L.I.U.C. School of Economics and Management

Seconda prova parziale (Mod. A) 09 giugno 2015

1. Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (3 pt) Una azienda sottoscrive un contratto di leasing con scadenza tra tre anni per un bene il cui prezzo è $A = 18.000,00$ €. Il contratto precede un anticipo B pari al 20% del valore del bene e due canoni annui posticipati di pari importo C. Alla chiusura del contratto, dopo tre anni, è previsto il versamento del premio di estinzione E in misura del 3% del valore del bene. Il tasso annuo composto del contratto è $i = 12\%$.

1. Calcolare l'importo del canone C.
2. Il contratto prevede spese fisse di istruttoria pari 250 €, da corrispondere alla sottoscrizione, spese di incasso in misura del 2% di C, corrisposte assieme al canone e commissioni di chiusura fisse di 60 € da pagare dopo 3 anni, assieme al premio di estinzione. Si dica se il TAEG del contratto supera il 15%.

b. (3 pt) Una legge finanziaria $f(t)$ in una variabile prevede intensità istantanea d'interesse

$$\rho(t) = 0,05 + \frac{0,01}{1+t}$$

1. Determinare il tasso d'interesse annuo composto finanziariamente equivalente ad un impiego nell'intervallo $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ con la legge f.
2. Dire, motivando, se la legge finanziaria f sia scindibile.

c. (2 pt) Un debito di importo $S = 150.000,00$ è ammortizzato alla francese in 20 anni, con rata mensile e TAN $4,80\%$.

1. Calcolare l'importo della rata;
2. Scomporre la prima rata in quota di capitale e quota di interesse.

Soluzione:

a.

i. La condizione di chiusura è

$$A = B + \frac{C}{1+i} + \frac{C}{(1+i)^2} + \frac{E}{(1+i)^3}$$

In base ai dati disponibili si ricava $C =$ € $8.293,027$.

ii. E' sufficiente calcolare il NPV del finanziamento al tasso soglia proposta

$$NPV(15\%) = A - B - 250 - \frac{C \times 1,02}{1+15\%} - \frac{C \times 1,02}{(1+15\%)^2} - \frac{E+60}{(1+15\%)^3}$$

Poiché risulta $NPV(15\%) =$ € $3,80 > 0$, il TAEG non supera la soglia.

b.

i. Occorre uguagliare

$$f(3/2) = (1+i)^{3/2}$$

e ricavare i. Poiché

$$f(t) = e^{\int_0^t \rho(s)ds} = e^{0,05t+\ln(1+t)^{0,01}} = (1+t)^{0,01} e^{0,05t}$$

si ottiene

$$i = 5,771\%$$

ii. Poiché è una legge finanziaria in una variabile, è scindibile se e solo se $\rho(t) = k$ (costante). Quindi NON è scindibile.

c.

i. Il tasso mensile è $i_{12} = \frac{TAN}{12}$ e le rate sono 240. Quindi

$$R = S \times \frac{i_{12}}{1-(1+i_{12})^{-240}} = € \, 973,436$$

ii. Il debito residuo iniziale è $D_0 = S$, pertanto $I_1 = S \times i_{12} = € \, 600,000$ e $C_1 = R - I_1 = € \, 373,436$.

2. [Standard] Rispondere ai seguenti quesiti.

a. Data la funzione

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$$

i. (2 pt) Determinarne il dominio, le eventuali intersezioni con gli assi, il segno, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.

ii. (1 pt) Studiarne la monotonia ed individuare eventuali estremanti,

iii. (1 pt) Studiarne la convessità ed individuare eventuali punti di flesso. Tracciare infine un grafico qualitativo della funzione coerente con le informazioni raccolte.

iv. (2 pt) Calcolare l'area della regione di piano cartesiano delimitata dal grafico di f e l'asse x nell'intervallo $[1, 2]$.

b. (2 pt) Enunciare il Teorema di Cramer. Dopo avere scritto in forma matriciale il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y - 3z = 4 \\ 4x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

si dica, motivando la risposta, se esso soddisfi le ipotesi del Teorema di Cramer e si determini, senza calcolarle, il numero delle soluzioni.

Soluzione:

a.

i. La funzione risulta definita nell'insieme $A := (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, e positiva per $2x - 1 > 0$, ovvero per $x > 1/2$. Agli estremi del dominio si ottengono i limiti

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

quindi $x = 0$ è asintoto verticale e $y = 0$ asintoto orizzontale.

ii. La funzione è derivabile nel suo dominio con

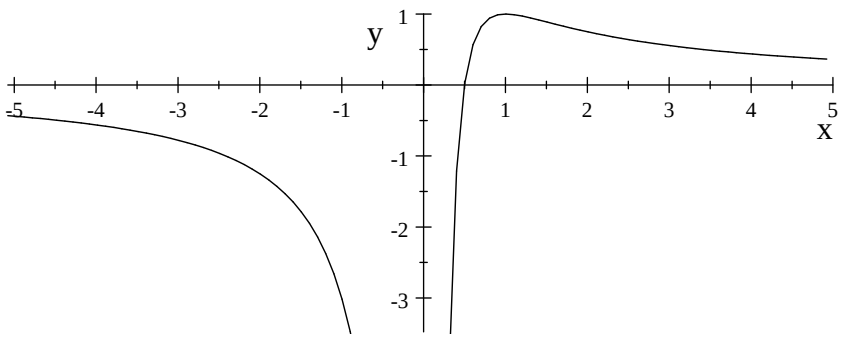
$$f'(x) = \frac{2x^2 - (2x-1)\,2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}(x-1)$$

Studiando il segno della derivata prima, si ottiene che f è monotona crescente nell'intervallo $(0, 1]$, decrescente altrove. Il punto $x = 1$ è di massimo locale.

iii. La funzione ammette anche derivata seconda

$$f''(x) = -2\frac{x^3 - (x-1)\,3x^2}{x^6} = \frac{1}{x^4}(4x-6)$$

Studiando il segno della derivata seconda, si ottiene che f è convessa nell'intervallo $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$ e concava in $\left(0, \frac{3}{2}\right]$ e $(-\infty, 0)$. Il punto $x = \frac{3}{2}$ è di flesso. Un grafico qualitativo è



iv. Nell'intervallo la funzione è positiva, pertanto l'area è

$$A = \int_1^2 f(x)\ dx = \left[2\ln x + \frac{1}{x}\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{1}{2}$$

b. Si veda il libro di testo. Il sistema è

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Poiché la matrice dei coefficienti è non singolare, il sistema è di Cramer ed ammette un'unica soluzione.

2. [Challenge] Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (4 pt) Una società di mutua assicurazione raccoglie da un gruppo di individui un capitale C che sarà impiegato secondo la legge finanziaria

$$F(x,y) = \frac{1-0,03x}{1-0,03y},\ 0 \leq x \leq y$$

Sapendo che la popolazione assicurata ha una probabilità di morte costante del $3,80\%$, calcolare il fattore di montante proposto dalla società e dire, motivando la risposta, se esso sia scindibile o meno.

b. Data la funzione obiettivo

$$F(x,y) = 10x^{3/4}y^{1/4}$$

i. (1 pt) Scrivere l'espressione della funzione Lagrangiana rispetto al vincolo $3x+5y = 100$;

ii. (2 pt) Determinare gli eventuali punti stazionari della funzione Lagrangiana;

iii. (1 pt) Attraverso la matrice Hessiana, della funzione Lagrangiana, si dica se la funzione ammette estremanti relativi.

Soluzione:

a. La legge di capitalizzazione attuariale $A(x,y)$ ha intensità istantanea di interesse

$$\rho_A(x,y) = -\frac{l'(y)}{l(y)} + \rho_F(x,y)$$

Il termine $-\frac{l'(y)}{l(y)}$ approssima la probabilità di morte e risulta quindi costante. Invece

$$\rho_F(x,y) = D_y[\ln F(x,y)] = \frac{0,03}{1-0,03y}$$

Quindi

$$\rho_A(x,y) = 3,80\% + \frac{0,03}{1-0,03y}$$

La legge è dunque scindibile per il Teorema di Cantelli e

$$A(x,y) = \exp\left\{\int_x^y \rho_A(x,s)\ ds\right\} = e^{0,038(y-x)+\ln\frac{1-0,03x}{1-0,03y}} = \frac{1-0,03x}{1-0,03y}e^{0,038(y-x)}$$

b.

i. La funzione Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(\lambda,x,y) = 10x^{3/4}y^{1/4} + \lambda(100-3x-5y)$$

ii. I punti stazionari della funzione Lagrangiana sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 100 - 5y - 3x = 0 \\ \frac{15}{2\sqrt[4]{x}}\sqrt[4]{y} - 3\lambda = 0 \\ \frac{5}{2}\frac{x^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{3}{4}}} - 5\lambda = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava

$$\frac{5}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/4} = \lambda$$

che può essere sostituito nella terza per ottenere

$$\frac{5}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{3/4} - 5\left(\frac{5}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{-1/4}\right) = 0$$

raccogliendo a fattor comune $\frac{5}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{-1/4}$, si ottiene

$$\frac{5}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{-1/4}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{3/4+1/4} - 5\right) = 0$$

ovvero, non potendo essere né $x = 0$ né $y = 0$,

$$\frac{x}{y} - 5 = 0$$

cioè $x = 5y$, che sostituito nella prima equazione (il vincolo) permette di determinare

$$100 - 5y - 15y = 0 \Longrightarrow y = \frac{100}{20} = 5$$

e quindi $\lambda = \frac{\sqrt[4]{125}}{2}$, $x = 25$ e $y = 5$ è l'unico punto stazionario.

iii. La matrice Hessiana della funzione Lagrangiana è

$$\nabla^2\mathcal{L}(\lambda, x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -5 \\ -3 & -\frac{15}{8x^{\frac{5}{4}}}\sqrt[4]{y} & \frac{15}{8\sqrt[4]{x}y^{\frac{3}{4}}} \\ -5 & \frac{15}{8\sqrt[4]{x}y^{\frac{3}{4}}} & -\frac{15}{8}\frac{x^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{7}{4}}} \end{bmatrix}$$

Calcolandone il determinante nel punto stazionario si ottiene

$$\det\nabla^2\mathcal{L}\left(\frac{\sqrt[4]{125}}{2}, 25, 5\right) = \frac{6}{5}\sqrt[4]{5}25^{\frac{3}{4}} > 0$$

quindi il punto è di massimo locale vincolato.

L.I.U.C. School of Economics and Management

Seconda prova parziale (Mod. B) 09 giugno 2015

1. Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (3 pt) Una azienda sottoscrive un contratto di leasing con scadenza tra tre anni per un bene il cui prezzo è $A = 16.000,00$ €. Il contratto precede un anticipo B pari al 20% del valore del bene e due canoni annui posticipati di pari importo C. Alla chiusura del contratto, dopo tre anni, è previsto il versamento del premio di estinzione E in misura del 3% del valore del bene. Il tasso annuo composto del contratto è $i = 14\%$.

1. Calcolare l'importo del canone C.
2. Il contratto prevede spese fisse di istruttoria pari 350 €, da corrispondere alla sottoscrizione, spese di incasso in misura del 1% di C, corrisposte assieme al canone e commissioni di chiusura fisse di 40 € da pagare dopo 3 anni, assieme al premio di estinzione. Si dica se il TAEG del contratto supera il 15%.

b. (3 pt) Una legge finanziaria $f(t)$ in una variabile prevede intensità istantanea d'interesse

$$\rho(t) = 0,04 + \frac{0,02}{1+t}$$

1. Determinare il tasso d'interesse annuo composto finanziariamente equivalente ad un impiego nell'intervallo $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ con la legge f.
2. Dire, motivando, se la legge finanziaria f sia scindibile.

c. (2 pt) Un debito di importo $S = 250.000,00$ è ammortizzato alla francese in 20 anni, con rata mensile e TAN $3,60\%$.

1. Calcolare l'importo della rata;
2. Scomporre la prima rata in quota di capitale e quota di interesse.

Soluzione:

a.

i. La condizione di chiusura è

$$A = B + \frac{C}{1+i} + \frac{C}{(1+i)^2} + \frac{E}{(1+i)^3}$$

In base ai dati disponibili si ricava $C =$ € $7.576,555$

ii. E' sufficiente calcolare il NPV del finanziamento al tasso soglia proposta

$$NPV(15\%) = A - B - 350 - \frac{C \times 1,01}{1+15\%} - \frac{C \times 1,01}{(1+15\%)^2} - \frac{E+40}{(1+15\%)^3}$$

Poiché risulta $NPV(15\%) = -$ € $332,35 < 0$, il TAEG supera la soglia.

b.

i. Occorre uguagliare

$$f(3/2) = (1+i)^{3/2}$$

e ricavare i. Poiché

$$f(t) = e^{\int_0^t \rho(s)ds} = e^{0,04t+\ln(1+t)^{0,02}} = (1+t)^{0,02} e^{0,04t}$$

si ottiene

$$i = 5,360\%$$

ii. Poiché è una legge finanziaria in una variabile, è scindibile se e solo se $\rho(t) = k$ (costante). Quindi NON è scindibile.

c.

i. Il tasso mensile è $i_{12} = \frac{TAN}{12}$ e le rate sono 240. Quindi

$$R = S \times \frac{i_{12}}{1-(1+i_{12})^{-240}} = € \, 1.462,779$$

ii. Il debito residuo iniziale è $D_0 = S$, pertanto $I_1 = S \times i_{12} = € \, 750,000$ e $C_1 = R - I_1 = € \, 712,779$.

2. [Standard] Rispondere ai seguenti quesiti.

a. Data la funzione

$$f(x) = \frac{4x+1}{x^2}$$

i. (2 pt) Determinarne il dominio, le eventuali intersezioni con gli assi, il segno, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.

ii. (1 pt) Studiarne la monotonia ed individuare eventuali estremanti,

iii. (1 pt) Studiarne la convessità ed individuare eventuali punti di flesso. Tracciare infine un grafico qualitativo della funzione coerente con le informazioni raccolte.

iv. (2 pt) Calcolare l'area della regione di piano cartesiano delimitata dal grafico di f e l'asse x nell'intervallo $[1, 4]$.

b. (2 pt) Enunciare il Teorema di Cramer. Dopo avere scritto in forma matriciale il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ -2x - 2y + 3z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

si dica, motivando la risposta, se esso soddisfi le ipotesi del Teorema di Cramer e si determini, senza calcolarle, il numero delle soluzioni.

Soluzione:

a.

i. La funzione risulta definita nell'insieme $A := (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, e positiva per $4x + 1 > 0$, ovvero per $x > -1/4$. Agli estremi del dominio si ottengono i limiti

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

quindi $x = 0$ è asintoto verticale e $y = 0$ asintoto orizzontale.

ii. La funzione è derivabile nel suo dominio con

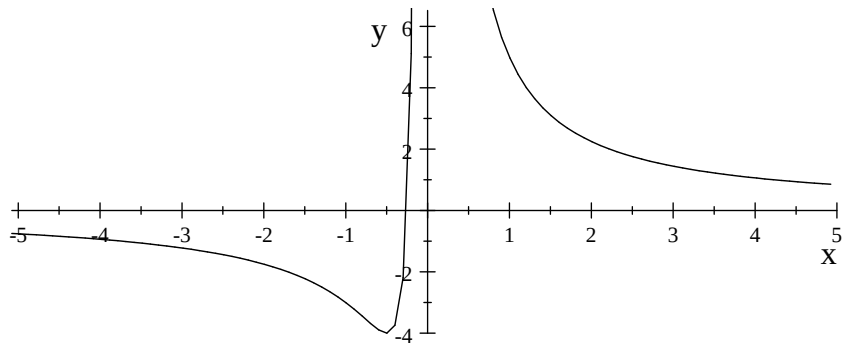
$$f'(x) = \frac{4x^2 - (4x+1)\,2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}(2x+1)$$

Studiando il segno della derivata prima, si ottiene che f è monotona crescente nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$, decrescente altrove. Il punto $x = -1/2$ è di minimo locale.

iii. La funzione ammette anche derivata seconda

$$f''(x) = -2\frac{2x^3 - (2x+1)\,3x^2}{x^6} = \frac{1}{x^4}(8x+6)$$

Studiando il segno della derivata seconda, si ottiene che f è concava nell'intervallo $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ e convessa in $\left[-\frac{3}{4}, 0\right)$ e $(0, \infty)$. Il punto $x = -\frac{3}{4}$ è di flesso. Un grafico qualitativo è



iv. Nell'intervallo la funzione è positiva, pertanto l'area è

$$A = \int_1^4 f(x)\ dx = \left[4\ln x - \frac{1}{x}\right]_1^4 = 8\ln 2 + \frac{3}{4}$$

b. Si veda il libro di testo. Il sistema è

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Poiché la matrice dei coefficienti è non singolare, il sistema è di Cramer ed ammette un'unica soluzione.

2. [Challenge] Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (4 pt) Una società di mutua assicurazione raccoglie da un gruppo di individui un capitale C che sarà impiegato secondo la legge finanziaria

$$F(x,y) = \frac{1-0,02x}{1-0,02y},\ 0 \leq x \leq y$$

Sapendo che la popolazione assicurata ha una probabilità di morte costante del $2,40\%$, calcolare il fattore di montante proposto dalla società e dire, motivando la risposta, se esso sia scindibile o meno.

b. Data la funzione obiettivo

$$F(x,y) = 20x^{1/4}y^{3/4}$$

i. (1 pt) Scrivere l'espressione della funzione Lagrangiana rispetto al vincolo $3x+5y = 100$;

ii. (2 pt) Determinare gli eventuali punti stazionari della funzione Lagrangiana;

iii. (1 pt) Attraverso la matrice Hessiana, della funzione Lagrangiana, si dica se la funzione ammette estremanti relativi.

Soluzione:

a. La legge di capitalizzazione attuariale $A(x,y)$ ha intensità istantanea di interesse

$$\rho_A(x,y) = -\frac{l'(y)}{l(y)} + \rho_F(x,y)$$

Il termine $-\frac{l'(y)}{l(y)}$ approssima la probabilità di morte e risulta quindi costante. Invece

$$\rho_F(x,y) = D_y[\ln F(x,y)] = \frac{0,02}{1-0,02y}$$

Quindi

$$\rho_A(x,y) = 2,40\% + \frac{0,02}{1-0,02y}$$

La legge è dunque scindibile per il Teorema di Cantelli e

$$A(x,y) = \exp\left\{\int_x^y \rho_A(x,s)\ ds\right\} = e^{0,024(y-x)+\ln\frac{1-0,02x}{1-0,02y}} = \frac{1-0,02x}{1-0,02y}e^{0,024(y-x)}$$

b.

i. La funzione Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(\lambda,x,y) = 20x^{1/4}y^{3/4} + \lambda(100-3x-5y)$$

ii. I punti stazionari della funzione Lagrangiana sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 100 - 5y - 3x = 0 \\ 5\frac{y^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}} - 5\lambda = 0 \\ \frac{15}{\sqrt[4]{y}}\sqrt[4]{x} - 3\lambda = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{3/4} = \lambda$$

che può essere sostituito nella terza per ottenere

$$15\left(\frac{x}{y}\right)^{1/4} - 3\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{-3/4}\right) = 0$$

raccogliendo a fattor comune $3\left(\frac{x}{y}\right)^{1/4}$, si ottiene

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^{1/4}\left(5 - \left(\frac{x}{y}\right)^{-3/4-1/4}\right) = 0$$

ovvero, non potendo essere né $x = 0$ né $y = 0$,

$$5 - \frac{y}{x} = 0$$

cioè $y = 5x$, che sostituito nella prima equazione (il vincolo) permette di determinare

$$100 - 3x - 25x = 0 \Longrightarrow x = \frac{100}{28}$$

e quindi $\lambda = 5^{3/4}$, $x = \frac{100}{28}$ e $y = \frac{500}{28}$ è l'unico punto stazionario.

iii. La matrice Hessiana della funzione Lagrangiana è

$$\nabla^2\mathcal{L}(\lambda, x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -5 \\ -3 & -\frac{15}{4x^{\frac{7}{4}}}y^{\frac{3}{4}} & \frac{15}{4x^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{y}} \\ -5 & \frac{15}{4x^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{y}} & -\frac{15}{4}\frac{\sqrt[4]{x}}{y^{\frac{5}{4}}} \end{bmatrix}$$

Calcolandone il determinante nel punto stazionario si ottiene

$$\det\nabla^2\mathcal{L}\left(5^{3/4}, \frac{100}{28}, \frac{500}{28}\right) = \frac{4116}{3125}\sqrt[4]{25}125^{\frac{3}{4}} > 0$$

quindi il punto è di massimo locale vincolato.

L.I.U.C. School of Economics and Management

Seconda prova parziale (Mod. C) 09 giugno 2015

1. Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (3 pt) Una azienda sottoscrive un contratto di leasing con scadenza tra tre anni per un bene il cui prezzo è $A = 28.000,00$ €. Il contratto precede un anticipo B pari al 20% del valore del bene e due canoni annui posticipati di pari importo C. Alla chiusura del contratto, dopo tre anni, è previsto il versamento del premio di estinzione E in misura del 3% del valore del bene. Il tasso annuo composto del contratto è $i = 10\%$.

1. Calcolare l'importo del canone C.
2. Il contratto prevede spese fisse di istruttoria pari 150 €, da corrispondere alla sottoscrizione, spese di incasso in misura del 3% di C, corrisposte assieme al canone e commissioni di chiusura fisse di 180 € da pagare dopo 3 anni, assieme al premio di estinzione. Si dica se il TAEG del contratto supera il 15%.

b. (3 pt) Una legge finanziaria $f(t)$ in una variabile prevede intensità istantanea d'interesse

$$\rho(t) = 0,03 + \frac{0,02}{1+t}$$

1. Determinare il tasso d'interesse annuo composto finanziariamente equivalente ad un impiego nell'intervallo $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ con la legge f.
2. Dire, motivando, se la legge finanziaria f sia scindibile.

c. (2 pt) Un debito di importo $S = 180.000,00$ è ammortizzato alla francese in 20 anni, con rata mensile e TAN $2,40\%$.

1. Calcolare l'importo della rata;
2. Scomporre la prima rata in quota di capitale e quota di interesse.

Soluzione:

a.

i. La condizione di chiusura è

$$A = B + \frac{C}{1+i} + \frac{C}{(1+i)^2} + \frac{E}{(1+i)^3}$$

In base ai dati disponibili si ricava $C =$ € $12.543,030$.

ii. E' sufficiente calcolare il NPV del finanziamento al tasso soglia proposta

$$NPV(15\%) = A - B - 150 - \frac{C \times 1,03}{1+15\%} - \frac{C \times 1,03}{(1+15\%)^2} - \frac{E+180}{(1+15\%)^3}$$

Poiché risulta $NPV(15\%) =$ € $576,28 > 0$, il TAEG non supera la soglia.

b.

i. Occorre uguagliare

$$f(3/2) = (1+i)^{3/2}$$

e ricavare i. Poiché

$$f(t) = e^{\int_0^t \rho(s)ds} = e^{0,03t+\ln(1+t)^{0,02}} = (1+t)^{0,02} e^{0,03t}$$

si ottiene

$$i = 4,312\%$$

ii. Poiché è una legge finanziaria in una variabile, è scindibile se e solo se $\rho(t) = k$ (costante). Quindi NON è scindibile.

c.

i. Il tasso mensile è $i_{12} = \frac{TAN}{12}$ e le rate sono 240. Quindi

$$R = S \times \frac{i_{12}}{1-(1+i_{12})^{-240}} = € \, 945,081$$

ii. Il debito residuo iniziale è $D_0 = S$, pertanto $I_1 = S \times i_{12} = € \, 360,000$ e $C_1 = R - I_1 = € \, 585,081$.

2. [Standard] Rispondere ai seguenti quesiti.

a. Data la funzione

$$f(x) = \frac{-4x-2}{x^2}$$

i. (2 pt) Determinarne il dominio, le eventuali intersezioni con gli assi, il segno, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.

ii. (1 pt) Studiarne la monotonia ed individuare eventuali estremanti,

iii. (1 pt) Studiarne la convessità ed individuare eventuali punti di flesso. Tracciare infine un grafico qualitativo della funzione coerente con le informazioni raccolte.

iv. (2 pt) Calcolare l'area della regione di piano cartesiano delimitata dal grafico di f e l'asse x nell'intervallo $[1, 3]$.

b. (2 pt) Enunciare il Teorema di Cramer. Dopo avere scritto in forma matriciale il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 3 \\ x - 4y + z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

si dica, motivando la risposta, se esso soddisfi le ipotesi del Teorema di Cramer e si determini, senza calcolarle, il numero delle soluzioni.

Soluzione:

a.

i. La funzione risulta definita nell'insieme $A := (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, e positiva per $-4x-2 > 0$, ovvero per $x < -1/2$. Agli estremi del dominio si ottengono i limiti

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

quindi $x = 0$ è asintoto verticale e $y = 0$ asintoto orizzontale.

ii. La funzione è derivabile nel suo dominio con

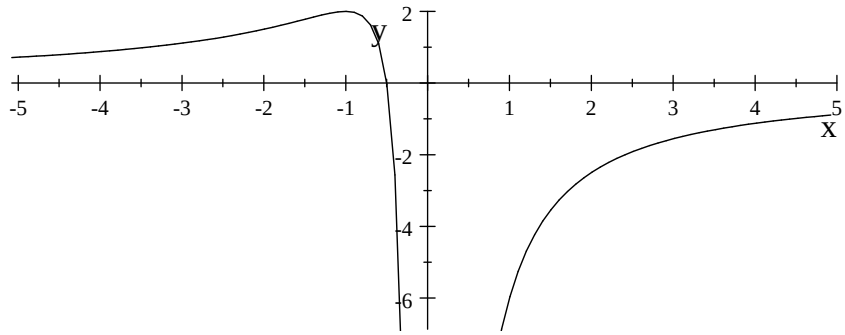
$$f'(x) = \frac{-4x^2 - (-4x-2)\,2x}{x^4} = \frac{4}{x^3}(x+1)$$

Studiando il segno della derivata prima, si ottiene che f è monotona decrescente nell'intervallo $[-1, 0)$, crescente altrove. Il punto $x = -1$ è di minimo locale.

iii. La funzione ammette anche derivata seconda

$$f''(x) = 4\frac{x^3 - (x+1)\,3x^2}{x^6} = -\frac{4}{x^4}(2x+3)$$

Studiando il segno della derivata seconda, si ottiene che f è convessa nell'intervallo $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ e concava in $\left[-\frac{3}{2}, 0\right)$ e $(0, \infty)$. Il punto $x = -\frac{3}{2}$ è di flesso. Un grafico qualitativo è



iv. Nell'intervallo la funzione è negativa, pertanto l'area è

$$A = -\int_1^3 f(x)\ dx = -\left[\frac{2}{x} - 4\ln x\right]_1^3 = 4\ln 3 + \frac{4}{3}$$

b. Si veda il libro di testo. Il sistema è

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Poiché la matrice dei coefficienti è non singolare, il sistema è di Cramer ed ammette un'unica soluzione.

2. [Challenge] Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (4 pt) Una società di mutua assicurazione raccoglie da un gruppo di individui un capitale C che sarà impiegato secondo la legge finanziaria

$$F(x,y) = \frac{1-0,03x}{1-0,03y},\ 0 \leq x \leq y$$

Sapendo che la popolazione assicurata ha una probabilità di morte costante del $3,80\%$, calcolare il fattore di montante proposto dalla società e dire, motivando la risposta, se esso sia scindibile o meno.

b. Data la funzione obiettivo

$$F(x,y) = 10x^{3/4}y^{1/4}$$

i. (1 pt) Scrivere l'espressione della funzione Lagrangiana rispetto al vincolo $3x+5y = 100$;

ii. (2 pt) Determinare gli eventuali punti stazionari della funzione Lagrangiana;

iii. (1 pt) Attraverso la matrice Hessiana, della funzione Lagrangiana, si dica se la funzione ammette estremanti relativi.

Soluzione:

a. La legge di capitalizzazione attuariale $A(x,y)$ ha intensità istantanea di interesse

$$\rho_A(x,y) = -\frac{l'(y)}{l(y)} + \rho_F(x,y)$$

Il termine $-\frac{l'(y)}{l(y)}$ approssima la probabilità di morte e risulta quindi costante. Invece

$$\rho_F(x,y) = D_y[\ln F(x,y)] = \frac{0,03}{1-0,03y}$$

Quindi

$$\rho_A(x,y) = 3,80\% + \frac{0,03}{1-0,03y}$$

La legge è dunque scindibile per il Teorema di Cantelli e

$$A(x,y) = \exp\left\{\int_x^y \rho_A(x,s)\ ds\right\} = e^{0,038(y-x)+\ln\frac{1-0,03x}{1-0,03y}} = \frac{1-0,03x}{1-0,03y}e^{0,038(y-x)}$$

b.

i. La funzione Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(\lambda,x,y) = 10x^{3/4}y^{1/4} + \lambda(100-3x-5y)$$

ii. I punti stazionari della funzione Lagrangiana sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 100 - 5y - 3x = 0 \\ \frac{15}{2\sqrt[4]{x}}\sqrt[4]{y} - 3\lambda = 0 \\ \frac{5}{2}\frac{x^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{3}{4}}} - 5\lambda = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava

$$\frac{5}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/4} = \lambda$$

che può essere sostituito nella terza per ottenere

$$\frac{5}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{3/4} - 5\left(\frac{5}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{-1/4}\right) = 0$$

raccogliendo a fattor comune $\frac{5}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{-1/4}$, si ottiene

$$\frac{5}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{-1/4}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{3/4+1/4} - 5\right) = 0$$

ovvero, non potendo essere né $x = 0$ né $y = 0$,

$$\frac{x}{y} - 5 = 0$$

cioè $x = 5y$, che sostituito nella prima equazione (il vincolo) permette di determinare

$$100 - 5y - 15y = 0 \Longrightarrow y = \frac{100}{20} = 5$$

e quindi $\lambda = \frac{\sqrt[4]{125}}{2}$, $x = 25$ e $y = 5$ è l'unico punto stazionario.

iii. La matrice Hessiana della funzione Lagrangiana è

$$\nabla^2\mathcal{L}(\lambda, x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -5 \\ -3 & -\frac{15}{8x^{\frac{5}{4}}}\sqrt[4]{y} & \frac{15}{8\sqrt[4]{x}y^{\frac{3}{4}}} \\ -5 & \frac{15}{8\sqrt[4]{x}y^{\frac{3}{4}}} & -\frac{15}{8}\frac{x^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{7}{4}}} \end{bmatrix}$$

Calcolandone il determinante nel punto stazionario si ottiene

$$\det\nabla^2\mathcal{L}\left(\frac{\sqrt[4]{125}}{2}, 25, 5\right) = \frac{6}{5}\sqrt[4]{5}25^{\frac{3}{4}} > 0$$

quindi il punto è di massimo locale vincolato.

L.I.U.C. School of Economics and Management

Seconda prova parziale (Mod. D) 09 giugno 2015

1. Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (3 pt) Una azienda sottoscrive un contratto di leasing con scadenza tra tre anni per un bene il cui prezzo è $A = 15.000,00$ €. Il contratto precede un anticipo B pari al 20% del valore del bene e due canoni annui posticipati di pari importo C. Alla chiusura del contratto, dopo tre anni, è previsto il versamento del premio di estinzione E in misura del 3% del valore del bene. Il tasso annuo composto del contratto è $i = 13\%$.

1. Calcolare l'importo del canone C.
2. Il contratto prevede spese fisse di istruttoria pari 180 €, da corrispondere alla sottoscrizione, spese di incasso in misura del 2% di C, corrisposte assieme al canone e commissioni di chiusura fisse di 80 € da pagare dopo 3 anni, assieme al premio di estinzione. Si dica se il TAEG del contratto supera il 15%.

b. (3 pt) Una legge finanziaria $f(t)$ in una variabile prevede intensità istantanea d'interesse

$$\rho(t) = 0,06 + \frac{0,01}{1+t}$$

1. Determinare il tasso d'interesse annuo composto finanziariamente equivalente ad un impiego nell'intervallo $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ con la legge f.
2. Dire, motivando, se la legge finanziaria f sia scindibile.

c. (2 pt) Un debito di importo $S = 350.000,00$ è ammortizzato alla francese in 20 anni, con rata mensile e TAN $4,20\%$.

1. Calcolare l'importo della rata;
2. Scomporre la prima rata in quota di capitale e quota di interesse.

Soluzione:

a.

i. La condizione di chiusura è

$$A = B + \frac{C}{1+i} + \frac{C}{(1+i)^2} + \frac{E}{(1+i)^3}$$

In base ai dati disponibili si ricava $C =$ € $7.006,840$

ii. E' sufficiente calcolare il NPV del finanziamento al tasso soglia proposta

$$NPV(15\%) = A - B - 180 - \frac{C \times 1,02}{1+15\%} + \frac{C \times 1,02}{(1+15\%)^2} + \frac{E+80}{(1+15\%)^3}$$

Poiché risulta $NPV(15\%) = -$ € $147,39 > 0$, il TAEG supera la soglia.

b.

i. Occorre uguagliare

$$f(3/2) = (1+i)^{3/2}$$

e ricavare i. Poiché

$$f(t) = e^{\int_0^t \rho(s)ds} = e^{0,06t+\ln(1+t)^{0,01}} = (1+t)^{0,01} e^{0,06t}$$

si ottiene

$$i = 6,834\%$$

ii. Poiché è una legge finanziaria in una variabile, è scindibile se e solo se $\rho(t) = k$ (costante). Quindi NON è scindibile.

c.

i. Il tasso mensile è $i_{12} = \frac{TAN}{12}$ e le rate sono 240. Quindi

$$R = S \times \frac{i_{12}}{1-(1+i_{12})^{-240}} = € \, 2.157,998$$

ii. Il debito residuo iniziale è $D_0 = S$, pertanto $I_1 = S \times i_{12} = € \, 1225,000$ e $C_1 = R - I_1 = € \, 932,998$

2. [Standard] Rispondere ai seguenti quesiti.

a. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1-2x}{x^2}$$

i. (2 pt) Determinarne il dominio, le eventuali intersezioni con gli assi, il segno, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.

ii. (1 pt) Studiarne la monotonia ed individuare eventuali estremanti,

iii. (1 pt) Studiarne la convessità ed individuare eventuali punti di flesso. Tracciare infine un grafico qualitativo della funzione coerente con le informazioni raccolte.

iv. (2 pt) Calcolare l'area della regione di piano cartesiano delimitata dal grafico di f e l'asse x nell'intervallo $[1, 3]$.

b. (2 pt) Enunciare il Teorema di Cramer. Dopo avere scritto in forma matriciale il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - y + 4z = 0 \\ x - 2y - z = 6 \end{cases}$$

si dica, motivando la risposta, se esso soddisfi le ipotesi del Teorema di Cramer e si determini, senza calcolarle, il numero delle soluzioni.

Soluzione:

a.

i. La funzione risulta definita nell'insieme $A := (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, e positiva per $1 - 2x > 0$, ovvero per $x < -1/2$. Agli estremi del dominio si ottengono i limiti

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

quindi $x = 0$ è asintoto verticale e $y = 0$ asintoto orizzontale.

ii. La funzione è derivabile nel suo dominio con

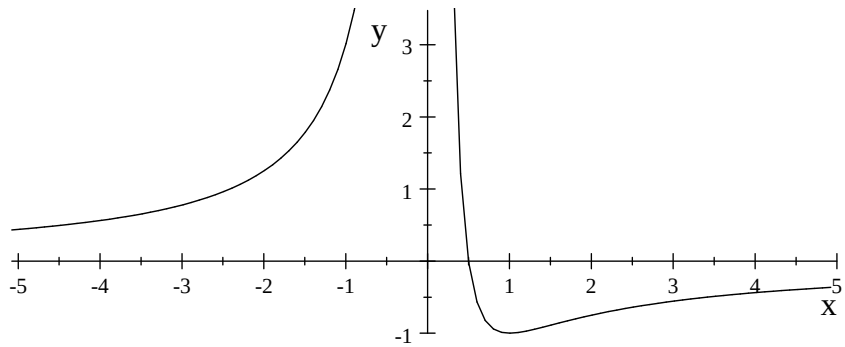
$$f'(x) = \frac{-4x^2 - (-4x-2)\,2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}(x-1)$$

Studiando il segno della derivata prima, si ottiene che f è monotona decrescente nell'intervallo $(0, 1]$, crescente altrove. Il punto $x = 1$ è di minimo locale.

iii. La funzione ammette anche derivata seconda

$$f''(x) = 4\frac{x^3 - (x+1)\,3x^2}{x^6} = -\frac{2}{x^4}(2x-3)$$

Studiando il segno della derivata seconda, si ottiene che f è concava nell'intervallo $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$ e concava in $\left(0, \frac{3}{2}\right]$ e $(-\infty, 0)$. Il punto $x = \frac{3}{2}$ è di flesso. Un grafico qualitativo è



iv. Nell'intervallo la funzione è negativa, pertanto l'area è

$$A = -\int_1^3 f(x)\ dx = -\left[-2\ln x - \frac{1}{x}\right]_1^3 = 2\ln 3 - \frac{2}{3}$$

b. Si veda il libro di testo. Il sistema è

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Poiché la matrice dei coefficienti è non singolare, il sistema è di Cramer ed ammette un'unica soluzione.

2. [Challenge] Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (4 pt) Una società di mutua assicurazione raccoglie da un gruppo di individui un capitale C che sarà impiegato secondo la legge finanziaria

$$F(x,y) = \frac{1-0,02x}{1-0,02y},\ 0 \leq x \leq y$$

Sapendo che la popolazione assicurata ha una probabilità di morte costante del $2,40\%$, calcolare il fattore di montante proposto dalla società e dire, motivando la risposta, se esso sia scindibile o meno.

b. Data la funzione obiettivo

$$F(x,y) = 20x^{1/4}y^{3/4}$$

i. (1 pt) Scrivere l'espressione della funzione Lagrangiana rispetto al vincolo $3x+5y = 100$;

ii. (2 pt) Determinare gli eventuali punti stazionari della funzione Lagrangiana;

iii. (1 pt) Attraverso la matrice Hessiana, della funzione Lagrangiana, si dica se la funzione ammette estremanti relativi.

Soluzione:

a. La legge di capitalizzazione attuariale $A(x,y)$ ha intensità istantanea di interesse

$$\rho_A(x,y) = -\frac{l'(y)}{l(y)} + \rho_F(x,y)$$

Il termine $-\frac{l'(y)}{l(y)}$ approssima la probabilità di morte e risulta quindi costante. Invece

$$\rho_F(x,y) = D_y[\ln F(x,y)] = \frac{0,02}{1-0,02y}$$

Quindi

$$\rho_A(x,y) = 2,40\% + \frac{0,02}{1-0,02y}$$

La legge è dunque scindibile per il Teorema di Cantelli e

$$A(x,y) = \exp\left\{\int_x^y \rho_A(x,s)\ ds\right\} = e^{0,024(y-x)+\ln\frac{1-0,02x}{1-0,02y}} = \frac{1-0,02x}{1-0,02y}e^{0,024(y-x)}$$

b.

i. La funzione Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(\lambda,x,y) = 20x^{1/4}y^{3/4} + \lambda(100-3x-5y)$$

ii. I punti stazionari della funzione Lagrangiana sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 100 - 5y - 3x = 0 \\ 5\frac{y^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}} - 5\lambda = 0 \\ \frac{15}{\sqrt[4]{y}}\sqrt[4]{x} - 3\lambda = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{3/4} = \lambda$$

che può essere sostituito nella terza per ottenere

$$15\left(\frac{x}{y}\right)^{1/4} - 3\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{-3/4}\right) = 0$$

raccogliendo a fattor comune $3\left(\frac{x}{y}\right)^{1/4}$, si ottiene

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^{1/4}\left(5 - \left(\frac{x}{y}\right)^{-3/4-1/4}\right) = 0$$

ovvero, non potendo essere né $x = 0$ né $y = 0$,

$$5 - \frac{y}{x} = 0$$

cioè $y = 5x$, che sostituito nella prima equazione (il vincolo) permette di determinare

$$100 - 3x - 25x = 0 \Longrightarrow x = \frac{100}{28}$$

e quindi $\lambda = 5^{3/4}$, $x = \frac{100}{28}$ e $y = \frac{500}{28}$ è l'unico punto stazionario.

iii. La matrice Hessiana della funzione Lagrangiana è

$$\nabla^2\mathcal{L}(\lambda, x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -5 \\ -3 & -\frac{15}{4x^{\frac{7}{4}}}y^{\frac{3}{4}} & \frac{15}{4x^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{y}} \\ -5 & \frac{15}{4x^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{y}} & -\frac{15}{4}\frac{\sqrt[4]{x}}{y^{\frac{5}{4}}} \end{bmatrix}$$

Calcolandone il determinante nel punto stazionario si ottiene

$$\det\nabla^2\mathcal{L}\left(5^{3/4}, \frac{100}{28}, \frac{500}{28}\right) = \frac{4116}{3125}\sqrt[4]{25}125^{\frac{3}{4}} > 0$$

quindi il punto è di massimo locale vincolato.