INGEGNERIA GESTIONALE
corso di Fisica Generale

Prof. E. Puddu

LEZIONE DEL 14 – 15 OTTOBRE 2008

Quantità di moto e urti

Quantità di moto

La quantità di moto di una particella di massa m che si muove con velocità v è il prodotto della sua massa per la sua velocità:

$\mathbf{p}=m\mathbf{v}$

La quantità di moto è una grandezza vettoriale la cui unità di misura è il kg m/s. Essendo m uno scalare positivo, la quantità di moto ha direzione e verso della velocità di una particella.

Scomponendo i vettori nelle coordinate, per la quantità di moto si trovano le tre equazioni scalari:

$p_x=mv_x \quad p_y=mv_y \quad p_z=mv_z$

È possibile correlare la quantità di moto alla seconda legge di Newton:

$\Sigma\ \mathbf{F} =m\mathbf{a}=m\ d\mathbf{v}/dt=d\ m\mathbf{v}/dt=d\mathbf{p}/dt$

La somma delle forze agenti su un corpo è la derivata (ovvero la variazione) della quantità di moto. Questo significa che, se la somma delle forze che agiscono su un corpo è nulla, allora sarà nulla la derivata prima della quantità di moto, ovvero la quantità di moto è costante e non varia nel tempo!!!

Nota che in generale, la quantità di moto può variare non solo tramite la velocità ma anche tramite la massa. Infatti se anche la massa dipende dal tempo avremo che

Conservazione della quantità di moto per un sistema di due particelle

Supponiamo di avere un sistema isolato composto dalle due particelle 1 e 2 di massa m_1 ed m_2 agenti l'una sull'altra. Se la particella 2 esercita una forza $\mathbf{F}_{21}$ =sulla particella 1, allora la particella 1 eserciterà, in virtù della terza legge di Newton, una forza $\mathbf{F}_{12}=-\mathbf{F}_{21}$ sulla particella 2.

Se le due particelle hanno quantità di moto $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$, dalla seconda legge di Newton avremo che

$$\vec{F}_{21}=\frac{d\,\vec{p}_1}{dt} \qquad \text{e} \qquad \vec{F}_{12}=\frac{d\,\vec{p}_2}{dt}$$

Ma poiché, in virtù della terza legge di Newton avremo che $\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_{21}=0$

$$\frac{d\,\vec{p}_1}{dt}+\frac{d\,\vec{p}_2}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1+\vec{p}_2\right)=0$$

Ovvero $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ è una costante! Questo significa che istante per istante la somma delle quantità di moto non varia, ovvero che

$$\vec{p}_{1\mathrm{i}}+\vec{p}_{2\mathrm{i}}=\vec{p}_{1\mathrm{f}}+\vec{p}_{2\mathrm{f}}$$

LIUC

Conservazione della quantità di moto per un sistema di due particelle

Per il sistema allora possiamo scrivere che $\mathbf{P}_{TOTi} = \mathbf{P}_{TOTf}$. Dal punto di vista scalare questa relazione si traduce in

$$\sum p_{xi} = \sum p_{xf} \qquad \sum p_{yi} = \sum p_{yf} \qquad \sum p_{zi} = \sum p_{zf}$$

Quindi, in un sistema isolato, ogni singola componente della quantità di moto si conserva

Impulso e quantità di moto

Una forza si dice impulsiva quando agisce per un tempo molto breve ed è molto più intensa rispetto a tutte le altre forze in gioco.

Supponiamo di avere una sola particella su cui agisce una forza **F** variabile nel tempo. In accordo con la seconda legge di Newton avremo

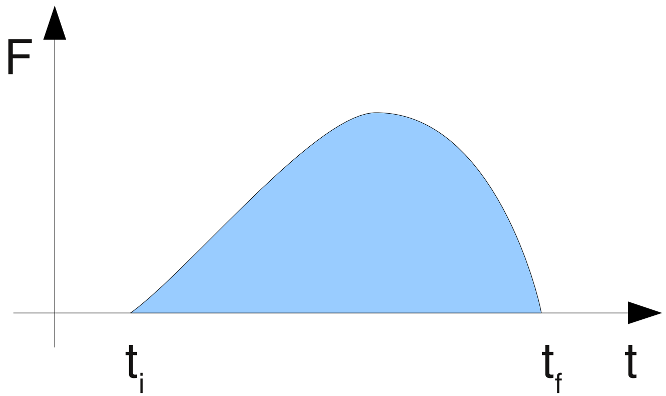
$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \text{e quindi} \qquad d\vec{p}=\vec{F}\,dt$$

e, passando alla forma integrale, avremo

$$\int_{p_i}^{p_f} d\vec{p}=\int_{t_i}^{t_f}\vec{F}\,dt \rightarrow \vec{p}_f-\vec{p}_i=\int_{t_i}^{t_f}\vec{F}\,dt$$

Per risolvere quest'integrale abbiamo bisogno dell'espressione della forza **F**. Definiamo impulso della forza come il prodotto della forza stessa per l'intervallo di tempo per il quale agisce.

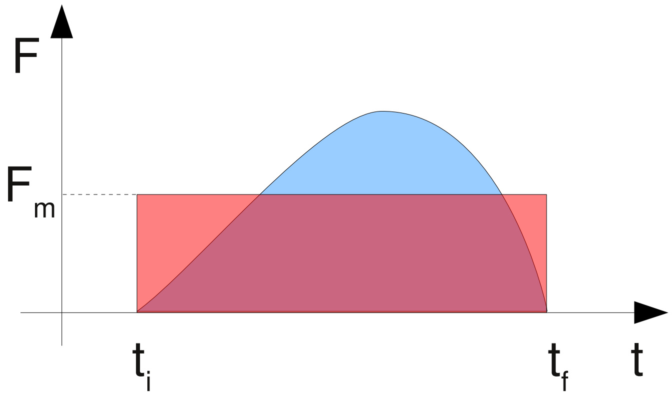
$$\vec{I}=\int_{t_i}^{t_f}\vec{F}\,dt$$



L'integrale della forza è l'area della curva. Quest'integrale ci fornisce il modulo dell'impulso!

Impulso e quantità di moto

Poiché è molto difficile determinare l'espressione di una forza (si immagini ad esempio della forza con cui un martello colpisce un chiodo, di una biglia che collida contro una parete...) si introduce il concetto di *forza media* F_m, definita come la forza costante che agisce per lo stesso intervallo della forza F generando lo stesso impulso. Dal punto di vista dell'analisi essa è rappresentata da un rettangolo avente per base l'intervallo di tempo $t_f - t_i$ e altezza tale per cui l'area sia la stessa sottesa dalla curva che esprime la forza.



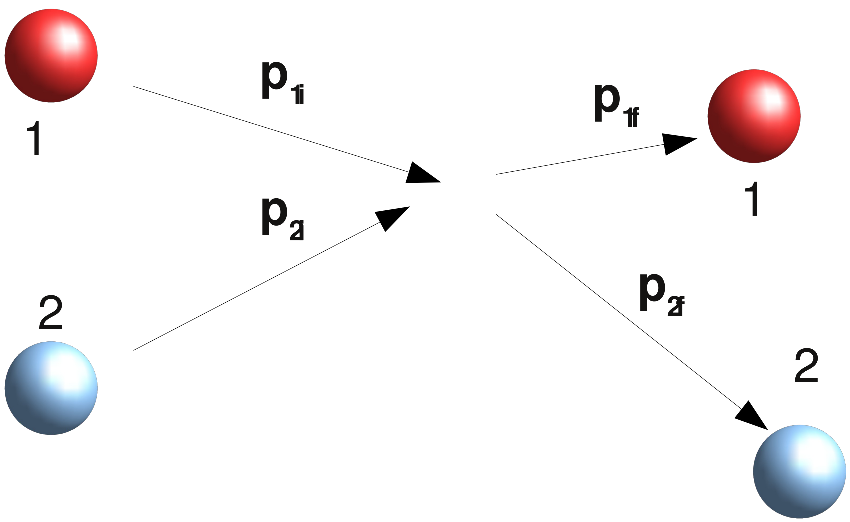
$$F_m = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} F \, dt$$

Possiamo quindi ridefinire l'impulso come il prodotto della forza media che agisce su una particella per l'intervallo di tempo in cui questa agisce.

$$\vec{I} = \vec{F}_m \Delta t$$

Urti

Usiamo il termine urto per descrivere l'evento in cui due particelle vengono a contatto per un breve intervallo di tempo e su di esse agiscono solo forze di tipo impulsivo.



Quando due particelle 1 e 2 di masse m1 ed m2 si scontrano, allora si dice che esse generano forze di tipo impulsivo. Se $\mathbf{F}_{21}$ è la forza impulsiva che la particella 2 esercita sulla particella 1 allora avremo:

$$\Delta \vec{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21}\, dt$$

Mentre la forza $\mathbf{F}_{12}$ che la particella 1 esercita sulla particella 2 genera

$$\Delta \vec{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}\, dt = -\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}\, dt$$

Da cui possiamo estrapolare la relazione $\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$

ovvero $\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0$ da cui si ricava $\vec{p}_{1\mathrm{i}} + \vec{p}_{2\mathrm{i}} = \vec{p}_{1\mathrm{f}} + \vec{p}_{2\mathrm{f}}$

Ossia la quantità di moto in un urto si conserva!

Urti elastici ed anelastici

La quantità di moto di un sistema isolato si conserva sempre. Quello che non si conserva è invece l'energia cinetica totale del sistema.

L'urto elastico è un urto in cui si conservano sia l'energia sia la quantità di un sistema Un esempio è l'urto tra due palle da biliardo, tra due molecole d'aria.

L'urto anelastico è un urto in cui si conserva solo la quantità di un sistema.

L'urto completamente anelastico è un urto in cui i corpi in ingresso all'urto restano uniti in un'unico corpo dopo l'urto.

- **urto elastico:** le leggi di conservazione per quanto riguarda l'urto elastico in una dimensione sono

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

Poiché questo sistema possiede potenze di due delle velocità, è più semplice risolvere il sistema equivalente, ottenuto con semplici manipolazioni matematiche

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ v_{1i} - v_{2i} = v_{1f} - v_{2f} \end{cases}$$

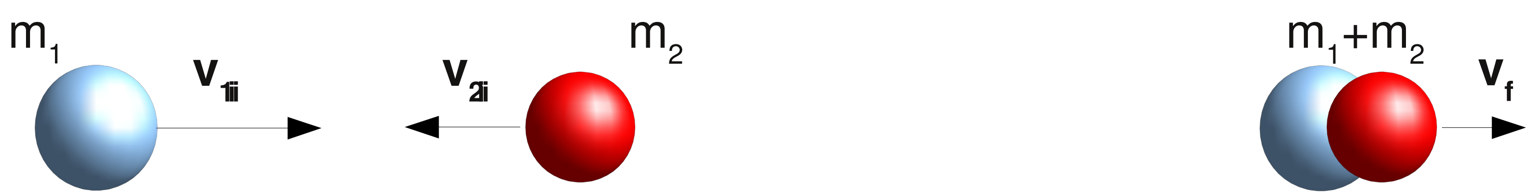
Urti elastici ed anelastici

Da cui si ricavano le soluzioni per le velocità finali:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{2\mathrm{m}_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2\mathrm{m}_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$$

• **urto completamente anelastico:** le leggi di conservazione riguardano la quantità di moto ma non l'energia. Le due masse restano incollate alla fine dell'urto, come in figura



La legge di conservazione per la quantità di moto in una dimensione si scrive

$$m_1 v_{1i} + m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f$$

La cui soluzione è:

$$v_f = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Casi particolari di urti elastici

- $m_1=m_2$ allora avremo $v_{1f}=v_{2i}$ e $v_{2f}=v_{1i}$. Le particelle si scambiano le velocità.
- Se $v_{2i}=0$ (una delle due particelle è inizialmente ferma!) le soluzioni sono

$$v_{1f}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{1i}$$

$$v_{2f}=\frac{2\,m_1}{m_1+m_2}v_{1i}$$

Come sottocaso di $v_{2i}=0$ consideriamo dapprima $m_1>>m_2$. In quest'approssimazione otteniamo

$$v_{1f}=v_{1i}\ \ e\ \ v_{2f}=2\mathrm{v}_{1i}$$

Cioè se una particella molto massiva urta una particella inizialmente ferma, la prima particelle prosegue indisturbata mentre la seconda si muove a velocità doppia della prima.

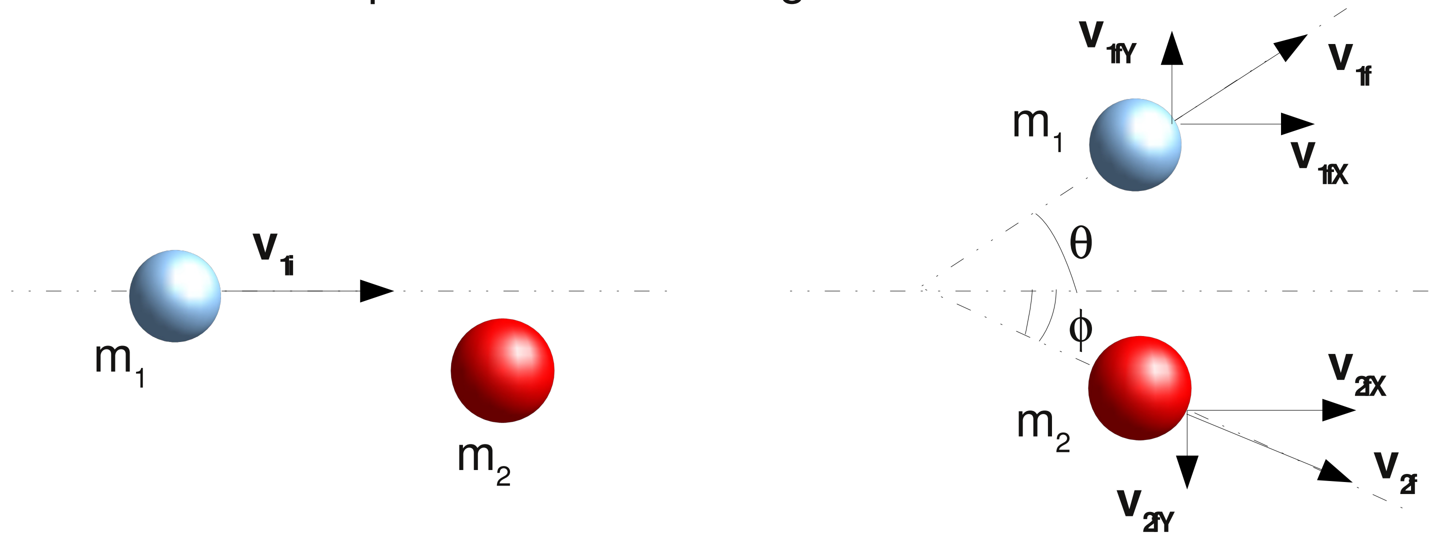
Come secondo sottocaso sottocaso di $v_{2i}=0$ consideriamo dapprima $m_2>>m_1$. In quest'approssimazione otteniamo

$$v_{1f}=-v_{1i}\ \ e\ \ v_{2f}=0$$

Quindi una particella che urti una massa molto maggiore di essa ed inizialmente ferma rimbalza indietro! La particella ferma invece resta in quiete.

Urti elastici ed anelastici in due dimensioni: urto di striscio o radente

Consideriamo un urto tra due particelle come in figura



Prima dell'urto **Dopo urto**

Consideriamo un urto come quello in figura, ovvero in cui le due particelle (a simmetria sferica) non abbiano centro sulla stessa retta. Si osserva che prima dell'urto la quantità di moto totale è diretta lungo l'asse delle ascisse mentre dopo l'urto le quantità di moto di entrambe le particelle hanno componenti lungo le ordinate. Le leggi di conservazione sono:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin\theta + m_2 v_{2f} \sin\phi$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Per risolvere il problema abbiamo tre equazioni ma quattro incognite: v_{1f}, v_{2f}, θ e ϕ. Serve quindi che uno dei quattro dati sia fornito per poter risolvere il problema!

Urti elastici ed anelastici in due dimensioni: urto di striscio o radente

Supponiamo che le due particelle dell'esempio precedente abbiamo ugual massa m. Le leggi di conservazione di quantità di moto ed energia cinetica diventano, semplificando le masse

$$\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}$$

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$$

Moltiplicando la prima per se stessa otteniamo:

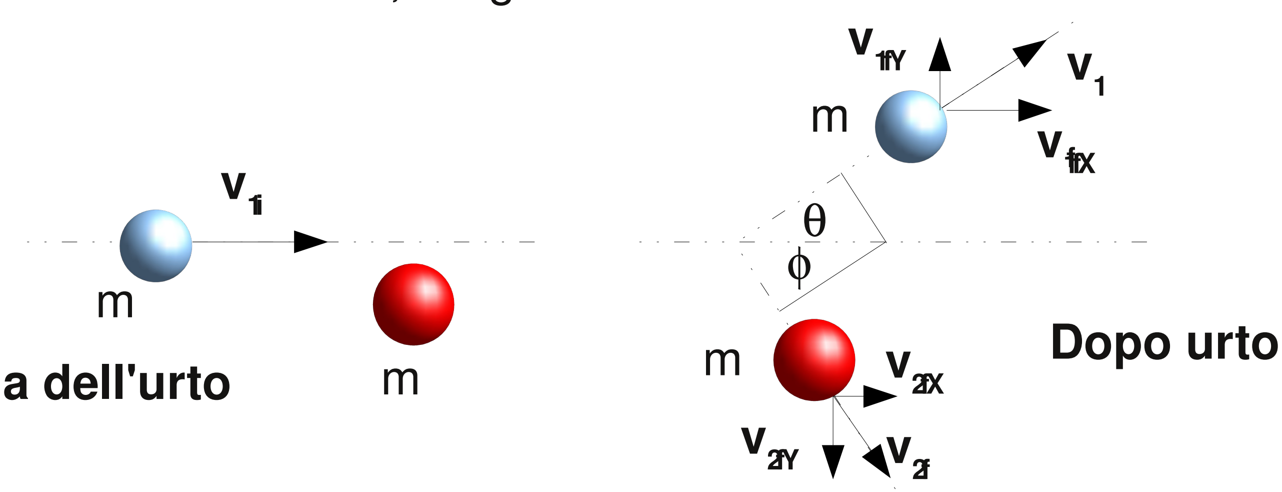
$$\vec{v}_{1i} \cdot \vec{v}_{1i} = \left(\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f} \right) \cdot \left(\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f} \right) \quad \text{ovvero}$$

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\, v_{1f}\, v_{2f} \cos\left(\theta + \phi \right)$$

Sottraendo da quest'ultima la legge di conservazione dell'energia ricaviamo

$$\cos\left(\theta + \phi \right) = 0$$

Valida solo se $\theta+\phi=90°$. Possiamo quindi concludere che, in un urto di striscio tra due masse uguali, di cui una inizialmente ferma, l'angolo di uscita tra le due masse è di 90°.



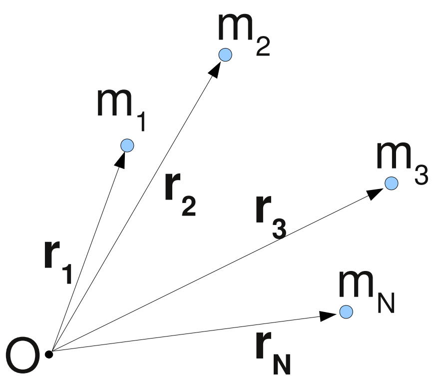
Centro di massa

Dato un sistema di N particelle di masse m_1, m_2, ..., m_N su cui agiscono delle forze F_1, F_2, ...,F_N esterne al sistema, l'accelerazione globale sul sistema è

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}{M} \quad \text{dove} \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Il pedice CM indica Centro di Massa. Il centro di massa è quel punto che si muove come se tutta la massa M del sistema fosse concentrato in esso. In presenza delle N forze esterne quindi il centro di massa è il punto di massa M che subisce l'accelerazione a_{CM} .

Le coordinate del centro di massa sono definite nel modo seguente



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}$$

Da cui le due espressioni scalari

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M}, \quad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M}$$

Quando passiamo da un sistema di particelle separate ad un mezzo omogeneo, allora sostituiamo la serie con l'integrale e definiamo

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_M dm\, \vec{r}_i}{M}$$

Moto di un sistema di particelle

Dato un sistema di N particelle di masse m_1, m_2, ..., m_N, definiamo la velocità del centro di massa come

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i$$

Dove v_i è la velocità dell'i-esima particella.Moltiplicando a destra e sinistra per la massa totale M otteniamo la quantità di moto del centro di massa

$$\vec{P}_{CM} = M\vec{v}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i$$

Come si osserva dall'equazione di sopra, la quantità di moto del centro di massa equivale alla quantità di moto totale del sistema, ovvero alla somma delle quantità di moto delle singole particelle.
Definiamo ora l'accelerazione del centro di massa

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{a}_i = \frac{1}{M}\sum_i \vec{F}_i$$

Quest'equazione può essere riscritta, usando la seconda legge di Newton, nel seguente modo

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i$$

Dove F_i è la forza che agisce sull'i-esima particella.

Moto di un sistema di particelle

$$M\vec{a}_{CM}=\sum_i m_i\vec{a}_i=\sum_i \vec{F}_i$$

Poiché a causa della terza legge di Newton la somma delle forze interne si annulla, possiamo riscrivere quest'espressione come

$$\sum_i \vec{F}_{ext}=M\vec{a}_{CM}=\frac{d\,p_{CM}}{dt}$$

Ovvero la risultante delle forze agenti sul sistema è uguale alla massa totale del sistema moltiplicata per l'accelerazione del centro di massa.
Quindi aggiungiamo che il centro di massa di un sistema di particelle di massa totale M si muove come si muoverebbe una particella equivalente di massa M sottoposta alls risultante delle forze esterne.
Quindi se la forza risultante è nulla, il centro di massa si muove di velocità costante.

Propulsione e reazione

La propulsione di un razzo dipende dalla legge di conservazione della quantità di moto, applicata al razzo e al gas espulso.
Un esempio di conservazione della quantità di moto è dato dal rinculo di un fucile. Infatti, mentre spara il proiettile, un fucile riceve una spinta in verso opposto a quello del proiettile.
Per quanto riguarda il sistema razzo-gas espulso, vale la seguente legge di conservazione della quantità di moto

$$(M+\Delta m)v = M(v+\Delta v)+\Delta m(v-v_e)$$

Dove M è la massa del razzo, Δm la massa del gas espulso, v la velocità iniziale del razzo, Δv la variazione di velocità del razzo, v_e (e=exhaust, scarico) la velocità del gas rispetto al razzo e ($v-v_e$) la velocità del gas rispetto ad un osservatore esterno in quiete rispetto al razzo.
Semplificando l'espressione di sopra otteniamo

$$M\Delta v = v_e \Delta m$$

Passando al limite di Δm che tende a zero ($\Delta m \rightarrow dm$), di Δv che tende a zero ($\Delta v \rightarrow dv$) e considerando che la variazione di massa del gas dm è l'opposto della variazione di massa del razzo (dm=-dM) otteniamo l'equazione

$$M\,dv = -v_e\,dm$$

Che risolta fornisce la velocità finale del razzo

$$v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$