INGEGNERIA GESTIONALE
corso di Fisica Generale

Prof. E. Puddu

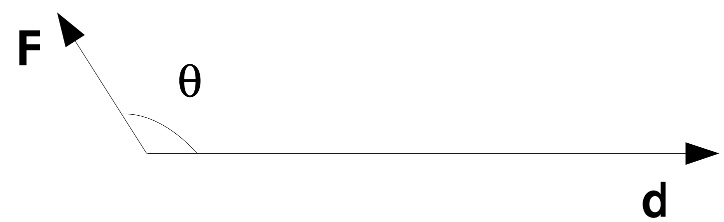
LEZIONE DEL 7 – 8 OTTOBRE 2008

Lavoro ed energia cinetica

Il lavoro

Il lavoro *W* fatto su un oggetto da un agente che esercita su di esso una forza costante è uguale al prodotto della componente della forza lungo lo spostamento per lo spostamento stesso:

$$W=\vec{F}\cdot\vec{d}=F\,d\cos\theta$$

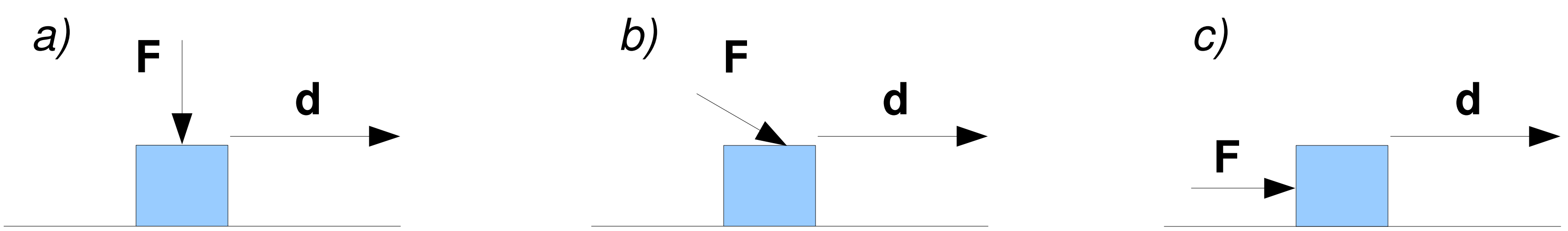


Il lavoro può essere positivo, negativo, o nullo:

•$-90°<\theta<90°$ → lavoro positivo
•$90°<\theta<270°$ → lavoro negativo
•$\theta= 90°,-90°$ → lavoro nullo
•$\theta= 0°$ → lavoro massimo W=Fd
•$\theta= 180°$ → lavoro minimo W=-Fd

L'unità di misura del lavoro è il Joule, definito come il lavoro compiuto da una forza di 1 N che agisca parallelamente ad uno spostamento di 1 m.

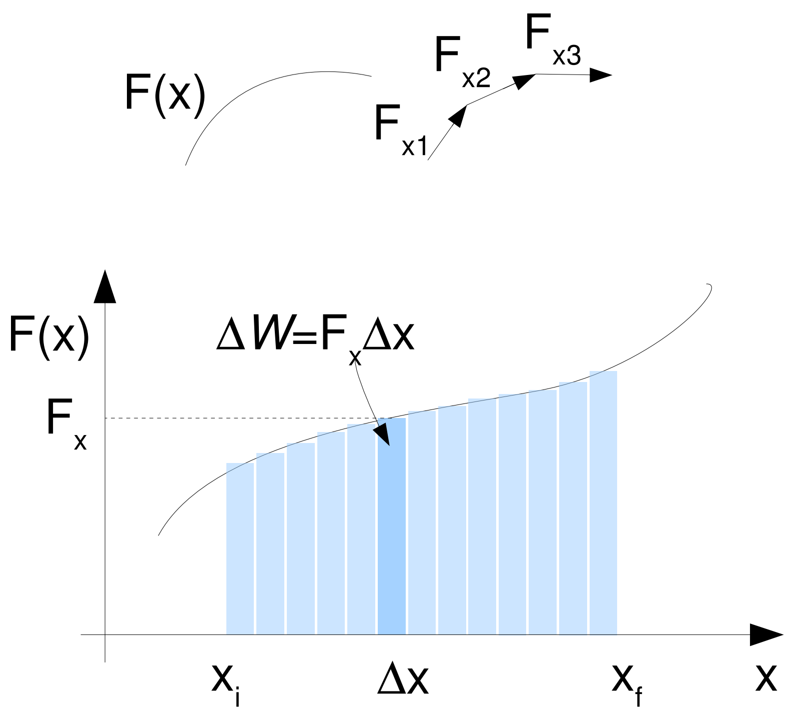
Essendo il concetto di lavoro legato al movimento, se teniamo un corpo sollevato a una quota, allora il lavoro compiuto sarà nullo. Questa considerazione si può comprendere dall'esempio:



È comprensibile che la forza in figura *c)* abbia maggior efficacia!

Lavoro fatto da una forza variabile

Consideriamo un punto materiale che si muova lungo l'asse x sotto l'azione di una forza variabile F(x) dalla posizione x_i alla posizione x_f. Non possiamo usare la relazione $W = Fd\cos\theta$ perché valida solo se F è costante!!!



Possiamo approssimare la forza con una poligonale di segmenti sufficientemente piccoli per cui la forza non vari apprezzabilmente all'interno di essi. Quindi moltiplichiamo ogni forza appena costruita per lo spostamento corrispondente Δx, ricavando il lavoro ΔW, e poi sommiamo tutti i lavori tra x_i e x_f.

Al limite di $\Delta x \rightarrow 0$, la sommatoria tende all'integrale...

$$W = \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx$$

Quindi il lavoro compiuto da una forza non costante lungo l'asse delle ascisse è l'area compresa tra la la curva che rappresenta la forza e l'asse delle ascisse stesso.

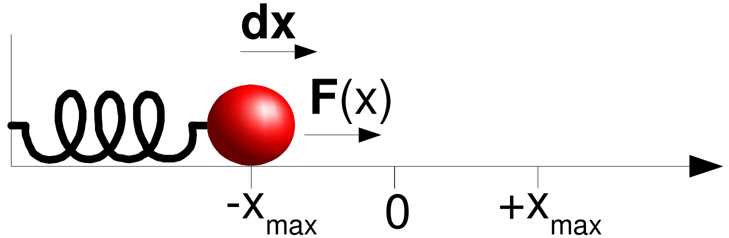
Lavoro fatto da una molla

Una molla allungata o compressa rispetto alla posizione di equilibrio esercita una forza di richiamo F=-kx (legge di Hooke).

Se una molla viene compressa fino alla coordinata $x=-x_{max}$ e ad essa viene collegata una massa m, allora quando viene lasciata libera di muoversi questa sposterà la massa fino alla posizione $x=x_{max}$ (quando invece una molla viene allungata fino a x_{max}, e quindi viene lasciata libera, essa eserciterà una forza di richiamo e sposterà la massa fino a $-x_{max}$).

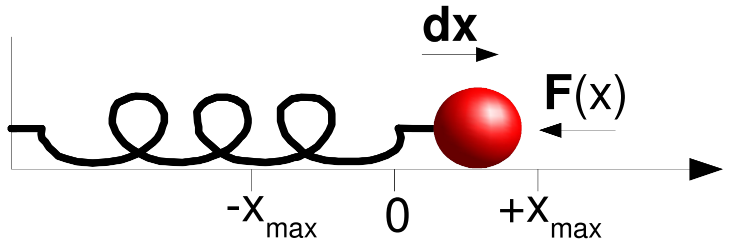
Il lavoro fatto dalla molla per spostare il blocco di massa m dalla posizione $x=-x_{max}$ alla posizione x=0 è dato allora dall'integrale della forza calcolato tra le posizioni iniziali e finali:

$$W_1 = \int_{-x_{max}}^{0} (-kx)\,dx = +\frac{1}{2} k\, x_{max}^2$$



Il lavoro ottenuto è positivo, com'era intuibile dal fatto che forza e spostamento sono entrambi nel verso delle x positive (quindi concordi!!!). Il lavoro esercitato dalla stessa molla per spostare il blocco di massa m da x=0 a $x=x_{max}$ è invece

$$W_2 = \int_{0}^{x_{max}} (-kx)\,dx = -\frac{1}{2} k\, x_{max}^2$$

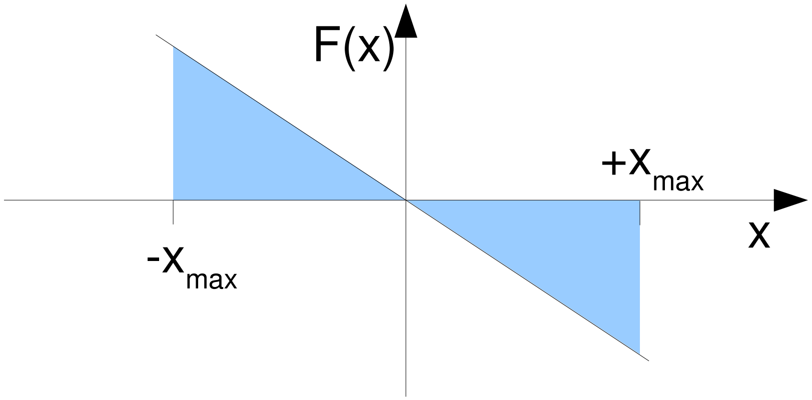


Ed è opposto al risultato ottenuto dalla formula precedente, quindi negativo. Anche questo risultato era intuibile dal fatto che, mentre la molla esercitava una forza di richiamo diretta verso le x negative, il blocchetto si stava muovendo ancora nel verso delle x positive! Forza e spostamento erano antiparalleli!

Lavoro fatto da una molla

Quindi il lavoro fatto da una molla per spostare un blocco di massa m tra le posizioni $-x_{max}$ e $+x_{max}$ è la somma $W = W_1 + W_2$ dei due lavori appena calcolati e quindi è uguale a zero!

Dal punto di vista analitico si osserva che le due aree comprese tra la retta F(x)=-kx e l'asse delle ascisse sono uguali in valore assoluto ma opposte in segno!



Il lavoro ottenuto è positivo, com'era intuibile dal fatto che forza e spostamento sono entrambi nel verso delle x positive (quindi concordi!!!).

Il lavoro esercitato dalla stessa molla per spostare il blocco di massa m dalla posizione x=0 alla posizione $x = x_{max}$ è invece

$$W = \int_0^{x_{max}} (-kx)\,dx = -\frac{1}{2} k\, x_{max}^2$$

Ed è opposto al risultato ottenuto dalla formula precedente, quindi negativo. Anche questo risultato era intuibile dal fatto che, mentre la molla esercitava una forza di richiamo diretta verso le x negative, il blocchetto si stava muovendo ancora nel verso delle x positive! Forza e spostamento erano antiparalleli!

Il lavoro svolto contro la molla (per esempio da una persona che allunghi o comprima la molla, è opposto in segno ai risultati trovati in precedenza!)

Energia cinetica e teorema lavoro – energia cinetica

Supponiamo che un blocco di massa m sia spostato da una forza F che agisce lungo la retta per uno spostamento d lungo la retta:

$$W = Fd = mad$$

Dove abbiamo usato la relazione F=ma, nota dalla seconda legge di Newton. Sfruttando ora la relazione, nota dalla cinematica

$$v_f^2 - v_i^2 = 2\,a\,d \;\rightarrow\; ad = \frac{1}{2}\left(v_f^2 - v_i^2\right)$$

E inserendola nell'equazione precedente, ricaviamo

$$W = Fd = mad = \frac{1}{2} m\left(v_f^2 - v_i^2\right) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

La quantità ½ mv^2 è sempre positiva e si chiama “energia cinetica”. L'energia cinetica si indica con la lettera maiuscola K e, come il lavoro, si misura in Joule.

Possiamo allora dalla relazione precedente affermare che *il lavoro W compiuto su una massa m da una forza F è uguale alla sua variazione di energia cinetica K.*

Da questa affermazione capisco che, se su di un corpo compio un lavoro positivo, allora la sua velocità aumenterà; al contrario, se compio un lavoro negativo, la sua velocità diminuirà. La stessa dimostrazione può essere svolta per mezzo del calcolo integrale:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx = m \int_{x_i}^{x_f} a_x\,dx$$

Energia cinetica e teorema lavoro – energia cinetica

Usando ora il calcolo differenziale trasformiamo l'accelerazione in una funzione della velocità

$$a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v$$

e la sostituiamo nell'integrale precedente

$$W = m\int_{x_i}^{x_f} a_x\,dx = m\int_{v_i}^{v_f} v\frac{dv}{\cancel{dx}}\cancel{dx}$$

$$= m\int_{v_i}^{v_f} v\,dv = \frac{1}{2}m v_f^2 - \frac{1}{2}m v_i^2$$

Casi con attrito dinamico

Consideriamo ora l'energia cinetica persa a causa dell'attrito dinamico.
Supponiamo che sul blocco di massa m agisca la sola forza di attrito dinamico f_k,

L'equazione di Newton per questo caso è

$$-f_k = m a_x$$

Moltiplicando entrambi i membri la distanza percorsa d otteniamo

$$-f_k d = m a_x d$$

E sfruttando la relazione cinematica $v_f^2 - v_i^2 = 2a_x d$ otteniamo

$$-f_k d = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Ovvero definiamo il lavoro compiuto da una forza di attrito che agisce lungo una distanza d come la variazione di energia cinetica di un corpo. Va notato che poiché la variazione di energia cinetica ottenuta è negativa, avremo che la velocità del corpo di minuisce, in accordo con la decelerazione fornita dalla forza di attrito dinamico.

Potenza

La potenza media è definita coma il lavoro compiuto nell'unità di tempo. Quindi

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Considerando frazioni di tempo sempre più piccole, questo valore tende alla potenza

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{P} = \frac{dW}{dt}$$

L'unità di misura della potenza è il Watt, ed è la potenza ottenuta dal lavoro di un J che agisca per un secondo.
Se la forza **F** che genera il lavoro è costante, allora avremo

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

E quindi

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{ds}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{\vec{ds}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

<u>Nota:</u> il kWh (chilowattora) è un'unità di misura del lavoro pari al prodotto di un kW per un'ora di tempo

$$1\, kWh = 10^3\, J \times 3600\, s = 3.60 \times 10^6\, J$$

Energia potenziale gravitazionale ed elastica

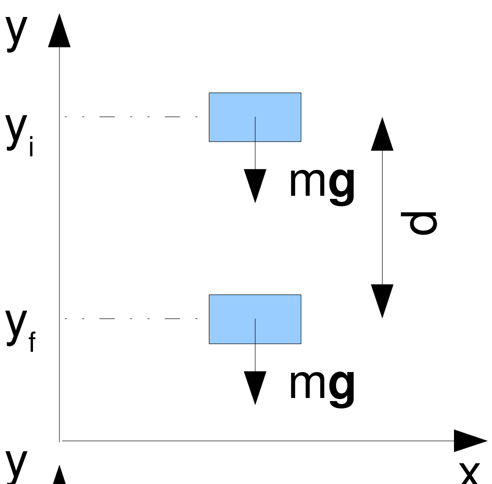
Energia potenziale gravitazionale

Quando lasciamo cadere un corpo sotto l'effetto della forza di gravità (m**g**) allora la sua velocità aumenta man mano la sua velocità e, di conseguenza, la sua energia cinetica K. Allora questo significa che c'era dell'energia “da spendere” che si trasformasse in energia cinetica. Questa fonte di energia si chiama *energia potenziale*. Nel caso del campo gravitazionale essa è

$$U_g = mgy$$

Dove y è l'altezza dalla quale l'oggetto cade.

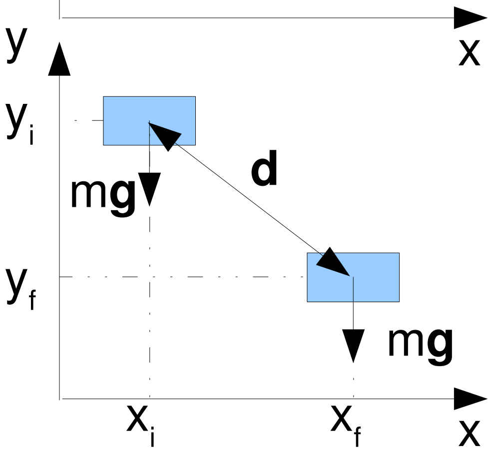
Per comprendere questo ragionamento calcoliamo innanzitutto il lavoro compiuto dal campo gravitazionale su un corpo che cade per una distanza *d* e che parta da fermo (v=0 → K=0)



$$W_g = m\vec{g}\cdot\vec{d} = -mg\,\hat{j}\cdot(y_f - y_i)\,\hat{j} = mgy_i - mgy_f$$

(dove abbiamo sfruttato il fatto che $\hat{j}\cdot\hat{j}=1$)

La prima cosa che notiamo è che il lavoro fatto dalla forza di gravità su un corpo che viene lasciato cadere dipende solo dalla quota iniziale e dalla quota finale! Se il corpo segue un cammino qualsiasi, allora il lavoro svolto dal campo gravitazionale è



$$W_g = m\vec{g}\cdot\vec{d} = mgy_i - mgy_f + (mgx_f - mgx_i)\,\hat{i}\cdot\hat{j}$$

$$= mgy_i - mgy_f$$

(dove abbiamo sfruttato il fatto che $\hat{i}\cdot\hat{j}=1$)

Energia potenziale gravitazionale ed elastica

Quindi il lavoro fatto dalla forza gravitazionale dipende solo dalla coordinata y, ovvero dall'altezza.
Poiché $U_i=mgy_i$ e $Uf=mgy_f$, allora

$$Wg=U_i-U_f= -(U_f-U_i)=-\Delta U_g$$

Il lavoro compiuto su un corpo da un campo gravitazionale è uguale all'opposto della variazione dei energia potenziale gravitazionale del corpo stesso.

Energia potenziale elastica

Il lavoro fatto da una molla su un blocco di massa m per muoverlo dalla posizione x_i alla posizione x_f è:

$$W_{el}=\frac{1}{2}k\,x_i^2-\frac{1}{2}k\,x_f^2$$

Il lavoro W_{el} dipende solo dalle coordinate iniziali e finali, ed è quindi nullo per ogni cammino chiuso. La funzione energia potenziale elastica che associamo è

$$U_{el}=\frac{1}{2}k\,x^2$$

Forze conservative e non conservative

Esistono forze per le quali il lavoro svolto dipende solo dalla posizione iniziale e finale, altra in cui il lavoro svolto dipende dal percorso seguito, come la forza di attrito. Le prime si chiamano conservative, le seconde non conservative

Forze conservative

a) Una forza è conservativa se il lavoro svolto su un punto materiale che si sposta dalla posizione A alla posizione B dipende solo dalla posizione iniziale e finale.

b) Il lavoro svolto da una forza conservativa su un punto materiale che si muove su un cammino chiuso è nullo.

Per queste forze vale che: il lavoro svolto su un corpo è l'opposto della variazione di energia potenziale

$$W=U_i-U_f= -(U_f-U_i)=-\Delta U$$

Forze non conservative

Una forza è non conservativa se causa una variazione dell'energia meccanica E, definita, punto per punto, come la somma dell'energia potenziale e di quella cinetica.

Prendiamo un corpo che scivoli su un piano con attrito fino a fermarsi. Inizialmente la sua velocità è v_i e alla fine è $v_f=0$. La sua energia totale quindi è cambiata fino ad annullarsi!

Forze conservative ed energia potenziale

Il lavoro fatto da una forza conservativa è

$$W_c = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx = -\Delta U$$

dove F_x è la componente di F lungo lo spostamento. Il lavoro compiuto da una forza conservativa è uguale, cambiata di segno, all'energia potenziale associata alla forza:

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx$$

Energia potenziale significa che il corpo ha la potenzialità o capacità di aumentare la sua energia cinetica, di compiere un lavoro, nel caso sia libero di muoversi sotto l'effetto di una forza conservativa. Definiamo l'energia potenziale come

$$U_f(x) = -\int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx + U_i(x)$$

Poiché quel che conda nel calcolo di un lavoro è la differenza di energia potenziale e non il suo valore in una particolare posizione, possiamo arbitrariamente porre $U_i(x)=0$.

Lavoro fatto da forze non conservative

Se su un sistema agiscono forze non conservative, allora l'energia meccanica totale del sistema non si conserva.

Lavoro svolto da una forza esterna

Supponiamo di sollevare un corpo di massa m. Il lavoro che compiamo è W_{app}. Poiché il lavoro è uguale alla variazione di energia cinetica, allora avremo che:

$$W_{app}+W_g=\Delta k$$

Dove W_g è il lavoro eseguito dal campo gravitazionale del sistema massa-Terra. Allora, poiché $W_g=-U_g$, avremo che

$$W_{app}=U_g+\Delta k=\Delta E$$

ovvero agendo esternamente su di un corpo (o sistema) possiamo fornire o togliere energia meccanica!

Forze di attrito dinamico

La forza di attrito dinamico è una forza non conservativa. Infatti questa, opponendosi al moto di un corpo, lo ferma azzerandone completamente l'energia cinetica. La distanza percorsa da un corpo che risenta della forza di attrito è data dalla relazione energetica

$$\Delta K_{att}=-f_k d$$

ma se il piano su cui agisce la forza di attrito è inclinato, allora ci sarà anche una variazione di energia potenziale:

$$\Delta E=\Delta U+K_{att}=-f_k d$$

Relazione tra forze conservative ed energia potenziale

Ricordiamo che $W=F_x\Delta x=-\Delta U$ nel caso di forze conservative. Allora vale la relazione infinitesima $F_x dx=-dU$, ovvero

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

Ogni forza conservativa che agisca su un corpo che è uguale alla derivata, cambiata di segno, della funzione energia potenziale del sistema rispetto ad x.

Esempio: potenziale elettrostatico:

$$U_{el} = \frac{1}{2} k x^2$$

$$F_{el} = -\frac{dU_{el}}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} k x^2\right) = -kx$$