INGEGNERIA GESTIONALE
corso di Fisica Generale

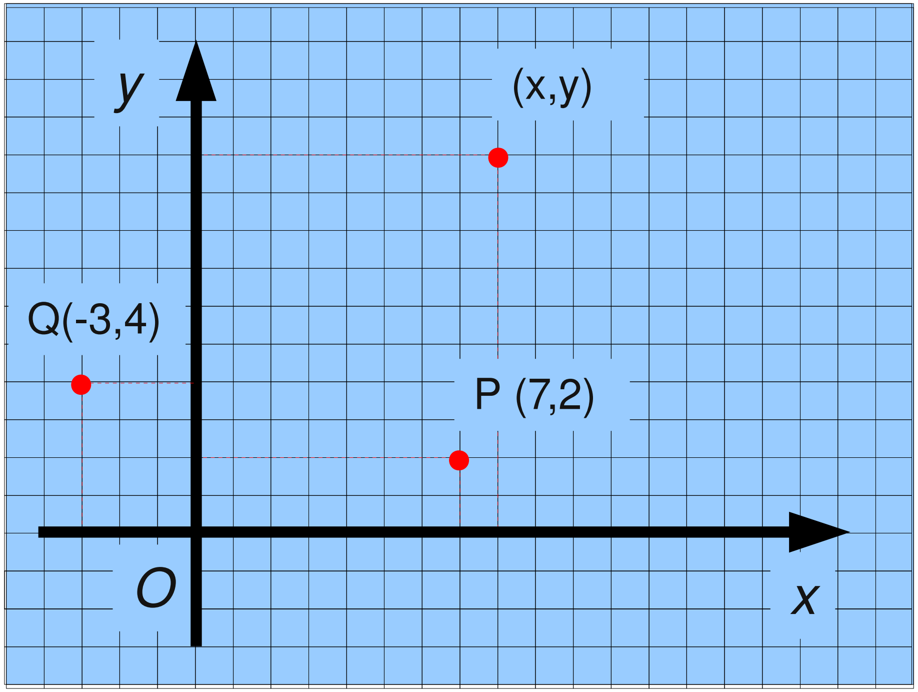
Prof. E. Puddu

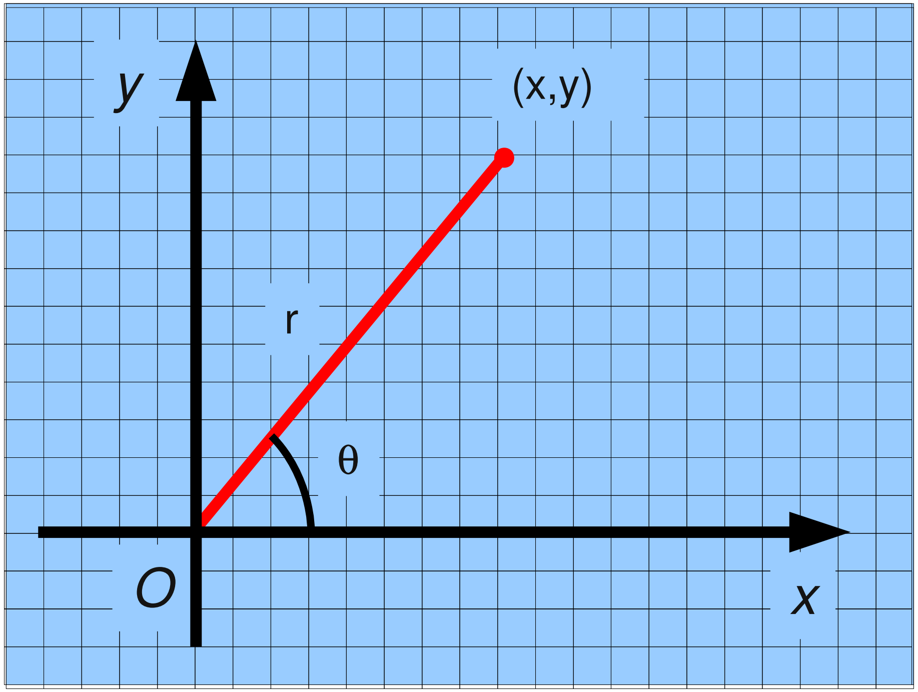
LEZIONE DEL 23 SETTEMBRE 2008

Introduzione

LIUC

Sistemi di coordinate



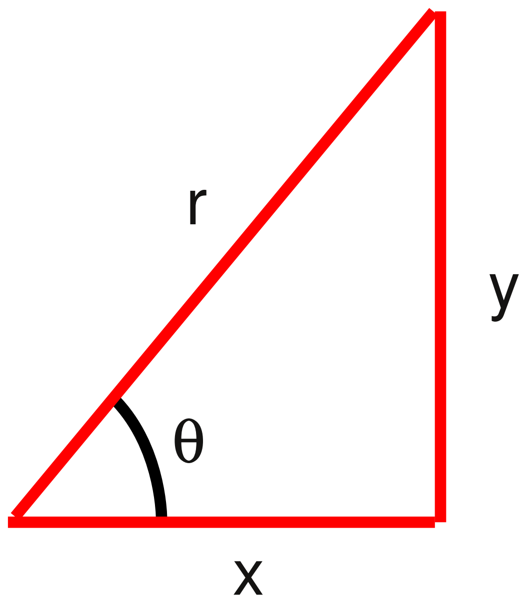


Coordinate cartesiane. Ogni punto è individuato da due coordinate (x,y).

Coordinate polari piane. Ogni punto è rappresentato da una distanza r e dall'angolo θ, dove θ è misurato in senso antiorario a partire dall'asse x positivo.

Sistemi di coordinate

C'è corrispondenza tra coordinate cartesiane e coordinate polari, come si può vedere dal triangolo in figura!



Si può passare dalle une alle altre in questo modo:

cartesiane → polari

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

polari → cartesiane

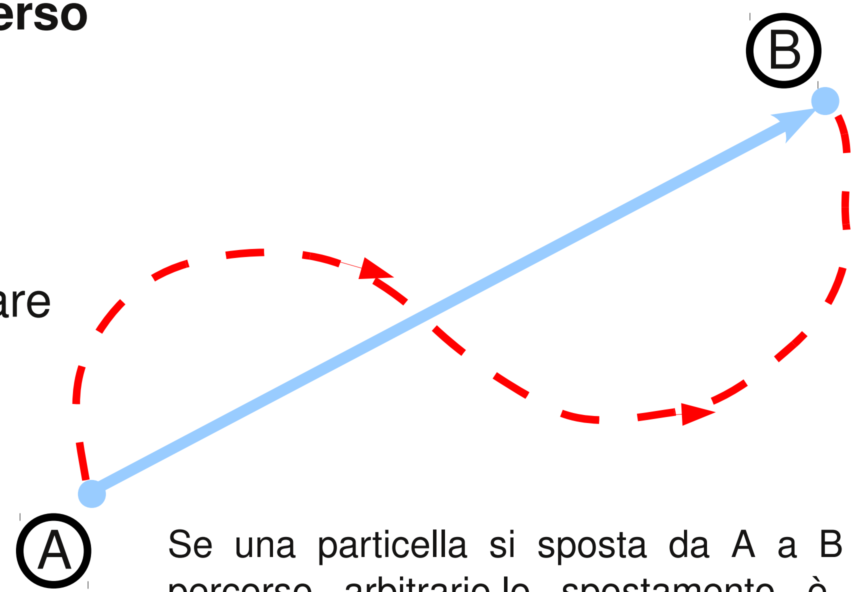
$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

Grandezze vettoriali e scalari

Un vettore è una quantità fisica che deve essere specificata in modulo, direzione e verso

Esempi di grandezze vettoriali
•Posizione (P(x,y))
•Spostamento, velocità, accelerazione
•Forze, momento lineare, momento angolare
•...



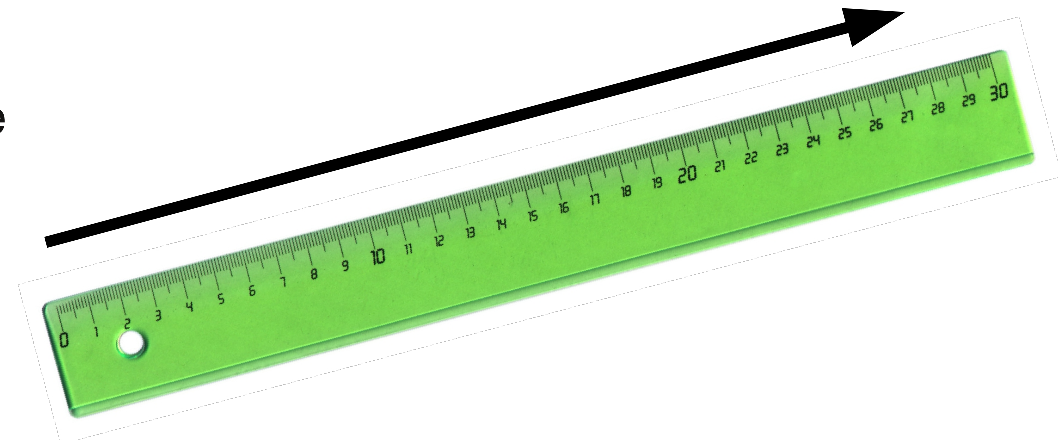
Se una particella si sposta da A a B lungo un percorso arbitrario,lo spostamento è il vettore indicato dalla freccia da A a B.

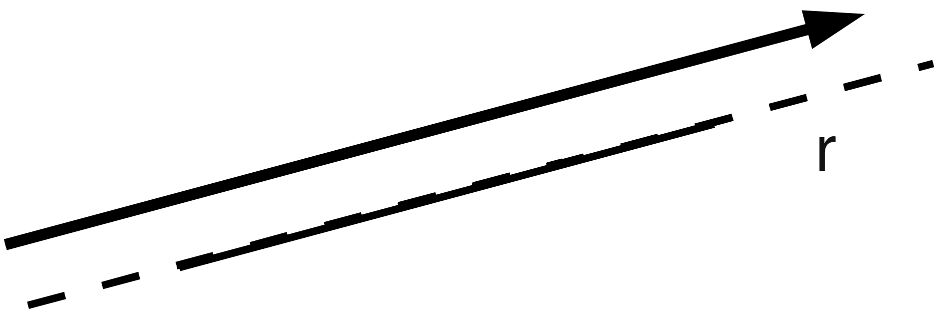
Una grandezza scalare è specificata da un singolo valore con un'appropriata unità di misura e non ha direzione

Esempi di grandezze scalari
•Temperatura (gradi Farenheit, Celsius, Kelvin)
•Massa (grammo, oncia, kilogrammo)
•Tempo (secondo)

Grandezze vettoriali

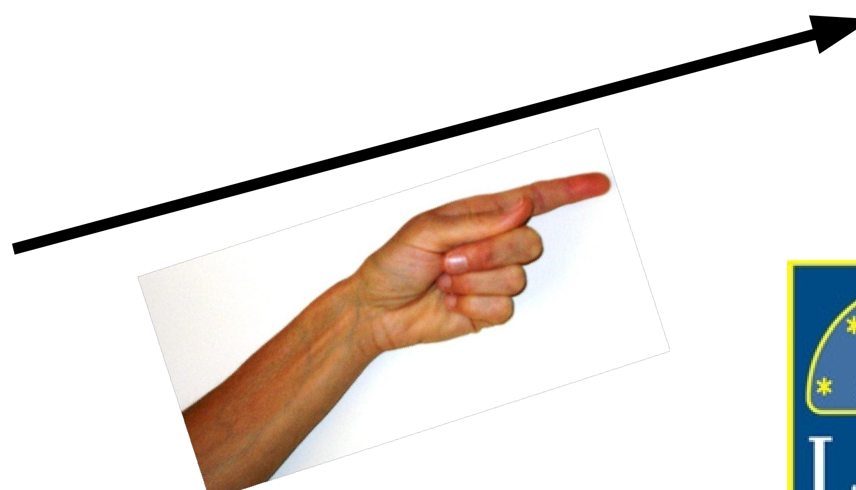
Modulo
Il modulo è la lunghezza del vettore, quindi è uno scalare!





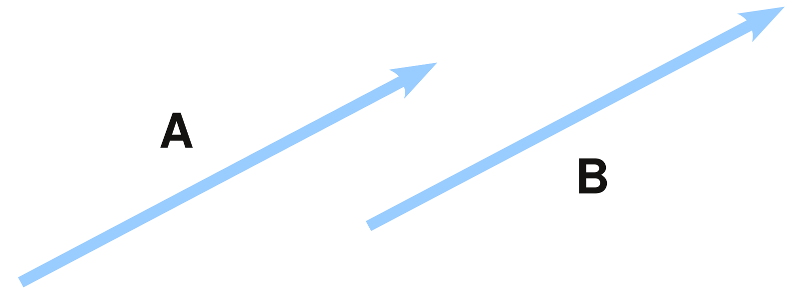
Direzione
La direzione è la retta di appartenenza del vettore

Verso
Il verso di un vettore è quello che va dalla sua coda alla sua freccia

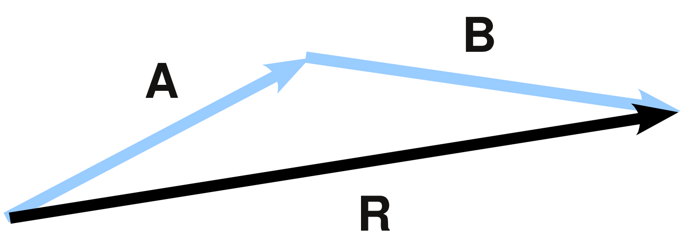


Proprietà dei vettori

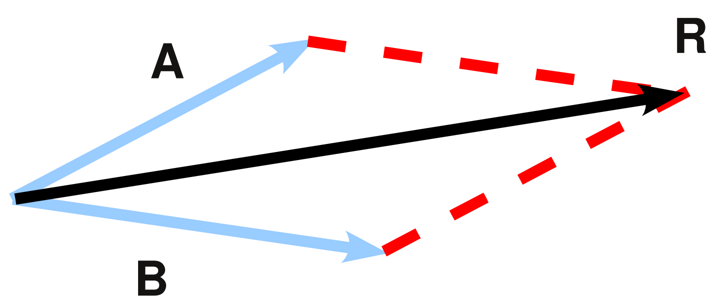
Uguaglianza di due vettori
Due vettori **A** e **B** sono uguali se hanno stessi modulo, direzione e verso.



Somma di due vettori
Il vettore **R** risultante dalla somma **A**+**B** si può ottenere dai due metodi:

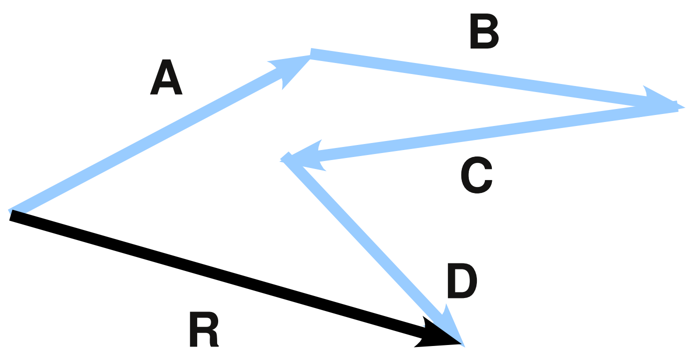


del triangolo



del parallelogrammo

Proprietà dei vettori



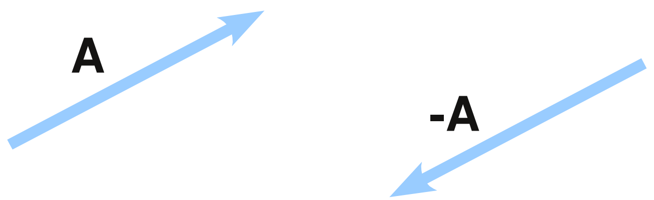
Metodo della poligonale

Somma di più vettori

Se i vettori da sommare sono molti si può:

•Applicare reiteratamente il metodo del parallelogramma

•Estendere il metodo del triangolo che diviene metodo della poligonale



Opposto di un vettore

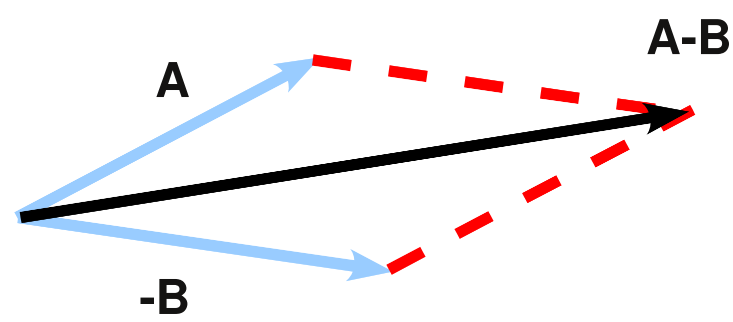
L'opposto di un vettore **A** è quel vettore **-A** che sommato ad **A** mi da il vettore nullo

Il vettore opposto di **A** possiede stesso modulo e direzione ma verso opposto

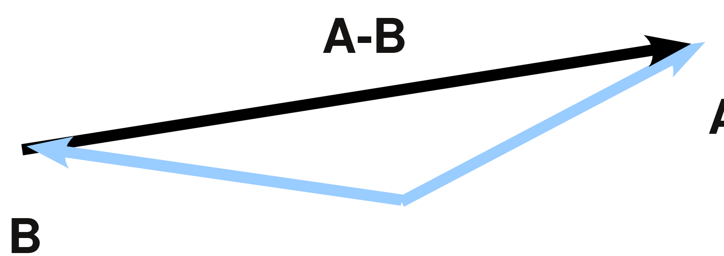
Proprietà dei vettori

Differenza di due vettori

La differenza **A-B** tra due vettori è la somma tra il vettore **A** e l'opposto di **B**.



Si può applicare anche il metodo del parallelogramma: il vettore differenza giace sulla diagonale del parallelogramma!



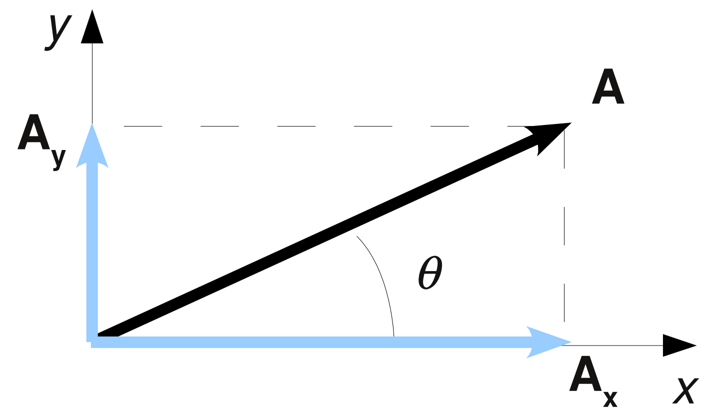
Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Se un vettore **A** viene moltiplicato per una quantità scalare positiva *m*, il prodotto è un vettore che ha stessa direzione e verso di **A** e modulo *m*A. Se *m* è un numero negativo, il prodotto è un vettore con stessa direzione, verso opposto e modulo *m*A.

Componenti di un vettore

Scomposizione di un vettore

Se come due vettori si possono sommare per dare un terzo vettore, allora ogni vettore **A** può essere scomposto in due generici vettori, per esempio orizzontale e verticale, lungo gli assi cartesiani del piano! $\mathbf{A_x}$ ed $\mathbf{A_x}$ si chiamano vettori componenti/coordinate di **A**, dove $\mathbf{A=A_x+A_x}$.



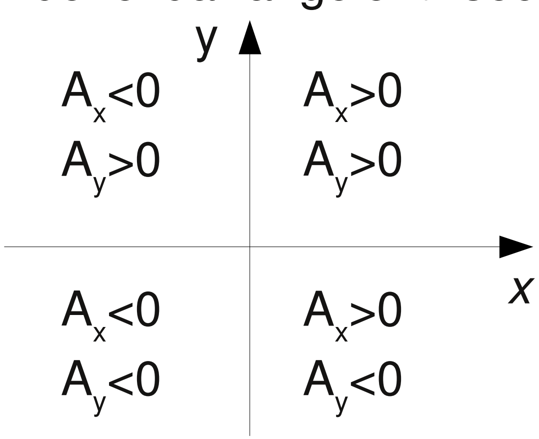
Le componenti di **A** hanno valore in modulo che si ricava dalla trigonometria:

$$A_x = A\cos\theta$$
$$A_y = A\sin\theta$$

ovvero

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$
$$\theta = \arctan\frac{A_y}{A_x}$$

I segni delle componenti dipendono dall'angolo θ secondo lo schema qui presentato!



Vettori unitari

Un vettore unitario è un vettore adimensionale di modulo 1.

Per i vettori unitari si usano i simboli **i** e **j**. Se prendo **i** e **j** nel verso di $\mathbf{A}_x$ e di $\mathbf{A}_y$, allora posso riscrivere questi ultimi come $\mathbf{A}_x=A_x\mathbf{i}$ e $\mathbf{A}_x=A_y\mathbf{j}$, ($A_x$ e A_y si chiamano coordinate) da cui

$$\mathbf{A}=A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}$$

La risultante della somma di due vettori allora sarà

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} &= \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \\ &= A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j} \\ &= (A_x+B_x)\boldsymbol{i}+(A_y+B_y)\boldsymbol{j} \\ &= R_x\boldsymbol{i}+R_y\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

Quindi il vettore risultante ha per coordinate la somma algebrica delle coordinate dei vettori addendi!

Prodotto scalare

Il prodotto scalare di due vettori A e B è un numero reale definito come

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta$$

Dove θ è l'angolo compreso tra i vettori; questa definizione è legata alle coordinate polari di A e B. Una definizione analoga, derivante dalle coordinate cartesiane è

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_x B_x + A_y B_y$$

ovvero il prodotto scalare è la somma del prodotto delle componenti aventi lo stesso indice.

Proprietà del prodotto scalare

i) Il prodotto scalare di due vettori ortogonali è nullo;

ii) Il prodotto scalare gode della proprietà commutativa: $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

iii) Il prodotto scalare gode della proprietà distributiva: $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

iv) $\hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{j}\cdot\hat{i}=0$

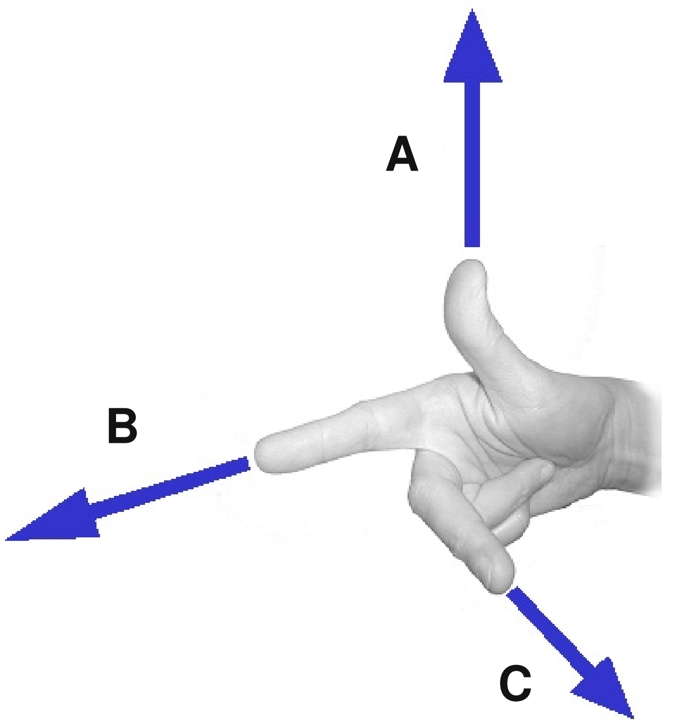
v) se A è un vettore allora il suo modulo è $A=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$

Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale di due vettori A e B è un vettore in modulo uguale a

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = AB \sin\theta$$

Dove θ è l'angolo compreso tra i vettori. Per quanto riguarda direzione e verso di **C** dobbiamo usare la regola della mano destra



Proprietà del prodotto vettoriale

i) Il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo;

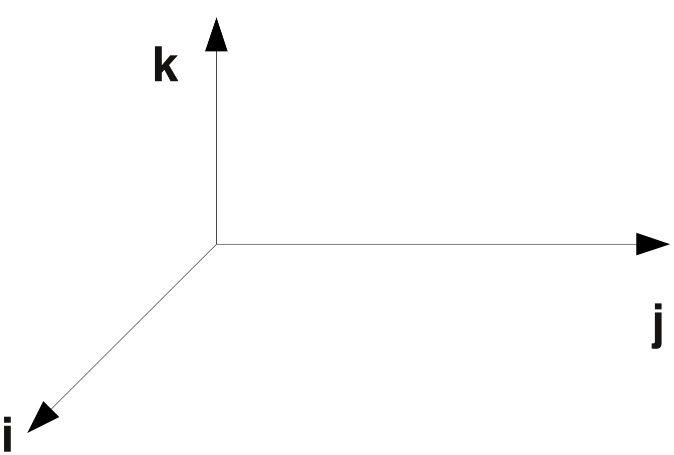
ii) è anticommutativo: $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$

iii) Il prodotto scalare gode della proprietà distributiva:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$$

iv) $\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k} \; ; \; \hat{j} \wedge \hat{k} = \hat{i} \; ; \; \hat{k} \wedge \hat{i} = \hat{j}$

v) $\hat{i} \wedge \hat{i} = \hat{j} \wedge \hat{j} = \hat{k} \wedge \hat{i} = 0$



Unità di misura

LUNGHEZZA
Il metro (m) è la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un tempo uguale a 1/299792458 secondi.

MASSA
Il chilogrammo (kg), definito come la massa di un particolare cilindro di lega platino-iridio conservato all'International Bureau di Pesi e Misure di Sèvres, Francia.

TEMPO
Un secondo (s) è definito come 9192631770 volte il periodo delle vibrazioni di un atomo di cesio 133.

FORZA
Un newton (N) è definito come la forza che, agendo su un corpo di massa 1 kg, produce un'accelerazione di 1 m/s^2.

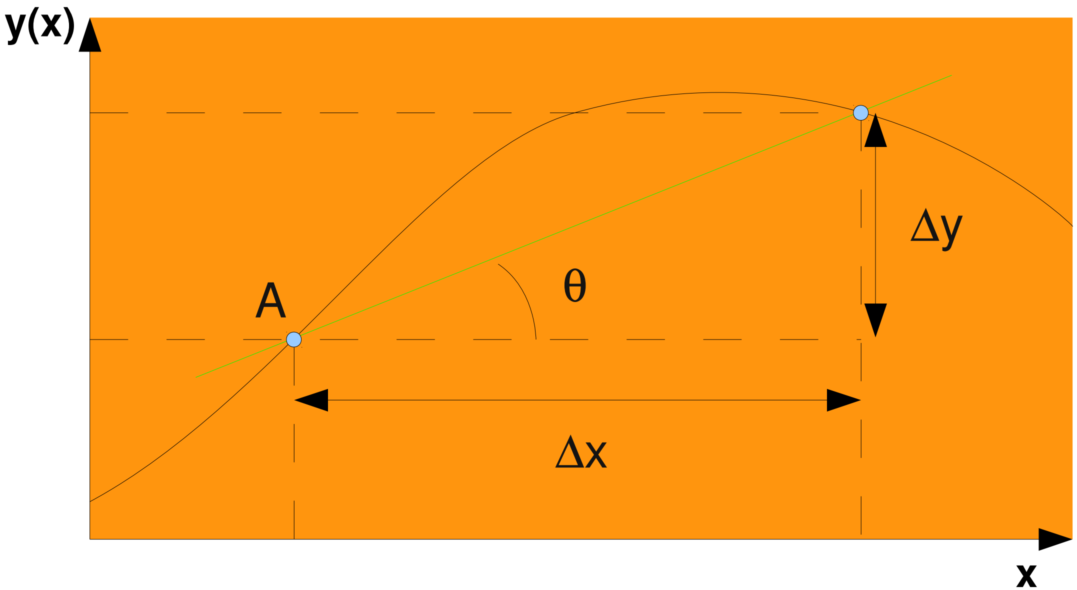
LAVORO
È il lavoro compiuto da una forza di 1 N che muove un corpo per 1 m nella direzione della forza stessa.

Calcolo differenziale

In fisica è utilissimo utilizzare il calcolo differenziale in quanto permette studiare l'andamento nel tempo, o nello spazio, di una grandezza fisica.
Data una funzione y(x)=f(x), la derivata ci da indicazioni sul fatto che la funzione, in un intervallo o in un punto preciso, sia crescente, decrescente o nulla. Definiamo derivata di y rispetto ad x il limite del rapporto incrementale

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

Dove Δx e Δy sono quelli di figura.



Bisogna precisare che la tangente trigonometrica dell'angolo θ è proprio la funzione derivata calcolata nel punto A!!! Da ricordare che quando $y(x)=ax^n$ allora la sua funzione derivata è

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$$

Mentre la derivata di una funzione costante è uguale a zero.

Calcolo differenziale

Proprietà delle derivate

i) Derivata del prodotto di due funzioni. Se f(x)=g(x)h(x) allora la derivata di f(x) è

$$\frac{df(x)}{dx}=g(x)\frac{dh(x)}{dx}+h(x)\frac{dg(x)}{dx}$$

ii) Derivata della somma di due funzioni. Se f(x)=g(x)+h(x) allora la derivata di f(x) è

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{dg(x)}{dx}+\frac{dh(x)}{dx}$$

iii) Derivata di funzioni composte. Se y(x)=f(x) e x=g(z) allora la derivata di y(x) rispetto a z è il prodotto di due derivate

$$\frac{dy(x)}{dz}=\frac{dy(x)}{dx}\frac{dx}{dz}$$

iv) Derivata seconda. La derivata seconda di y(x) rispetto ad x è la derivata della derivata dy/dx

$$\frac{d^2y(x)}{dz^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy(x)}{dx}\right)$$

Calcolo integrale

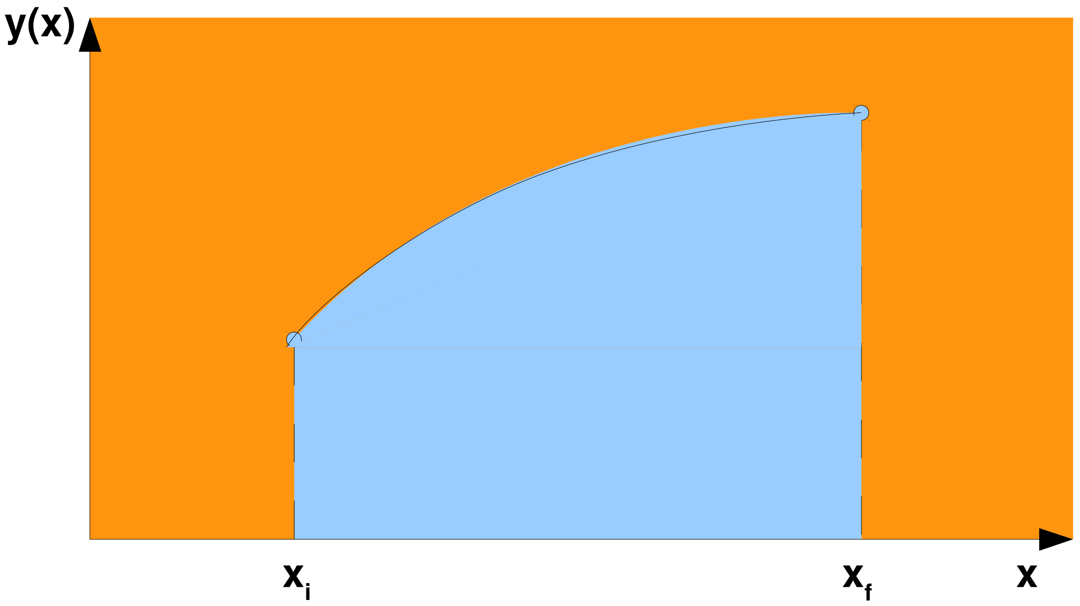
L'integrazione è la funzione matematica inversa della derivazione e si indica con

$$y(x) = \int f(x)\,dx$$

L'integrale indefinito I(x) è definito come

$$I(x) = \int f(x)\,dx$$

dove f(x) è la funzione integranda e f(x)=dI(x)/dx.



L'integrale definito di una funzione rappresenta l'area della funzione stessa ed si rappresenta con il simbolo

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)\,dx$$

L'integrale definito di una funzione rappresenta l'area della funzione stessa ed si rappresenta con il simbolo