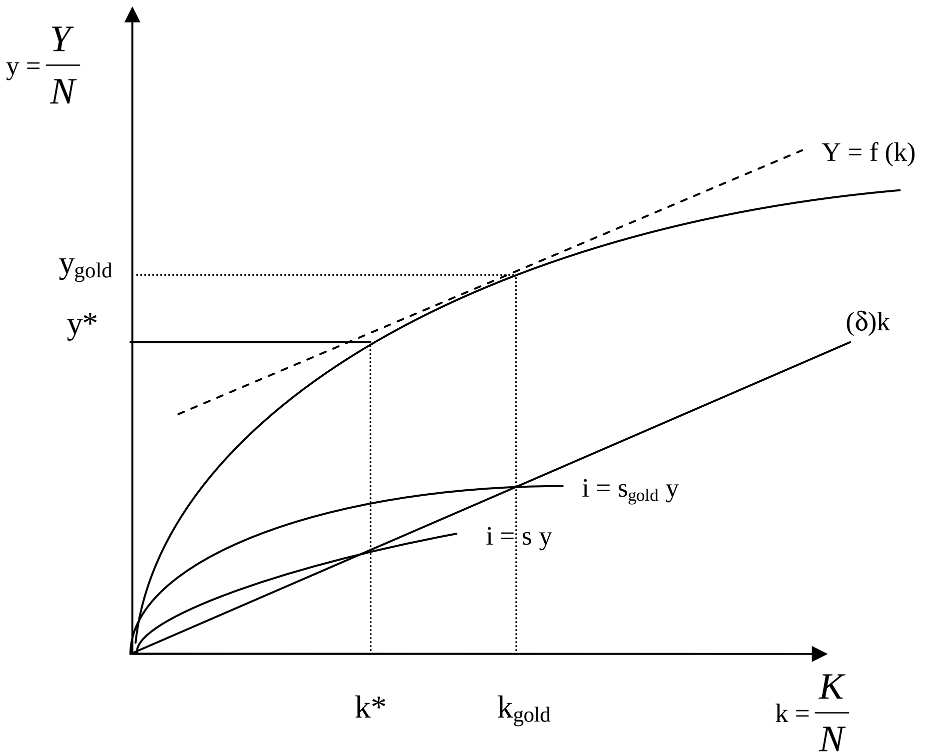
$$y_{g,0} = (k_{0g})^{\frac{1}{2}} = (400)^{\frac{1}{2}} = 20$$

Per calcolare la propensione al risparmio devo guardare alla condizione di steady-state di regola aurea

$$s \cdot f(k_{gold}) = \delta \cdot k_{gold} \quad \Rightarrow \quad s \cdot k^{\frac{1}{2}} = 0.025 \cdot k \quad \Rightarrow \quad s = 0.025 \cdot k^{\frac{1}{2}}$$

sostituendo $k = k_g = 400$

$$s = 0.025 \cdot 400^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad s_{gold} = 0.025 \cdot 20 = 0.5$$

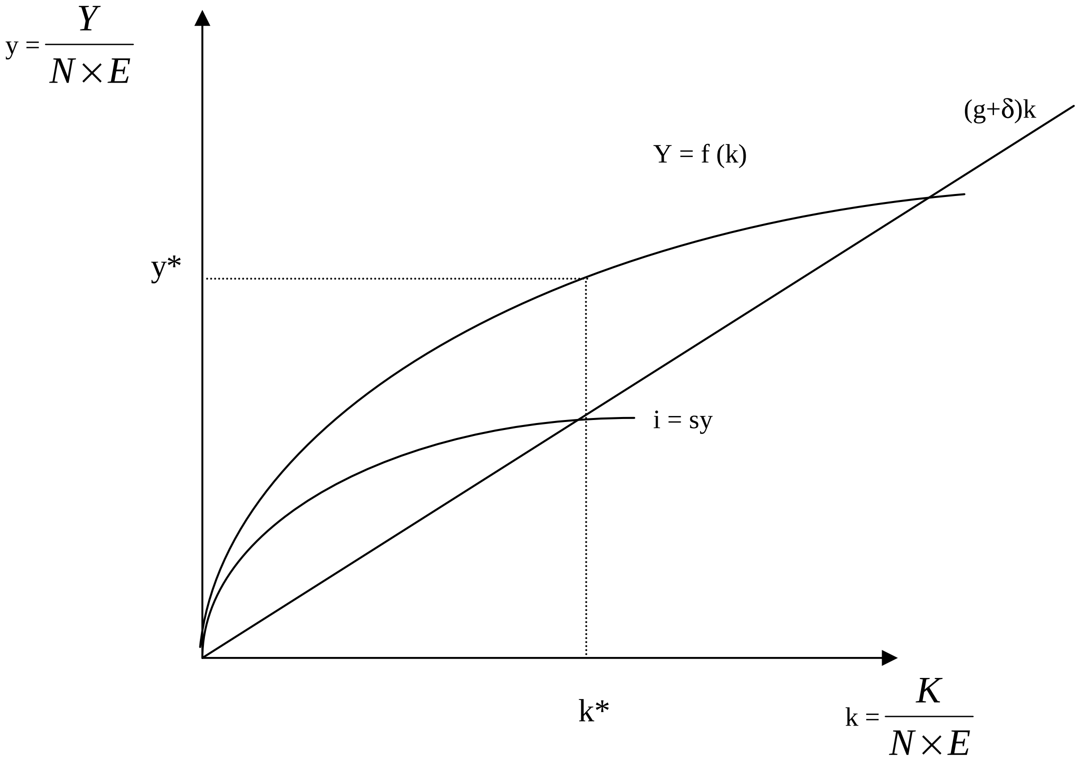


c) Spiegate economicamente e descrivete graficamente come evolvono y, i e c quando il sistema passa dall' equilibrio di stato stazionario a quello di regola aurea**.**

La propensione al risparmio (s)↑ a y* e quindi i = sy↑>amm, mentre c* diminuisce; Δk>0; k↑; y↑ fino a quando k* = k_{gold}.

Graficamente l'evoluzione nel tempo di y* ed i mostra un graduale aumento nel tempo fino a raggiungere il nuovo più elevato valore di regola aurea. Per contro l'evoluzione nel tempo di c* mostra una iniziale riduzione per poi aumentare nel tempo fino al nuovo più alto valore di regola aurea.

d) Supponiamo ora che il governo adotti misure che portano il progresso tecnologico da un livello zero ad un tasso di crescita positivo pari a g. Rappresentate graficamente il nuovo equilibrio di stato stazionario con progresso tecnologico.



e) Spiegate se e perché esiste crescita (procapite e totale) permanente in questo nuovo equilibrio di stato stazionario.

Nella situazione di stato stazionario ora abbiamo che il progresso tecnologico genera una crescita economica permanente, sia procapite che totale.
Infatti:

$$\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{N}} = y \times E$$

$$\mathrm{Y} = \mathrm{y} \times \mathrm{E} \times \mathrm{N} \quad \Rightarrow \frac{\dot{Y}}{N} = \dot{y} + \dot{E} = 0 + g = g > 0 \text{ e } \dot{Y} = \dot{y} + \dot{E} + \dot{N} = 0 + g + 0 = g > 0$$

dove y ed N sono costanti, mentre E cresce ad un tasso costante g a causa del progresso tecnologico.

Ne consegue che il livello assoluto e pro capite della produzione crescono nello stato stazionario ad un tasso costante g determinato dal progresso tecnologico.

Il progresso tecnologico è pertanto l'unico fattore in grado di assicurare una crescita economica permanente.

Nella situazione di stato stazionario ora abbiamo che il progresso tecnologico genera una permanente crescita economica.
Infatti:

$$\frac{K}{N} = k \times E \text{ e } \mathrm{K} = k \times E \times N$$

$$\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{N}} = y \times E \text{ e } \mathrm{Y} = \mathrm{y} \times \mathrm{E} \times \mathrm{N}$$

dove K, Y ed N sono costanti, mentre E cresce ad un tasso costante g a causa del progresso tecnologico. Ne consegue che il livello assoluto e pro capite della produzione (e del capitale) crescono nello stato stazionario ad un tasso costante g determinato dal progresso tecnologico.
Il progresso tecnologico è pertanto l'unico fattore in grado di assicurare una crescita economica permanente.