LIUC

School of Economics and Management

Matematica per Economia Finanza e Management

A86001/02 – a.a. 2013/14

MATEMATICA per ECONOMIA, FINANZA e MANAGEMENT

Correttore	Voto

Esercizio	1				2				3		
Voto											

Sessione invernale
Primo appello – A

13 gen. 2015 – S1/01

Cognome ______________________________

Nome ______________________________

Matricola ______________________________

Anno di corso ______________________________

Classe: S H

A86001
A86002

Le risposte devono essere scritte unicamente sui fogli allegati. Motivare sempre i risultati ottenuti.
Compilare la prima facciata con i propri dati.
E' vietato l'uso di qualsiasi dispositivo elettronico che possa essere connesso con altri apparecchi. Il semplice possesso di tali dispositivi, anche se spenti, comporta l'annullamento della prova e sanzioni disciplinari.
I primi due esercizi sono comuni per tutti gli studenti. Risolvere il terzo esercizio relativo alla propria classe. Non saranno attribuiti punti per esercizi aggiuntivi risolti.

Primo appello 13 gennaio 2015 (Mod. A)

1. Risolvere i seguenti esercizi.

a. (2 pt) Determinare il rango della matrice $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$

b. (3 pt) Dopo aver tracciato, *per via elementare*, il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{per} \quad -1 < x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{per} \quad 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

si dica, motivando la risposta, se essa sia o meno invertibile e se ne individuino i punti di massimo e minimo globali e/o locali.

c. (3 pt) Determinare i punti stazionari della funzione $F(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + 3x + 2y - 3$.

d. (3 pt) Una impresa artigiana sostiene un costo di $1.000,00$ € per produrre 10 frigoriferi. Sapendo che il costo marginale della produzione è espresso dalla funzione $c(q) = 10 + q - \dfrac{3750}{(q+5)^2}$, determinare la funzione di costo totale.

2. Una azienda stima che un nuovo impianto produttivo del costo di 100.000, 00 € produrrà i seguenti flussi di cassa positivi nei prossimi 5 esercizi:

tempo (anni)	1	2	3	4	5
flusso (€)	5.500	11.000	50.000	60.000	20.000

Per sostenere il progetto, è necessario un finanziamento di 40.000, 00 €, da rimborsare nei 5 anni successivi con rate annue posticipate al tasso $j = 8,90\%$ annuo effettivo. Le quote di capitale del rimborso sono determinate secondo lo schema

anno	1	2	3	4	5
quota di capitale	12.000	12.000	6.000	5.000	5.000

a. (2 pt) Calcolare il valore attuale netto dell'investimento al costo opportunità dei mezzi propri $i = 11,50\%$

b. (4 pt) Costruire il piano di ammortamento del finanziamento descritto.

c. (2 pt) Calcolare l'APV della politica finanziaria (investimento più finanziamento) al costo opportunità $i = 11,50\%$

d. (3 pt) Enunciare la definizione di legge finanziaria scindibile in due variabili.

3. (standard) Risolvere i seguenti quesiti.

   a. (6 pt) Data la funzione:

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

      1. determinarne il dominio ed il segno;
      2. calcolare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti orizzontali e verticali;
      3. studiarne la monotonia evidenziando gli eventuali estremanti (punti di massimo o di minimo almeno locali);
      4. studiarne la convessità, evidenziando eventuali flessi, e tracciare un grafico qualitativo.

   b. (3 pt) Il contratto di affitto di un capannone prevede che una quota costante R del canone sia capitalizzata in regime composto al tasso annuo effettivo $i = 4,50\%$ per maturare un montante che sarà riconosciuto in caso di acquisto dell'immobile da parte del conduttore. Il contratto ha durata 4 anni ed il canone è semestrale e posticipato. Determinare l'importo di R affinché il montante alla scadenza del contratto sia pari a $350.000,00$ €.

   c. (2 pt) Due effetti di importo 2.000 € e scadenza tra 30 e 60 giorni rispettivamente sono presentati allo sconto. Determinare l'importo incassato nell'operazione effettuata a sconto commerciale con un tasso $d = 3,40\%$ e con la convenzione dell'anno commerciale.

3. (challenge) Risolvere i seguenti quesiti:

   a. (2 pt) Un investimento prevede i flussi di cassa

tempo (mesi)	0	1	2	3	4
flussi di cassa (€)	−100.000	20.000	20.000	30.000	50.000

   Calcolare la Duration con un tasso annuo composto $i = 4,5\%$.

   b. (5 pt) Data la funzione

$$F(x,y) = e^{y}(y-1)(x-2) - x^{2} + 4x$$

   1. Determinare il gradiente di F e gli eventuali punti stazionari;
   2. Determinare, attraverso la matrice Hessiana, gli eventuali estremanti.

   c. (4 pt) Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & k & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ -1 \end{bmatrix}$.

   1. Verificare che $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{9}{5} & 1 & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$ è la matrice inversa di $\mathbf{A}$.
   2. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni del sistema lineare

$$(\mathbf{ACB})\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

School of
Economics and Management

Matematica per Economia Finanza e Management

A86001/02 – a.a. 2013/14
MATEMATICA per ECONOMIA, FINANZA e MANAGEMENT

Correttore	Voto

Esercizio	1	2	3
Voto			

Sessione invernale
Primo appello – B

13 gen. 2015 – S1/01

Cognome ______________________________

Nome ______________________________

Matricola ______________________________

Anno di corso ______________________________

Classe: S H

A86001
A86002

Le risposte devono essere scritte unicamente sui fogli allegati. Motivare sempre i risultati ottenuti.
Compilare la prima facciata con i propri dati.
E' vietato l'uso di qualsiasi dispositivo elettronico che possa essere connesso con altri apparecchi. Il semplice possesso di tali dispositivi, anche se spenti, comporta l'annullamento della prova e sanzioni disciplinari.
I primi due esercizi sono comuni per tutti gli studenti. Risolvere il terzo esercizio relativo alla propria classe. Non saranno attribuiti punti per esercizi aggiuntivi risolti.

1. Risolvere i seguenti esercizi.

a. (2 pt) Determinare il rango della matrice $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

b. (3 pt) Dopo aver tracciato, *per via elementare*, il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{per} \quad -2 \le x < 0 \\ \ln(x+1) & \text{per} \quad 0 \le x < 1 \end{cases}$$

si dica, motivando la risposta, se essa sia o meno invertibile e se ne individuino i punti di massimo e minimo globali e/o locali.

c. (3 pt) Determinare i punti stazionari della funzione $F(x, y) = x^2 + 6xy - y^2 + x - 2y + 4$.

d. (3 pt) Una impresa artigiana sostiene un costo di $2.000,00$ € per produrre 15 frigoriferi. Sapendo che il costo marginale della produzione è espresso dalla funzione $c(q) = 5 + 2q - \dfrac{3000}{(q+5)^2}$, determinare la funzione di costo totale.

2. Una azienda stima che un nuovo impianto produttivo del costo di 150.000, 00 € produrrà i seguenti flussi di cassa positivi nei prossimi 5 esercizi:

tempo (anni)	1	2	3	4	5
flusso (€)	10.500	31.000	70.000	80.000	24.000

Per sostenere il progetto, è necessario un finanziamento di 50.000, 00 €, da rimborsare nei 5 anni successivi con rate annue posticipate al tasso $j = 8,90\%$ annuo effettivo. Le quote di capitale del rimborso sono determinate secondo lo schema

anno	1	2	3	4	5
quota di capitale	12.000	12.000	16.000	5.000	5.000

a. (2 pt) Calcolare il valore attuale netto dell'investimento al costo opportunità dei mezzi propri $i = 11,50\%$

b. (4 pt) Costruire il piano di ammortamento del finanziamento descritto.

c. (2 pt) Calcolare l'APV della politica finanziaria (investimento più finanziamento) al costo opportunità $i = 11,50\%$

d. (3 pt) Enunciare la definizione di legge finanziaria scindibile in due variabili.

3. (standard) Risolvere i seguenti quesiti.

   a. (6 pt) Data la funzione:
   $$f(x) = -\frac{e^x}{2x}$$
      1. determinarne il dominio ed il segno;
      2. calcolare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti orizzontali e verticali;
      3. studiarne la monotonia evidenziando gli eventuali estremanti (punti di massimo o di minimo almeno locali);
      4. studiarne la convessità, evidenziando eventuali flessi, e tracciare un grafico qualitativo.

   b. (3 pt) Il contratto di affitto di un capannone prevede che una quota costante R del canone sia capitalizzata in regime composto al tasso annuo effettivo $i = 3,80\%$ per maturare un montante che sarà riconosciuto in caso di acquisto dell'immobile da parte del conduttore. Il contratto ha durata 4 anni ed il canone è semestrale e posticipato. Determinare l'importo di R affinché il montante alla scadenza del contratto sia pari a $400.000,00$ €.

   c. (2 pt) Due effetti di importo 1.500 € e scadenza tra 60 e 90 giorni rispettivamente sono presentati allo sconto. Determinare l'importo incassato nell'operazione effettuata a sconto commerciale con un tasso $d = 2,80\%$ e con la convenzione dell'anno civile.

3. (challenge) Risolvere i seguenti quesiti:

   a. (2 pt) Un investimento prevede i flussi di cassa

tempo (mesi)	0	1	2	3	4
flussi di cassa (€)	−100.000	20.000	20.000	30.000	50.000

   Calcolare la Duration con un tasso annuo composto $i = 4,5\%$.

   b. (5 pt) Data la funzione

$$F(x, y) = e^y (y - 1)(x - 2) - x^2 + 4x$$

   1. Determinare il gradiente di F e gli eventuali punti stazionari;
   2. Determinare, attraverso la matrice Hessiana, gli eventuali estremanti.

   c. (4 pt) Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & k & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ -1 \end{bmatrix}$.

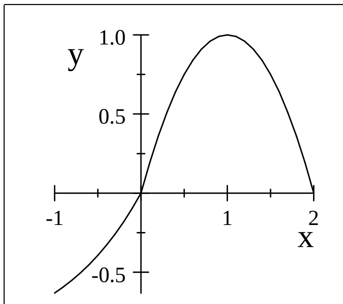
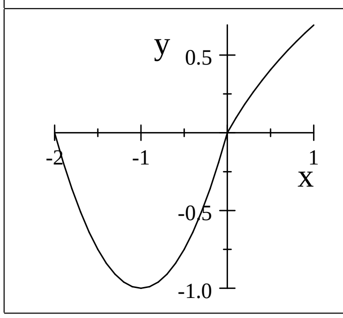
   1. Verificare che $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{9}{5} & 1 & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$ è la matrice inversa di $\mathbf{A}$.
   2. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni del sistema lineare

$$(\mathbf{ACB})\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

1.

(a) Il determinante della matrice è 0 e tutti i minori di ordine 2 sono nulli, quindi il $r(\mathbf{M}) = 1$.

(b) Il grafico qualitativo della funzione risulta

	mod. A
	mod. B

Pertanto la funzione risulta essere non invertibile e presenta un punto di

massimo	mod. A
minimo	mod. B

globale in $x =$

1	mod. A
-1	mod. B

.

(c) Il gradiente della funzione è

$\nabla F(x, y) =$

$\begin{bmatrix} 2x+3y+3 & 3x+2y+2 \end{bmatrix}$	mod. A
$\begin{bmatrix} 2x+6y+1 & 6x-2y-2 \end{bmatrix}$	mod. B

il punto stazionario è la soluzione del sistema

$\begin{cases} 2x+3y+3=0 \\ 3x+2y+2=0 \end{cases}$	mod. A
$\begin{cases} 2x+6y+1=0 \\ 6x-2y-2=0 \end{cases}$	mod. B

ovvero il punto $P =$

$(0, -1)$	mod. A
$\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$	mod. B

.

(d) La funzione di costo è una primitiva della funzione di costo marginale, pertanto

$$C(q) = \begin{array}{|l|l|} \hline \int \left(10 + q - \frac{3750}{(q+5)^2}\right) dq = 10q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{3750}{q+5} + K & \text{mod. A} \\ \hline \int \left(5 + 2q - \frac{3000}{(q+5)^2}\right) dq = 5q + q^2 + \frac{3000}{q+5} + K & \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$$

dovendo essere $\begin{array}{|l|l|} \hline C(10) = 1000 & \text{mod. A} \\ \hline C(15) = 2000 & \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$ si può determinare il valore della costante K, ottenendo

$$C(q) = \begin{array}{|l|l|} \hline 10q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{3750}{q+5} + 600 & \text{mod. A} \\ \hline 5q + q^2 + \frac{3000}{q+5} + 1550 & \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$$

2.

(a) Il valore attuale netto dell'operazione finanziaria è

$$NPV = \begin{array}{|l|l|} \hline -100.000 + \dfrac{5.500}{1+i} + \dfrac{11.000}{(1+i)^2} + \dfrac{50.000}{(1+i)^3} + \dfrac{60.000}{(1+i)^4} + \dfrac{20.000}{(1+i)^5} & \text{mod. A} \\ \hline -150.000 + \dfrac{10.500}{1+i} + \dfrac{31.000}{(1+i)^2} + \dfrac{70.000}{(1+i)^3} + \dfrac{80.000}{(1+i)^4} + \dfrac{24.000}{(1+i)^5} & \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$$

e quindi $NPV = \begin{array}{|l|l|} \hline € \ 275,576 & \text{mod. A} \\ \hline € \ 535,993 & \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$

(b) Nota la quota di capitale, è possibile determinare la sequenza dei debiti residui e quindi delle quote di interesse e, finalmente, delle rate.

mod. A

t	C	I	R	D
0				40.000
1	12.000	3.560	15.560	28.000
2	12.000	2.492	14.492	16.000
3	6.000	1.424	7.424	10.000
4	5.000	890	5.890	5.000
5	5.000	445	5.445	0

mod. B

t	C	I	R	D
0				50.000
1	12.000	4.450	16.450	38.000
2	12.000	3.382	15.382	26.000
3	16.000	2.314	18.314	10.000
4	5.000	890	5.890	5.000
5	5.000	445	5.445	0

(c) I flussi di cassa netti sono

mod. A

epoca	0	1	2	3	4	5
flusso	−60.000	−22.500	−5.000	40.000	55.000	20.000

mod. B

epoca	0	1	2	3	4	5
flusso	−100.000	−27.500	5.000	60.000	75.000	24.000

Pertanto risulta

$$APV = \begin{array}{|l|c|}\hline -60.000 - \dfrac{22.500}{1+i} - \dfrac{5.000}{(1+i)^2} + \dfrac{40.000}{(1+i)^3} + \dfrac{55.000}{(1+i)^4} + \dfrac{20.000}{(1+i)^5} & \text{mod. A} \\ \hline -100.000 - \dfrac{27.500}{1+i} + \dfrac{5.000}{(1+i)^2} + \dfrac{60.000}{(1+i)^3} + \dfrac{75.000}{(1+i)^4} + \dfrac{24.000}{(1+i)^5} & \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$$

e quindi $APV = \begin{array}{|c|c|}\hline -8.155,246 \text{ €} & \text{mod. A} \\ \hline -14.907,035 \text{ €} & \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$

(d) Si veda il libro di testo.

3. (standard)

(a)

1. Il domino della funzione è $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Inoltre la funzione risulta positiva per $\begin{array}{|c|c|}\hline x > 0 & \text{mod. A} \\ \hline x < 0 & \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$.
2. Agli estremi del dominio si ottengono i limiti

$$\begin{array}{|ll|c|}\hline \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^- & y = 0 \text{ è asintoto orizzontale} & \\ \lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty & x = 0 \text{ è asintoto verticale} & \text{mod. A} \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty & y = 0 \text{ è asintoto orizzontale} & \\ \hline \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+ & y = 0 \text{ è asintoto orizzontale} & \\ \lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \mp\infty & x = 0 \text{ è asintoto verticale} & \text{mod. B} \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty & y = 0 \text{ è asintoto orizzontale} & \\ \hline \end{array}$$

3. La funzione risulta derivabile nel proprio dominio, infatti

$$f'(x) = \begin{array}{|c|c|}\hline \dfrac{e^x(x-1)}{x^2} & \text{mod. A} \\ \hline \dfrac{e^x(1-x)}{2x^2} & \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$$

e $\mathtt{dom} f' = A$. Inoltre la funzione ammette un unico punto stazionario in $x^* = 1$. La monotonia della funzione può essere studiata attraverso il segno della derivata prima (sia $e^x > 0$ sia $x^2 > 0$ per ogni $x \in A$):

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1]$	$[1, +\infty)$	
$x - 1$	$-$	$-$	$+$	mod. A
f'	$-$	$-$	$+$	
f	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
	$(-\infty, 0)$	$(0, 1]$	$[1, +\infty)$	
$1 - x$	$+$	$+$	$-$	mod. B
f'	$+$	$+$	$-$	
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

Pertanto il punto $x^* = 1$ è di $\begin{array}{|c|c|}\hline \text{minimo} & \text{mod. A} \\ \hline \text{massimo} & \text{mod. B} \\ \hline \end{array}$ almeno locale.

4. La funzione risulta derivabile due volte nel proprio dominio, infatti

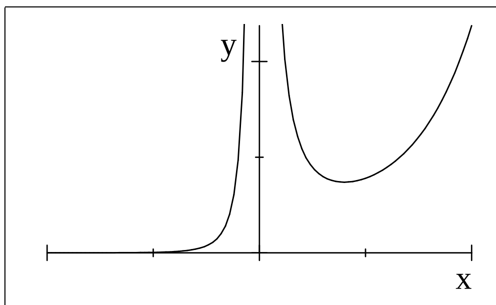
$f''(x) =$	$\dfrac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$	mod. A
	$\dfrac{e^x(-x^2+2x-2)}{2x^3}$	mod. B

e $\mathtt{dom}f'' = A$. La convessità della funzione può essere studiata attraverso il segno della derivata seconda. Poiché

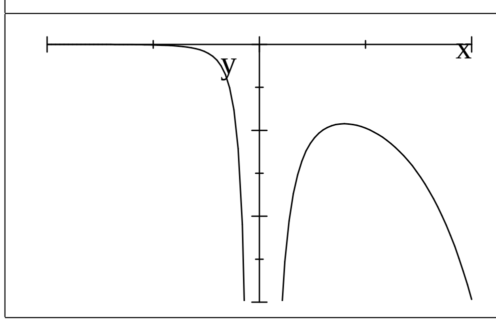
	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$	
x^2-2x+2	$+$	$+$	mod. A
x^3	$-$	$+$	
f''	$-$	$+$	
f	concava	convessa	

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$	
$-x^2+2x-2$	$-$	$-$	mod. B
x^3	$-$	$+$	
f''	$+$	$-$	
f	convessa	concava	

Un grafico qualitativo della funzione è



mod. A



mod. B

(b) Deve risultare

$350.000 = R \times \frac{(1+i_2)^8-1}{i_2}$	mod. A
$400.000 = R \times \frac{(1+i_2)^8-1}{i_2}$	mod. B

dove $i_2 = (1+i)^{1/2} - 1$. Pertanto si ricava $R =$

€ $25.767,029$	mod. A
€ $30.021,788$	mod. B

.

(c) Il valore attuale incassato è $A = N_1 \times (1 - dt_1) + N_2 \times (1 - dt_2) =$

$3.983,00$	mod. A
$2.982,74$	mod. B

€.

3. (challenge)

(a) Risulta

$$D=\frac{\frac{1}{12}\times\frac{20.000}{(1{,}045)^{1/12}}+\frac{2}{12}\times\frac{20.000}{(1{,}045)^{2/12}}+\frac{3}{12}\times\frac{30.000}{(1{,}045)^{3/12}}+\frac{4}{12}\times\frac{50.000}{(1{,}045)^{4/12}}}{\frac{20.000}{(1{,}045)^{1/12}}+\frac{20.000}{(1{,}045)^{2/12}}+\frac{30.000}{(1{,}045)^{3/12}}+\frac{50.000}{(1{,}045)^{4/12}}}=0,24343509 \text{ anni}$$

(b)

1. Il gradiente risulta essere

$$\nabla F(x,y)=\begin{bmatrix} e^{y}(y-1)-2x+4 \\ e^{y}(x-2)+e^{y}(x-2)(y-1)\end{bmatrix}$$

i punti stazionari sono quindi le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} e^{y}(y-1)-2x+4=0 \\ e^{y}(x-2)y=0\end{cases}$$

$P_1=(2;1)$ e $P_2=\left(\frac{3}{2};0\right)$

2. La matrice Hessiana risulta essere

$$\nabla^2 F(x,y)=\begin{bmatrix} -2 & e^{y}+e^{y}(y-1) \\ e^{y}+e^{y}(y-1) & 2e^{y}(x-2)+e^{y}(x-2)(y-1)\end{bmatrix}$$

che, calcolata in P_1 risulta

$$\nabla^2 F(2,1)=\begin{bmatrix} -2 & e \\ e & 0\end{bmatrix}$$

e quindi, poiché $H_1=-2<0$ e $H_2=-e^2<0$, il punto non è un estremante.
In P_2 si ottiene

$$\nabla^2 F\left(\frac{3}{2},0\right)=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

e quindi, poiché $H_1=-2<0$ e $H_2=-\frac{1}{2}<0$, il punto non è un estremante.

(c)

1. Poiché $\mathbf{AC}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{9}{5} & 1 & \frac{7}{10}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=\mathbf{A}^{-1}$.

2. Per quanto verificato al punto precedente, si ha $(\mathbf{AC})\,\mathbf{B}=\mathbf{IB}=\mathbf{B}$. La matrice dei coefficienti ha rango almeno 2 essendo non singolare la sottomatrice $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1\end{bmatrix}$. Inoltre $\det\mathbf{B}=3(k-1)$, nullo per $k=1$. Quindi per $k\neq 1$ il sistema è di Cramer e quindi possibile e determinato (unica soluzione). Per $k=1$, la matrice completa è

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b})=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

con rango almeno 2. Poiché

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

anche la matrice completa ha rango 2 e, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette infinite soluzioni (con un grado di libertà).