ESERCIZI SVOLTI DI MECCANICA

Questa dispensa si propone di fornire allo studente l'anello di giunzione tra teoria ed esercizio. È difatti noto che i modelli creati dai fisici nel corso dei secoli al fine di spiegare i fenomeni naturali si adattino poi alla soluzione di semplici fenomeni reali. Laddove quindi si parla di una goccia che cade da un rubinetto, possiamo pensare ad un corpo puntiforme che si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, oppure, riferendoci ad un oggetto che scivola sul ghiaccio, possiamo pensare ad una superficie ideale senza attrito.

L'utilizzo di questa dispensa quindi è finalizzato innanzitutto alla comprensione del testo di un esercizio, passaggio spesso sottovalutato dagli studenti ma di importanza fondamentale (consiglio sempre di leggere il testo di un esercizio per almeno 5 volte! Infatti in questo modo riusciamo ad avere un quadro completo della situazione fisica), quindi all'inserimento del fenomeno descritto all'interno di un problema specifico: grandezze cinematiche, dinamiche, corpo esteso, equilibrio..., ed infine all'applicazione del modello corretto con relativi calcoli matematici.

Una verifica che suggerisco di svolgere, qualora non ci si ricordi di una formula, è quella delle unità di misura. Difatti se le unità di misura ai due membri di un'equazione sono differenti, sicuramente l'equazione è sbagliata.

La dispensa fornisce alcuni esercizi, tratti da i più recenti temi d'esame, relativi agli argomenti trattati nel corso e la loro dettagliata soluzione.

Gli studenti sono pregati, qualora trovassero qualche errore (statisticamente inevitabile), di avvisarmi all'indirizzo email epuddu@liuc.it

Emiliano Puddu

Cinematica

Es. 1

Da un rubinetto cadono delle gocce d'acqua a intervalli regolari. Quando la prima goccia tocca la superficie del lavandino, la terza goccia si sta staccando dal rubinetto. Se la distanza tra il rubinetto ed il lavandino è d=30cm, determinare la quota, rispetto al lavandino, della seconda goccia, nell'istante in cui la terza inizia a cadere.

SOLUZIONE

La prima cosa che si nota in quest'esercizio è che delle gocce cadono percorrendo un moto unidimensionale. Sicuramente l'accelerazione di gravità *g* entra in gioco. La goccia d'acqua sicuramente è un corpo piccolo rispetto all'ambiente circostante, per cui possiamo trattarla come corpo puntiforme. Il testo chiede inoltre di calcolare un'altezza ad un certo istante temporale, cosa che fa pensare ad un problema di cinematica.

L'esercizio si risolve in questo modo: notiamo che le gocce cadono tutte ad intervalli regolari Δt. Questo intervallo, inizialmente sconosciuto, si può calcolare per mezzo della legge oraria di un corpo, la quale mette in relazione lo spazio percorso con il tempo impiegato:

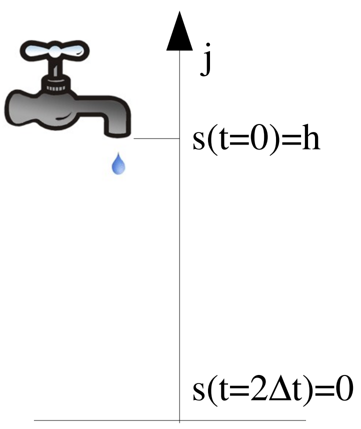
$$s(t)=s(0)+v(0)t+\frac{1}{2}at^2 \tag{1}$$

A questo punto dobbiamo decidere chi sono le grandezze in gioco nel problema. s(t) è la posizione al generico istante t, s(0) è il "punto di partenza", v(0) la velocità che la goccia possiede al punto di partenza, a la sua accelerazione. Facciamo ora riferimento alla Fig. 1. All'istante t=0 la prima goccia si stacca dal rubinetto e si trova ad altezza h rispetto al fondo del lavandino. Nel momento in cui la terza goccia si stacca dal rubinetto (t=2Δt), la prima goccia tocca il fondo del lavandino, trovandosi ad s(t=2Δt)=0. La velocità iniziale di ogni goccia è nulla, mentre l'accelerazione a a cui è sottoposto è l'accelerazione di gravità g. Assegnando valore positivo ai vettori col verso j in figura, l'equazione di moto si riscrive come:

$$0=h-\frac{1}{2}gt^2$$

da cui ricaviamo $t=\sqrt{2h/g}$. Questo intervallo di tempo, come già detto, è l'istante a cui la prima goccia tocca terra, ma anche quello a cui la terza goccia si stacca dal rubinetto. Ricordando che le gocce cadono ad intervalli regolari, ricaviamo l'istante a cui la seconda goccia si è staccata dal rubinetto come la metà di questo intervallo di tempo: $t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{h}{2g}}$. A questo punto, riutilizzando l'eq. (1) per la seconda goccia otteniamo

$s\left(\sqrt{\frac{h}{2g}}\right)=h-\frac{1}{2}g\left(\sqrt{\frac{h}{2g}}\right)^2$, ovvero la quota della seconda goccia nell'istante in cui la prima tocca il lavandino.



Es. 1 del 13/7/2006

All'istante t=0 un punto materiale si muove con velocità v(0)=60 m/s nella direzione delle x positive. Nell'intervallo di tempo compreso tra gli istanti t=0 s e t=15 s la sua velocità diminuisce uniformemente fino

ad annullarsi. Qual'è la sua accelerazione media in tale intervallo di tempo? Spiegare il significato del segno (+ o -) nella risposta.
SOLUZIONE
Dal testo comprendiamo immediatamente che all'istante t=0 il corpo puntiforme possiede una velocità assegnata v(0)=60 m/s, mentre nei successivi 15 secondi essa diminuisce fino a raggiungere il valore v(15)=0 m/s; il modo in cui diminuisce è uniforme, come specificato nel testo, che significa che l'accelerazione a del corpo è costante in questo intervallo di tempo (0-15 s): trattiamo il problema come un "moto uniformemente decelerato", la cui velocità segue la legge fondamentale per la cinematica:

$$v(t_f)=v(0)+a\,t_f \quad . \tag{2}$$

che risolta fornisce l'unica incognita, l'accelerazione a:

$$a=\frac{v(t_f)-v(0)}{t_f}$$

A questo punto si sostituiscono i valori forniti dal testo t_f=15 s, v(0)=60 m/s e v(15)=0 m/s e si ottiene a=-4 m/s. Il segno "-" a conclusione di questo esercizio ha il significato di una accelerazione negativa o decelerazione, ovvero un'accelerazione di segno opposto a quello della velocità iniziale v(0).

Es. 1 del 10/9/2004
Un punto materiale si muove di moto rettilineo con legge oraria

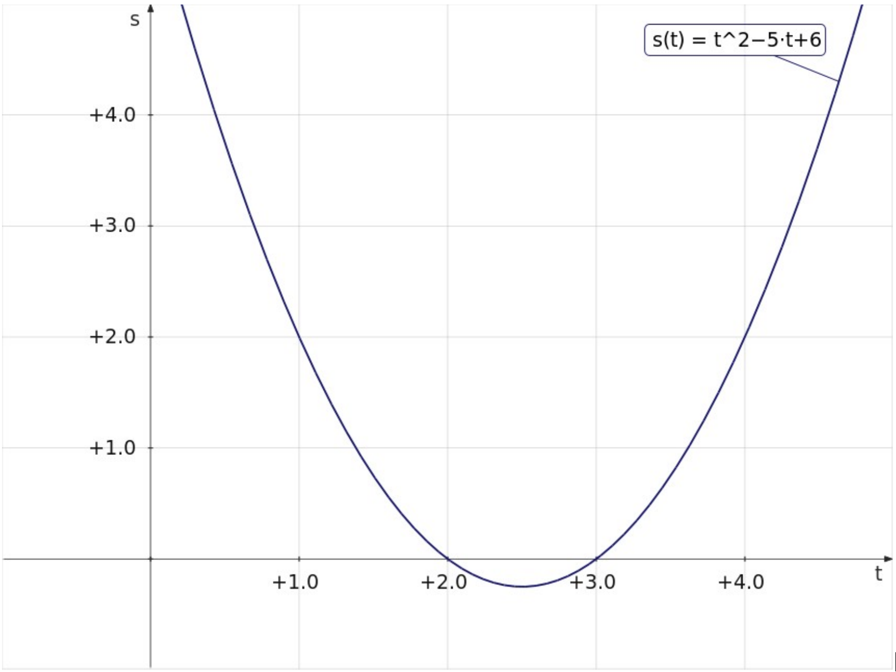
$$s(t)=6-5\mathrm{t}+t^2 \quad .$$

Dire in quali istanti di tempo il punto passa dall'origine degli assi e determinare la velocità in tali istanti. Determinare quindi la coordinata del punto di inversione del moto.
SOLUZIONE
La legge oraria è descritta, per il moto uniformemente accelerato, dall'equazione $s(t)=s(0)+v(0)t+\frac{1}{2}a\,t^2$, in cui notiamo che sono presenti diverse potenze della variabile temporale t. La potenza di grado nullo rappresenta la posizione iniziale, la potenza di grado 1 ha per coefficiente la velocità all'istante zero, mentre la potenza di grado 2 ha per coefficiente l'accelerazione moltiplicata per il fattore numerico ½. Il suggerimento quindi è, di fronte ad un esercizio come questo, di riconoscere nel moto in esame le variabili cinematiche:
s(0) = 6 m
v(0)= -5 m/s
a=0.5 m/s^2
A questo punto rispondiamo alla prima domanda: determinare gli istanti in cui il corpo passa per l'origine degli assi significa determinare i valori della variabile tempo t ai quali la posizione s(t) assume valore zero:

$6-5\mathrm{t}+t^2=0$. Questa equazione è risolta dalle radici del polinomio di secondo grado. Quest'ultimo è il prodotto di due monomi del tipo $\left(t-t_1\right)\left(t-t_2\right)$, dove t_1 e t_2 devono soddisfare le condizioni:
$t_1 + t_2$=-5
$t_1 \cdot t_2$=6,
da cui si ottiene t_1=2 e t_2=3. Nota che questi due numeri sono, dal punto di vista della geometria analitica, i valori in cui la parabola $s(t)=6-5\mathrm{t}+t^2$ interseca l'asse delle ordinate (dei tempi t), come si può osservare in Fig. 2.
La velocità, come è noto, si può ricavare derivando la legge oraria rispetto alla variabile temporale:

$$v(t)=\frac{ds(t)}{dt}=-5+2\mathrm{t}$$

nella quale sostituiamo i valori dei tempi appena trovati per determinare le corrispondenti velocità, come richiesto dal testo: v(2)=-1m/s e v(3)=+1m/s. A questo punto rispondiamo all'ultima domanda, che ci chiede in quale istante temporale la velocità si annulla: è difatti proprio in questo istante che il moto diventa da negativo o positivo, o viceversa. Quindi ponendo v(t)=0 ricaviamo t=2.5 s.



Es. 1 del 10/9/2004

Un punto materiale si muove nel piano con legge del moto:

$\vec{r}(t)=-0.5\mathrm{t}\,\hat{i}+0.25t^2\,\hat{j}$ *(r in metri, t in secondi)*

Determinare:

a) la traiettoria

b) lo spostamento $\Delta\vec{r}$ *fra gli istanti t=-2 e t=2 s*

c) la velocità istantanea all'istante t=2 s

SOLUZIONE

Il fatto che il punto si muove nel piano ci suggerisce istantaneamente che si tratta di un moto a due dimensioni. Come tale possiamo scomporlo in due moti in una dimensione da trattare separatamente $\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}$ dove $x(t)=-0.5\mathrm{t}$ e $y(t)=+0.25t^2$. La traiettoria è la curva di tutte le posizioni nel piano del punto materiale in considerazione, indipendentemente dall'istante in cui esso passa da queste posizioni. Questa curva mette quindi in relazione i punti della coordinata x con i corrispondenti della coordinata y, ovvero ci fornisce una funzione del tipo y=f(x). Nel caso specifico, essa si ottiene isolando la variabile temporale dall'equazione in x(t):

$t=-2\mathrm{x}(t)$, e quindi sostituendo tale espressione per t nell'equazione in y(t):

$y(t)=+0.25(-2\mathrm{x})^2$ da cui otteniamo finalmente:

$y(t)=x^2$. Come possiamo notare, questa traiettoria è la parabola avente per asse di simmetria l'asse y e vertice nell'origine degli assi O(0,0) (vedi figura).

Per quanto riguarda lo spostamento richiesto al punto *b)*, dobbiamo specificare che esso è un vettore definito come la differenza tra le posizioni prese ad un istante considerato finale ed uno iniziale del corpo puntiforme. Calcoleremo lo spostamento del corpo puntiforme come:

$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t=2\,s)-\vec{r}(t=-2\,s)=-0.5(2)\hat{i}+0.25(2)^2\hat{j}+0.5(-2)\hat{i}-0.25(-2)^2\hat{j}=-2\hat{i}$,

$\Delta r=2$ m.

La velocità istantanea all'istante t=2 s è ottenuta dapprima derivando la posizione $\vec{r}(t)$ rispetto al tempo e quindi sostituendo alla variabile t il valore 2:

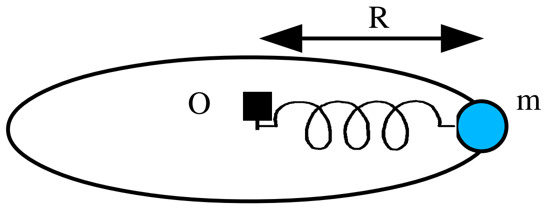
$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\frac{d\vec{x}(t)}{dt}\hat{i}+\frac{d\vec{y}(t)}{dt}\hat{i}=-0.5\hat{i}+0.5t\,\hat{j}$ da cui $\vec{v}(t=2\mathrm{s})=-0.5\,\hat{i}+\hat{j}$, mentre il modulo della velocità, ottenuto applicando il Teorema di Pitagora alle coordinate, è:

$v(t=2\mathrm{s})=\sqrt{-0.5^2+1^2}=1.11$ m/s.

Dinamica

Es. 1 del 15/4/2008

Una sfera di raggio trascurabile e di massa m = 0.1 kg ruota con velocità angolare costante ω = 10 rad/s su una circonferenza di raggio R = 0.2 m. La sfera è imperniata al piano, come in figura, tramite una molla ideale di costante elastica k = 1000 N/m. Determinare l'allungamento della molla Δx e la lunghezza della molla a riposo.



SOLUZIONE

Questo esercizio propone la seguente situazione: su di un piano orizzontale una sfera ruota mi moto circolare uniforme intorno al punto O, vincolata in questo moto da una molla. La molla quindi esercita quella forza di richiamo (centripeta) che fa sì che la sfera non scappi dalla sua traiettoria circolare. Come sappiamo, la forza di una molla è legata all'allungamento della molla stessa dall'espressione (legge di Hook) F_H=kΔx; sappiamo inoltre, che la forza centripeta esercitata su di un corpo è F_c= mωR. Poiché è la stessa molla a fornire questa forza, possiamo ricavare l'allungamento della molla semplicemente eguagliando l'espressione per F_C a quella per F_H:

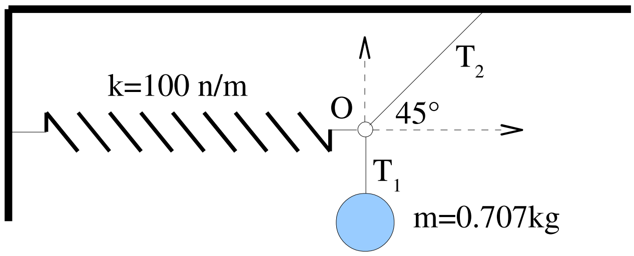
$$k\Delta x = m\omega R$$

da cui ricaviamo $\Delta x = \dfrac{m\omega R}{k}$ =0.0002 m=0.2mm.

A questo punto, considerato che il raggio della traiettoria circolare è la lunghezza della molla estesa, sottraendo da questo il valore Δx, otteniamo la lunghezza della molla a riposo L=0.1998 m.

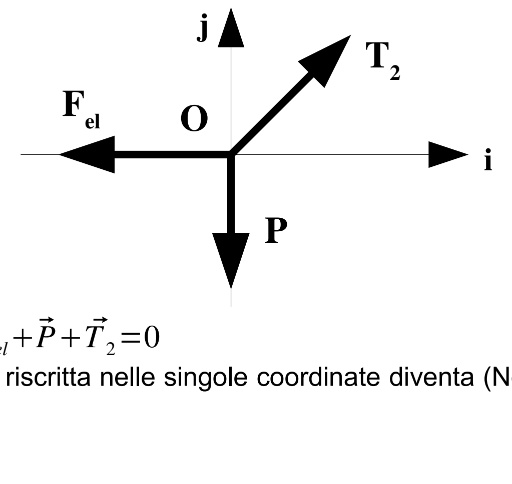
Es. 2 del 4/9/2008

Il sistema di figura si trova all'equilibrio, la molla è considerata di massa trascurabile e la fune inestensibile. Calcolare l'allungamento della molla stessa.



SOLUZIONE

Per risolvere questo esercizio dobbiamo innanzitutto individuare tutte le forze in questione: abbiamo una molla che esercita una forza di richiamo, in quanto è allungata, una massa m su cui agisce la forza di gravità, una fune ad essa collegata che trasmette una tensione T_1, una seconda fune che trasmette la tensione T_2 tra il sistema di corpi ed il soffitto. Il punto O connette tutte le forze. Possiamo allora affermare che tutte le forze in esame agiscano sul punto O. Poiché il sistema è all'equilibrio, la somma di tutte queste forze è nulla, e per il primo principio della dinamica, il punto O risulta essere immobile. Dal sistema fisico ricaviamo il “grafico vettoriale delle forze”, usando un piano cartesiano centrato nel punto O e ponendo su di esso tutte le forze in esame:



A questo punto scriviamo l'equazione vettoriale all'equilibrio:

$$\vec{F}_{el} + \vec{P} + \vec{T}_2 = 0$$

che, riscritta nelle singole coordinate diventa (Nota che nell'equazione non compare la tensione T_1 in quanto essa coincide, al nodo O, con la forza peso P):

$$-F_{el}\hat{i}-P\hat{j}+T_2\cos 45°\hat{i}+T_2\sin 45°\hat{j}=0$$, ovvero

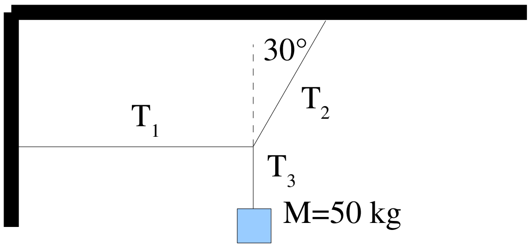
$$(-F_{el}+T_2\cos 45°)\hat{i}+(-P+T_2\sin 45°)\hat{j}=0$$. Questa equazione si risolve annullando le singole coordinate lungo **i** e **j**:

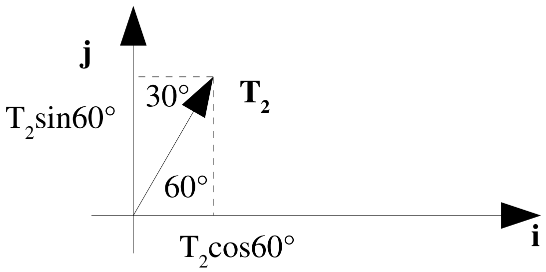
$$-F_{el}+T_2\cos 45°=0$$
$$-P+T_2\sin 45°=0$$

da cui ricaviamo T_2=P/sin 45°=0.707 9.81/0.707=9.81 N e quindi F_{el}=9.81 0.707= 6.94 N. Quindi dalla legge di Hook calcoliamo l'allungamento della molla $\Delta x=F_{el}/100$=6.94 cm.

Es 8 del 12/11/2004

Determinare la tensione delle tre corde di figura, supposte di massa propria, essendo il sistema in equilibrio.





SOLUZIONE

Il problema si imposta esattamente come il precedente. L'unica differenza è che qui tutte le forze in esame sono tensioni. L'equazione fondamentale è:

$\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{P}=0$ (Nota che nell'equazione non compare la tensione T_3 in quanto essa coincide, al nodo O, con la forza peso P) e quindi:

$$-T_1\hat{i}+T_2\cos 60°\hat{i}+T_2\sin 60°\hat{j}-P\hat{j}=0$$, da cui

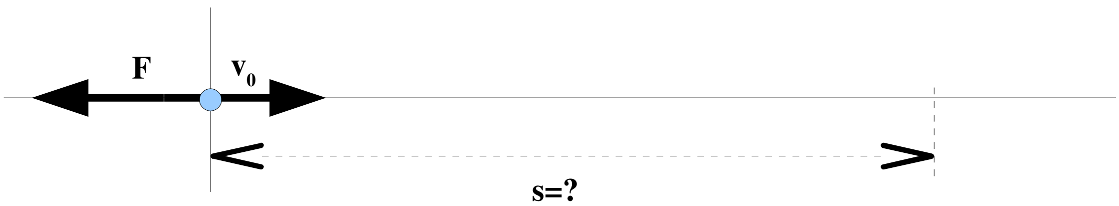
$$(-T_1+T_2\cos 60°)\hat{i}+(T_2\sin 60°-P)\hat{j}=0$$ e quindi annullando le singole variabili

$$-T_1+T_2\cos 60°=0$$
$$T_2\sin 60°-P=0$$

da cui si trova T_2=P/sin60°=566.38N, $T_1=T_2$ cos60°=283.19N e T_3=Mg=490.5N.

Es 2 del 9/7/2004

Una massa m=5kg è in moto lungo l'asse con velocità v_0=30m/s. Su di essa agisce una forza costante F=150 N diretta lungo l'asse. Determinare lo spazio percorso prima dell'inversione del moto:
-Dalle equazioni cinematiche relative al moto in questione.



SOLUZIONE

Questo esercizio ci mette di fronte alla seguente situazione: un corpo è in moto di moto rettilineo uniforme (problema di cinematica) quando improvvisamente agisce su di esso una forza F costante. Il problema si sposta quindi alla dinamica. Il primo passo è ricordarci del primo principio della dinamica, il quale afferma che "se su di un corpo non agiscono forze, esso permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo e uniforme": questo ci suggerisce che il corpo puntiforme in esame non permane nel suo stato di moto rettilineo ed uniforme in quanto è sottoposto all'effetto di una forza, e quindi il suo moto diventerà un moto accelerato! Il secondo principio della dinamica ci permette di trovare il valore dell'accelerazione tramite l'espressione

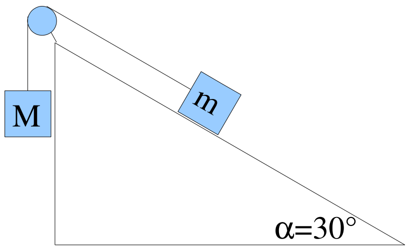
$$F=ma$$

dalla quale notiamo che, essendo la forza F e la massa m due costanti, sarà costante anche l'accelerazione. Questo ci dice che il corpo, con l'applicazione della forza F, sarà in moto di moto uniformemente accelerato; il fatto che la forza F sia opposta alla velocità, ci precisa che in realtà si tratta di una decelerazione. Il calcolo dello spazio s percorso prima dell'inversione del moto, ovvero fino al momento in cui si annulla la velocità, si ottiene calcolando dapprima il tempo dall'espressione $v(t)=v_0-at$ in cui si è posto v(t)=0, e quindi sostituendo il valore ottenuto nella legge oraria:

$$0=v_0-at$$
$$s\left(t=\frac{v_0}{a}\right)=0+v_0\frac{v_0}{a}-\frac{1}{2}a\frac{v_0^2}{a^2}=15\,m/s$$

Es. 3 del 27/7/2004

Le masse di figura si trovano in equilibrio. Determinare il valore minimo del coefficiente di attrito statico tra piano inclinato e massa m. Determinare inoltre la tensione T nella corda. m=80g, M=50g.



SOLUZIONE

In questo problema abbiamo due corpi uniti da una fune inestensibile, le cui forze peso competono nel moto: infatti mentre la massa m è accelerata verso destra e tende a sollevare la massa M, quest'ultima, trovandosi a sinistra della carrucola tende a sua volta a sollevare la prima. Risolviamo dapprima in problema in assenza di attrito. Il moto dei due corpi è descritto dalle equazioni di Newton:

$$ma=mg\sin(30°)-T$$
$$Ma=T-Mg$$

Dobbiamo fare molta attenzione con i segni in problemi di questo tipo, in cui la fune passa per una carrucola che la costringe a curvare: notiamo infatti che, se la massa M accelera verso l'alto, allora la massa m accelera verso il basso. Quindi, se definiamo come positiva per la massa M la direzione verso l'alto, dobbiamo definire positiva per la massa m la direzione verso il basso. Con tale convenzione entrambi i corpi accelerano nello stesso verso, definito dalla scelta del segno. Dalle due equazioni di Newton notiamo che a è positiva se la massa M sale e la massa m scende.

Sommando le due equazioni eliminiamo la tensione T e otteniamo una sola equazione nell'incognita a:

$$a=\frac{m\sin(30°)-M}{m+M}g=-0.06\,m/s^2$$

che come vediamo è negativa. Questo risultato ci serve per capire il moto dei corpi (in assenza di attrito, la massa m tende a salire mentre la massa M tende a scendere) e ad assegnare il segno alla forza d'attrito, opposta al moto della massa m. Ora riscriviamo le equazioni di Newton con il termine di forza di attrito statico

$$ma=mg\sin(30°)+f_s-T$$
$$Ma=T-Mg$$

e, considerato che ci troviamo all'equilibrio, poniamo a=0 in entrambe le equazioni:

$$mg\sin(30°)+f_s-T=0$$
$$T-Mg=0$$

da cui ricaviamo T=Mg=0.49 N ed f_s=0.098. Dalla relazione $f_s=\mu_s mg\cos 30°$ ricaviamo μ_s=0.14.

Es. 2 del 25/2/2005

Una macchina percorre una curva con raggio di curvatura R=20 m a velocità di modulo 30 km/h. Se il coefficiente di attrito statico con l'asfalto è μ_s=0.95 determinare se la macchina tiene la strada o no.

SOLUZIONE

Innanzitutto convertiamo la velocità tangenziale da km/h a m/s dividendo il suo valore per la costante 3.6 v=30/3.6 m/s=8.33 m/s.

In questo esercizio sul moto circolare uniforme, la forza centripeta che mantiene l'auto sulla sua traiettoria circolare, è proprio la forza di attrito statico: infatti l'auto non scivola nel punto di contatto tra la ruota e la strada, ragion per cui la forza agente è la forza di attrito statico diretta verso il centro della circonferenza. Quindi avremo $f_c=f_s$, ovvero

$$\frac{mv^2}{R}=\mu_s mg$$

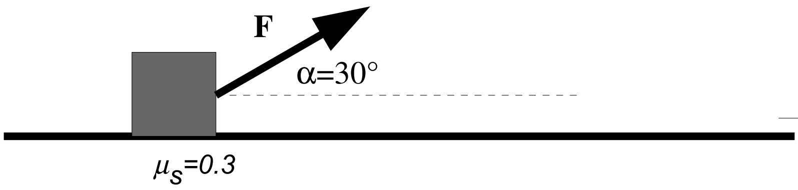
da cui, dopo avere eliminato la massa m, ricaviamo

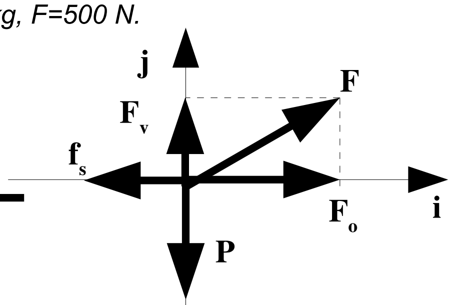
$$\mu_s = \frac{v^2}{gR} = 0.35 \quad .$$

Questo è il minimo coefficiente di attrito statico perché l'auto non esca di strada, data la velocità ed il raggio di curvatura. Poiché l'attrito tra asfalto e gomme è di 0.95>0.35, l'auto terrà la strada.

Es. 2 del 9/9/2005

*Sul corpo di massa m, soggetto alla forza peso, agisce una forza inclinata **F**. Essendovi fra il corpo ed il terreno attrito con coefficiente statico μ_s, determinare, giustificando la risposta con i relativi calcoli, se il corpo sta fermo, se si muove strisciando o se si stacca dal terreno. m=150 kg, F=500 N.*





Soluzione

La forza F, agendo in direzione obliqua, si scompone in una componente verticale ed una orizzontale F_v=Fsin30°=250N e F_o=Fcos30°=433.01N. La prima viene sommata alla forza peso ed ha l'effetto di "alleggerire" il corpo, al limite sollevandolo. Chiamando infatti N la componente di forza normale esercitata dal corpo sul piano, essa sarà data da:

$$\vec{N} = \vec{P} + \vec{F}_v = -mg\,\hat{j} + F_v\,\hat{j} = -1221.5\,\hat{j}$$

che, come si può notare dal segno, ha lo stesso verso della forza peso. Quindi possiamo affermare che il corpo non viene sollevato.

Ora studiamo cosa accade alle componenti orizzontale del moto: la forza F_o trascina l'oggetto nel verso delle **i** positive, incontrando tuttavia la resistenza dell'attrito statico, La forza maggiore in modulo ci dirà se il corpo resta fermo (f_s>F_o) o si mette in moto (F_o>f_s). Dobbiamo quindi calcolare fs:

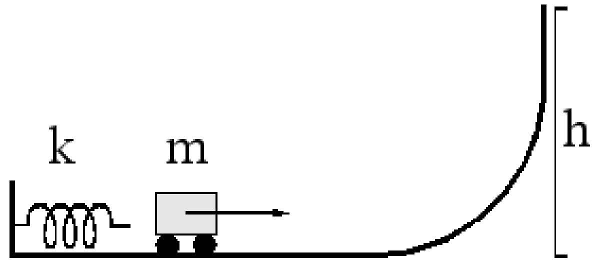
$$fs = \mu_s N = 0.3 \times 1221.5 = 366.45\text{N} \quad .$$

Quindi il corpo si mette in moto, lungo la traiettoria orizzontale, di moto uniformemente accelerato.

Lavoro ed energia cinetica

Es. 2 del 6/2/2004

Il corpo di massa 50 g viene rilasciato da una molla (di costante elastica k=1000N/m) compressa di 15 mm rispetto alla sua posizione di riposo. Determinare la massima quota raggiunta.



SOLUZIONE

Di questo sistema conosciamo solo la massa del carrello ed i parametri della molla Δx e k. Si può quindi calcolare l'energia potenziale accumulata nella molla e che si trasferirà al carrello sotto forma di energia cinetica, ovvero movimento.

Dal punto di vista energetico, possiamo studiare il sistema come suddiviso in tre differenti momenti:

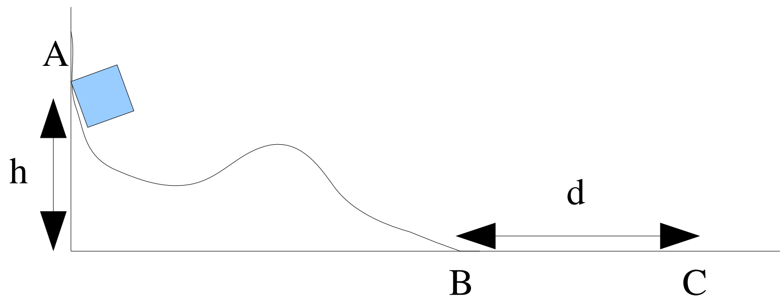
1) Il carrello è collegato alla molla, è fermo, e a quota zero, per cui tutta la sua energia è potenziale elastica: $E_1 = \frac{1}{2} k \Delta x^2$;
2) Il carrello è completamente staccato dalla mossa ma ancora a quota zero: tutta la sua energia è energia cinetica: $E_2 = \frac{1}{2} m v^2$;
3) Il carrello ha salito la rampa e si trova a quota massima, punto in cui il moto si arresta, ovvero la velocità e di conseguenza l'energia cinetica sono nulle: $E_3 = mgh$.

In realtà esistono due zone intermedie: nella prima il carrello è accelerato dalla molla ma non si è staccato da essa, per cui esso possiede sia energia potenziale elastica sia energia cinetica. Nella seconda il carrello sta salendo la rampa, per cui possiede sia energia cinetica sia energia potenziale gravitazionale. Per la soluzione dell'esercizio ci basta sapere che l'energia del sistema si conserva in quanto non sono presenti attriti. Quindi, poiché E_1=E_2=E_3, poniamo $\frac{1}{2} k \Delta x^2 = mgh$ da cui ricaviamo

$$\frac{1}{2} \frac{k \Delta x^2}{mg} = 0.23 \quad \text{cm.}$$

Es. 2 del 0/9/2004

Il cubetto di figura avente massa m scivola partendo da fermo e senza attrito lungo la curva L. Quale velocità possiede nel punto B? Esso esegue poi la corsa sul tratto orizzontale dove è presente attrito. Raggiunge il punto C? Se sì, con quale velocità transita da C? m=450g, h=26m, d=50m, μ_d=0.3, g=9,81 m/s^2



SOLUZIONE

Il punto B è il punto in cui il cubetto raggiunge la quota di minore livello del sistema. L'energia posseduta in B sarà tutta quanta energia cinetica, mentre nel punto A, trovandosi il corpo alla quota massima e fermo, possiederà solo energia potenziale gravitazionale. Poiché non sono presenti attriti, l'energia in A sarà uguale all'energia in B:

$$mgh=\frac{1}{2}mv_b^2$$

da cui $v_b=\sqrt{2gh}=22.59$ m/s.

Ora il corpo possiede energia cinetica ma si trova su una superficie con attrito. L'effetto dell'attrito è quello di generare una forza che si oppone al moto del corpo. Nel nostro caso, questa forza causa un'accelerazione che ad un certo istante annullerà la velocità del corpo fermandolo. Il problema si può risolvere con la cinematica, ma utilizziamo considerazioni sull'energia. In questo sistema l'energia totale del corpo varia, in quanto inizialmente esso possiede energia cinetica, ma alla fine esso si trova in stato di quiete (quindi ha energia cinetica nulla) e a quota zero (quindi con energia potenziale gravitazionale nulla). Questo accade poiché le forze di attrito non generano un campo di forze conservativo, e come conseguenza, la variazione di energia del corpo segue la legge

$$E_F-E_I=L_{ext}$$

ovvero la variazione dell'energia di un corpo è uguale al lavoro fatto dalle forze esterne sul corpo stesso. Quindi avremo:

$E_F-E_I=0-\frac{1}{2}mv_B^2=114.82$ J, e $L_{ext}=\vec{f}_d\cdot\vec{s}=f_d s\,cos180°=-f_d s=-\mu_d mg\,s=1.32\,s$

da cui ricaviamo:

$1.32s=114.82$, ovvero $s=86.98$ m. Quindi il corpo passa dal punto C. Per sapere con quale velocità vi passi, sfruttiamo nuovamente la relazione sull'energia $E_F-E_I=-f_d s$ ma questa volta poniamo s=50:

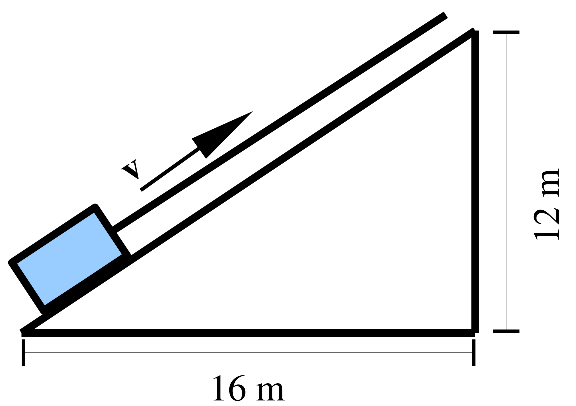
$$\frac{1}{2}mv_C^2-\frac{1}{2}mv_B^2=-f_s d$$

da cui

$$\frac{1}{2}mv_C^2-\frac{1}{2}mv_B^2=-f_s d\, v_C=\sqrt{\frac{2}{m}(-f_s d+\frac{1}{2}mv_B^2)}=22.46 \text{ m/s.}$$

Es. 4 del 15/7/2005

Un masso di massa M viene issato tramite una fune lungo un piano inclinato liscio a velocità costante v. Determinare la potenza del motore che trascina la fune. M=200 Kg, v=1.5 m/s.



SOLUZIONE

Il lavoro compiuto per portare il corpo alla sommità del piano inclinato equivale all'energia potenziale che esso possiede, una volta giunto in cima. Quindi

$L=mgh=23.54$ m/s.

Il tempo impiegato per salire si può ottenere tramite considerazioni cinematiche. Infatti possiamo dividere la lunghezza del piano inclinato (s=15 m) per la velocità costante ottenendo Δt=10 s. A questo punto, applicando la definizione P=L/Δt=2.35 W.

Gravitazione universale

Es. 2 del 6/2/2004

La cometa di Halley descrive un'orbita fortemente ellittica intorno al sole con un periodo di circa 74 anni terrestri. Determinare il rapporto tra il semiasse maggiore della sua orbita ed il diametro dell'orbita terrestre intorno al sole.

SOLUZIONE

La terza legge di Keplero afferma che per i corpi in orbita intorno al sole c'è proporzionalità tra il cubo del semiasse maggiore dell'ellisse ed il quadrato del periodo di rivoluzione. Questo significa che per la cometa di Halley e della Terra vale la relazione:

$$\frac{R_H^3}{T_H^2}=\frac{R_T^3}{T_T^2}$$

ovvero che il rapporto tra semiasse maggiore dell'orbita della cometa di Halley ed il semiasse maggiore dell'orbita della Terra è:

$$\frac{R_H}{R_T}=\sqrt[3]{\frac{T_H^2}{T_T^2}}=\sqrt[3]{\frac{74^2}{1}}=17.63 \quad .$$

Es. 7 del 12/11/2004

Assumendo valida la teoria di Keplero-Newton del Sistema Solare e approssimando l'orbita della Terra ad una circonferenza, determinare la massa del Sole conoscendo il raggio dell'orbita terrestre pari a 149.6 10^6 km. G=6.67 10^{-11} Nm^2/kg^2.

SOLUZIONE

Approssimando l'orbita della Terra ad una circonferenza, dobbiamo determinare quale sia la forza centripeta di quest'orbita circolare. Ovviamente si tratta della forza gravitazionale del sistema Sole-Terra, che va eguagliata all'espressione per la forza centripeta:

$$G\frac{M_S M_T}{R_T^2}=\frac{M_T v^2}{R_T}$$

da cui possiamo isolare la massa del Sole

$$M_S=\frac{v^2 R_T}{G} \quad .$$

La velocità tangenziale *v* della Terra può essere ricavata dalla relazione del moto circolare uniforme:

$$v=\frac{2\pi R_T}{T_T}$$

che, inserita nell'equazione precedente fornisce

$$M_S=\frac{4\pi^2 R_T^3}{G T_T^2}=1.99\ 10^{30}\ kg \quad .$$

Quantità di moto e sistemi di corpi

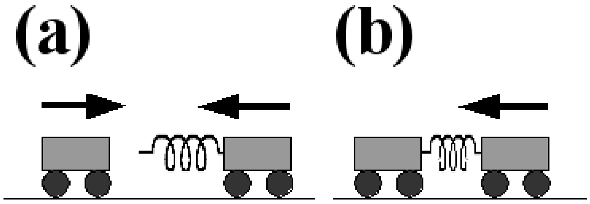
Es. 2 del 20/2/2004

Le due masse in figura si muovono lungo la stessa direzione, ma in verso opposto, rispettivamente alle velocità v_1 = 2 m/s e v_2 = 4 m/s ***(a)****. Alla massa m_2 è attaccata una molla di massa trascurabile e costante elastica k = 500 N/m. Determinare, nell'istante in cui m_2 si muove verso sinistra con una velocità v'_2 = 2 m/s, la velocità di m_1* ***(b)****. Determinare inoltre, nello stesso istante, la compressione della molla.*

Suggerimenti:

1) *Il sistema (carrelli + molla) è isolato dall'esterno per quanto riguarda l'asse orizzontale, quindi si applica il principio di conservazione della quantità di moto;*
2) *Le uniche forze agenti nel sistema sono di natura elastica, quindi conservative, quindi...*

m_1 = 1 kg;
m_2 = 2 kg;
v_1 = 2 m/s;
v_2 = 4 m/s;
k = 500 N/m;
v'_2 = 2 m/s



SOLUZIONE

a) Applicando la conservazione della quantità di moto al sistema delle due masse otteniamo:

$$\vec{p}_{1i}+\vec{p}_{2i}=\vec{p}_{1f}+\vec{p}_{2f}$$

ovvero

1×2 + 2×(-4)=1×v_{1f} + 2×(-2)

da cui v_{1f}=-2 m/s

b) Per quanto riguarda la seconda domanda, notiamo innanzitutto che il sistema è isolato, che sui carrelli non agiscono forze fino a quando non entrano in contatto, momento in cui la molla si comprime esercitando quindi la forza di allungamento secondo la legge di Hooke. Poiché sono presenti solo forze conservative, possiamo concludere che l'energia meccanica del sistema si conserva. Di conseguenza determiniamo la compressione della molla dalla seguente equazione:

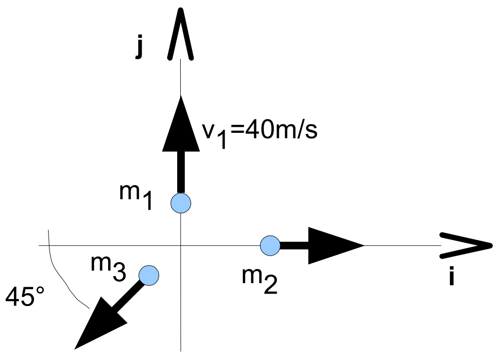
$$\frac{1}{2}m_1^2 v_{1i}^2+\frac{1}{2}m_2^2 v_{2i}^2=\frac{1}{2}m_1^2 v_{1f}^2+\frac{1}{2}m_2^2 v_{2f}^2+\frac{1}{2}k\,x^2$$

da cui ricaviamo x=0.22 m.

Es. 3 del 25/2/2005

Un corpo di massa M in quiete posto nell'origine degli assi esplode in tre frammenti che si muovono come indicato in figura. È nota la velocità m_1. Determinare il modulo della velocità degli altri due frammenti.

M=30 kg
m1=5 kg
m_2=10 kg
m_3=15 kg



SOLUZIONE

Il problema in due dimensioni è di natura vettoriale. Poiché il sistema è isolato, la quantità di moto si conserva:

$$\vec{P}_i=\vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{P}_3$$

Poiché il corpo è inizialmente fermo, prima dell'esplosione, il momento P_i=0. Quindi le equazioni per la conservazione della quantità di moto in due dimensioni diventano:

$$m_1 v_1=m_3 v_3 \sin 45\,°$$

$$m_2 v_2=m_3 v_3 \cos 45$$

da cui ricaviamo

$$v_3 = \frac{m_1 v_1}{m_3 \sin 45^\circ} = 18.8\ m/s$$

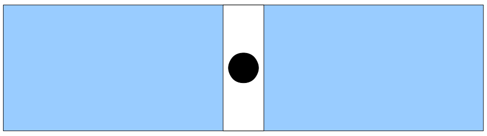
.

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2 \cos 45^\circ} = 20\ m/s$$

Moto oscillatorio

Es. 6 del 11/2/2005

Un corpo puntiforme di massa m su cui agisce solamente una forza di tipo elastico si muove orizzontalmente di moto armonico semplice. Esso viene però visto solo quando passa dietro la finestra verticale di figura, posta al centro dell'oscillazione, per cui vengono misurate la velocità e con cui esso passa ed il periodo T del passaggio (verso destra). Determinare A, ampiezza massima dell'oscillazione.
m=0.2 kg, T=0.25 s, v=30 m/s



SOLUZIONE

Dal periodo T ricaviamo la pulsazione $\omega_0 = 2\frac{\pi}{T} = 25{,}12\ rad/s$. Dalla relazione $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ricaviamo k=126.20 N/m. A questo punto, poiché il sistema è isolato e in esso sono presenti solo forze di tipo conservativo, possiamo eguagliare l'energia cinetica al centro dell'oscillazione all'energia potenziale agli estremi, ricavando l'ampiezza massima:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

ovvero $A = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0 = \frac{v_0}{\omega_0} = 1.19\ m$

Es. 4 del 30/6/2006

Una massa m=5 kg collegata ad una molla compie oscillazioni armoniche con frequenza f=2Hz. Sapendo che essa transita per il punto centrale all'istante t=0 con velocità v_0=0.5 m/s, determinare la legge del moto x=x(t) dell''oscillazione.

SOLUZIONE

La soluzione generale per l'equazione di moto oscillatorio è:
$x(t)=A \cos\omega_0 t + B \sin\omega_0 t$
dove A è la posizione all'istante t=0, $B=1/\omega_0\ dx(0)/dt=1/\omega_0\ v(0)$. Nel nostro esercizio $\omega_0 = 2\pi f = 12.56\ rad/s$, A=0 e B=0.16 m. L'equazione di moto è quindi
x(t)=0.16 sin 12.56t.

Momento angolare

Es. 8 del 21/11/2003

Un cilindro di ghiaccio secco di massa M=300 g ruota attorno sul proprio asse ad una frequenza f= 8 Hz. Per evaporazione la sua massa, nell'intervallo di 10 minuti, si riduce a 270 g, restando il cilindro dello stesso raggio. Determinare la sua frequenza di rotazione e la velocità angolare ω finale. Si considerino trascurabili tutti i possibili attriti in gioco.

Si ricorda che il momento di inerzia del cilindro intorno al proprio asse è $I=(1/2)MR^2$.

SOLUZIONE

L'evaporazione del ghiaccio secco, avvenendo in maniera uniforme in tutte le direzioni, non modifica il momento angolare $L=I\omega$ del sistema. Possiamo considerare quindi il sistema come isolato, in cui il momento angolare si conservi, ovvero $L_i=L_f$.

Quindi, sfruttando anche la relazione $\omega=2\pi f$, dovrà valere la seguente equazione

$$\frac{1}{2}M_i R^2 2\pi f_i=\frac{1}{2}M_f R^2 \omega_f \quad ,$$

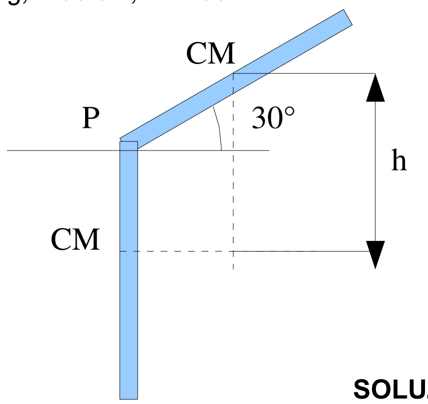
da cui

$$\omega_f=2\pi f_i \frac{M_i}{M_f}=55.82\ rad/s \quad .$$

Es. 1 del 27/7/2004

L'asta rigida di massa m e lunghezza l di figura vincolata dal perno P liscio, viene lasciata cadere da ferma nel campo di gravità terrestre. Determinare la velocità con cui A transita dal punto di minimo.

M=200 g, l=60 cm, $I=ml^2/3$.



SOLUZIONE

Il sistema è isolato per cui l'energia meccanica si conserva. Inizialmente l'asta possiede energia potenziale gravitazionale, calcolata rispetto alla posizione del centro di massa. Se consideriamo come potenziale $U_g=0$ la posizione del centro di massa nel momento in cui l'asta è verticale, allora l'energia potenziale iniziale è

$$U=Mgh=Mg\left(\frac{l}{2}+\frac{l}{2}\sin 30°\right)=0.88\ J \quad .$$

Questa va eguagliata all'energia cinetica rotazionale (infatti non esiste nel sistema energia cinetica traslazionale)

$$K_R=\frac{1}{2}I\omega^2$$

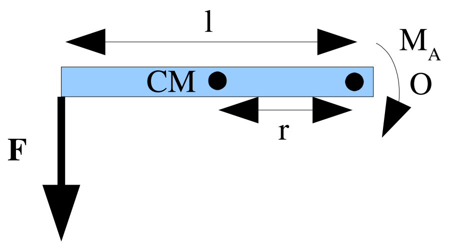
dalla quale si ricava

$$\omega=\sqrt{\frac{2U}{I}}=8.56\ rad/s \quad .$$

Es. 4 del 9/9/2005

Un'asta di massa m e caratteristiche come in figura, inizialmente ferma, viene mossa applicando una forza F costantemente ortogonale all'asta stessa. La cerniera da un momento delle forze d'attrito Ma. Determinare la velocità angolare con cui l'asta passa dalla posizione iniziale a 180°. Non considerarne la forza peso!

M=0.4 kg, l=80 cm, M_A=30 Nm, F=100 N, $I_{CM}=(1/12)ml^2$.



SOLUZIONE

Poiché la forza è sempre perpendicolare all'asta, il momento meccanico rispetto al pernio O che essa genera è sempre uguale, in modulo, a M_F=Fl=80 Nm. Inoltre per la regola della mano destra tale momento è uscente dal piano del disegno. Il momento totale agente sull'asta è quindi $M_{TOT}=M_F-M_A$=50 Nm. Questo momento è anche $M_{TOT}=I\alpha$, dove è l'accelerazione angolare α. Tuttavia il testo ci fornisce il momento I_{CM} di inerzia rispettivo al centro di massa. Per usare l'uguaglianza appena vista dobbiamo considerare il momento di inerzia I rispetto al perno intorno a cui ruota l'asta. Per il teorema di Steiner il momento rispetto al perno O è il momento di inerzia rispetto al centro di massa sommato al momento di inerzia del centro di massa rispetto al perno O:

$$I_O=I_{CM}+mr^2=\frac{1}{12}ml^2+mr^2=0.021+0.032=0.053\ kgm^2 \quad .$$

Ora possiamo finalmente sfruttare la relazione

$$M_{TOT}=I_O\alpha$$

da cui ricaviamo α=943,40 rad/s^2.

Dalle leggi del moto rotazionale sappiamo che:

$$\omega_f^2-\omega_i^2=2\alpha(\theta_f-\theta_i)$$

Noi poniamo θ_f=180°=π rad, θ_i=0°=0 rad ω_i=0 rad/s, α=943,40 rad/s^2 e risolviamo per ω_f:

$$\omega_f=\sqrt{2\alpha\theta_f}=76.97\ rad/s \quad .$$