ECOPUB – LEZIONE 5 (11/12/15)

Titolo nota — 11/12/2015

RELAZIONE MACROECONOMICA : FUNZIONE KEYNESIANA DEL CONSUMO

$$C_i = \beta_1 + \beta_2 I_i + u_i \quad , \; i = 1 \dots N$$

(CROSS-SECTION)

RELAZIONE MICROECONOMICA : FUNZIONE DI DOMANDA DI UN BENE

$$Q_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + u_t \quad , \; t = 1 \dots T$$

(SERIE STORICHE)

MODELLO LINEARE :

PARTE CASUALE

$$\boxed{y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + u_t}$$

VARIABILE DIPENDENTE

VARIABILE ESPLICATIVA

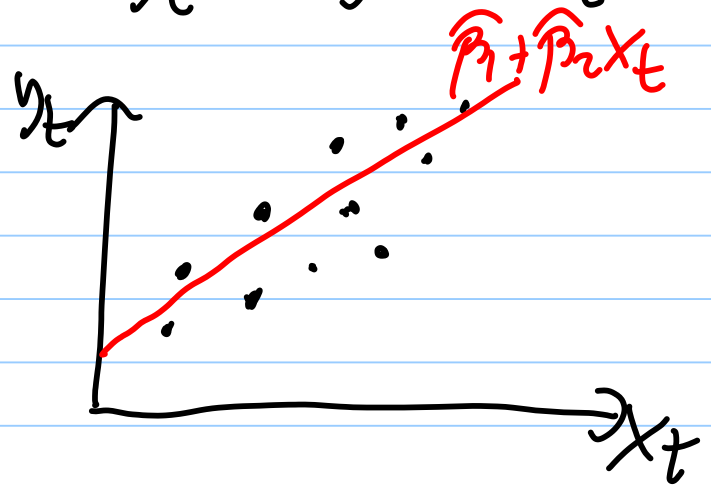
- MIGLIOR RETTA INTERPOLANTE : CRITERIO DEI MINIMI QUADRATI
- SOLUZIONE: $\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x}$

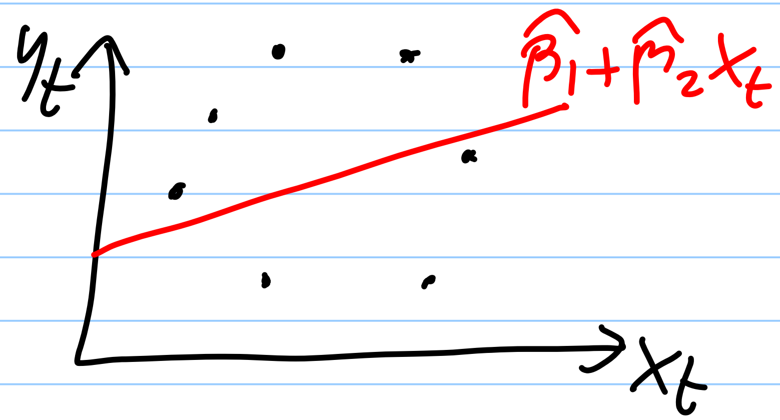
$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_t (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x})}{\sum_t (x_t - \bar{x})^2}$$

- $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_t \equiv \hat{y}_t \quad , t = 1 \ldots T$, VALORI FITTATI (RETTA DI REGRESSIONE)
- $\hat{u}_t$ = RESIDUI = $y_t - \hat{y}_t$

OSSERVATI FITTATI

- $y_t = \hat{y}_t + \hat{u}_t$





CASO 1 CASO 2

$R^2_{1} > R^2_{2}$

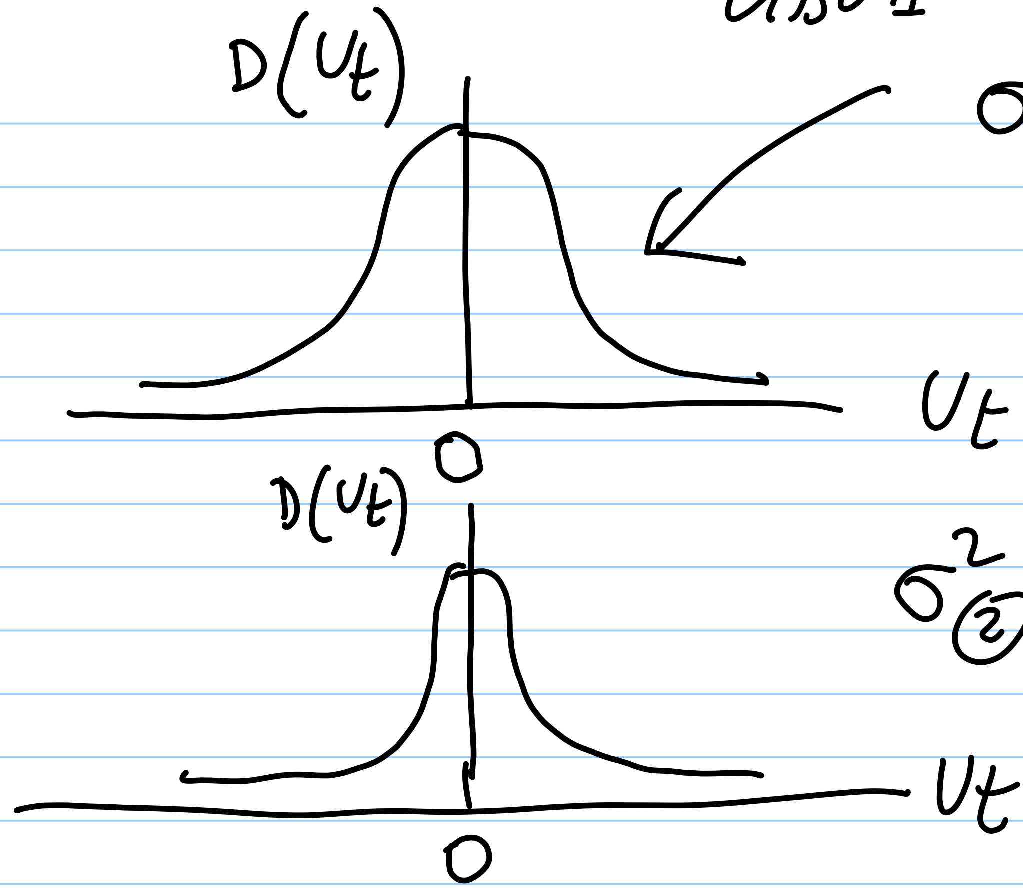
- $R^2 \equiv \dfrac{ESS}{TSS} = 1 - \dfrac{RSS}{TSS}$

$$\left(TSS = ESS + RSS \right)$$

PER ANALIZZARE PIÙ A FONDO IL MODELLO STATISTICO LINEARE, DOBBIAMO CARATTERIZZARE IN MODO PIÙ PRECISO LA SUA COMPONENTE CASUALE ($\underline{\underline{u_t}}$)

FINORA ABBIAMO DETTO CHE U_t È L'ERRORE/ IL DISTURBO CHE RENDE LA RELAZIONE LINEARE TRA Y_t E X_t NON ESATTA – U_t <u>NON È OSSERVABILE</u>

<u>IPOTESI</u> : U_t È UNA VARIABILE CASUALE DISTRIBUITA COME UNA NORMALE CON MEDIA ZERO E VARIANZA COSTANTE (NON NOTA), PARI A σ^2



CASO 1 σ^2_{1}

CASO 2 σ^2_{2}

$$\boxed{\sigma^2_1 > \sigma^2_2}$$

U_t È UNA VARIABILE CASUALE

$t = 1 \ldots T$

$\boxed{U_1}, \boxed{U_2}, \ldots, \boxed{U_T}$

VARIABILE CASUALE

↓

CAMPIONE DI DATI

↓

OSSERVAZIONE = REALIZZAZIONE DELLA VARIABILE CASUALE

U_2

↓

ESTRAZIONE / CAMPIONE

↓

U_2^1 = OSSERVAZIONE (VALORE ASSUNTO DA U_2)

$$y_t = \underbrace{\beta_1 + \beta_2 x_t}_{\text{PARTE ESATTA / DETERMINISTICA}} + \underbrace{u_t}_{\text{PARTE CASUALE}}$$

DATO CHE y_t È UNA COMBINAZIONE LINEARE DI UNA PARTE DETERMINISTICA E DI UNA PARTE CASUALE, y_t DEVE ESSERE INTERPRETATA COME UNA <u>VARIABILE CASUALE</u>

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_t (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x})}{\sum_t (x_t - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x}$$

$$\boxed{y_t = \underbrace{\beta_1 + \beta_2 x_t}_{\text{PARTE ESATTA}} + \underbrace{u_t}_{\text{PARTE CASUALE}}}$$

$$\underset{\text{CASUALE}}{u_t} \rightarrow \underset{\text{CASUALE}}{y_t} \rightarrow \underset{\text{CASUALE}}{\hat{\beta}_2} \longrightarrow \underset{\text{CASUALE}}{\hat{\beta}_1}$$

STIMATORE E STIMA

STIMATORE = VARIABILE CASUALE

DATI

STIMA = REALIZZAZIONE (VALORE/NUMERO) DELLA VARIABILE CASUALE STIMATORE

INTERPRETAZIONE

$\hat{\beta}_2$ = STIMATORE PER IL PARAMETRO NON NOTO β_2

$\hat{\beta}_1$ = STIMATORE PER IL PARAMETRO NON NOTO β_1

DATE LE OSSERVAZIONI RELATIVE ALLA FUNZIONE KEYNESIANA DEL CONSUMO, ABBIAMO OTTENUTO $\hat{\beta}_1 = 7.4$ (STIMA)

$\hat{\beta}_2 = 0.23$ (STIMA)

CONCENTRIAMOCI SU $\hat{\beta}_2$

DATO CHE $\hat{\beta}_2$ È UNO STIMATORE, CIOÈ È UNA VARIABILE CASUALE, $\hat{\beta}_2$ AVRÀ UNA DISTRIBUZIONE

DI CHE TIPO? NORMALE

$$U_t \longrightarrow y_t \longrightarrow \hat{\beta}_2$$

VAR CASUALE — VAR CASUALE — VAR CASUALE / STIMATORE

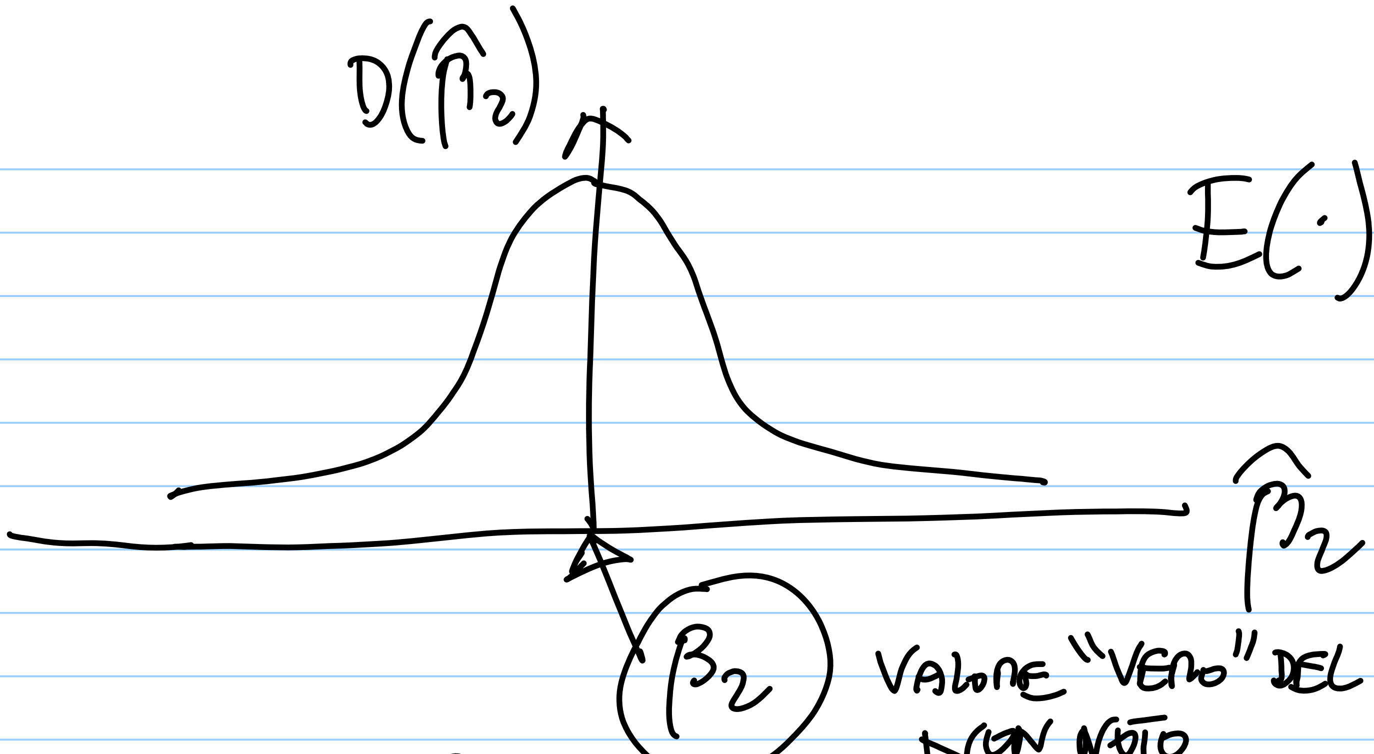
IPOTESI: DISTRIBUZIONE NORMALE

ESSENDO COMBINAZIONE LINEARE DI U_t, y_t È NORMALE

$\hat{\beta}_2$ → NORMALE

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_t (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x})}{\sum_t (x_t - \bar{x})^2} = \sum_t (y_t - \bar{y}) w_t$$

w_t = ESATTA



$E(\cdot) \equiv$ VALORE ATTESO

VALORE "VERO" DEL PARAMETRO NON NOTO

- LA MEDIA DI $\hat{\beta}_2$ È β_2

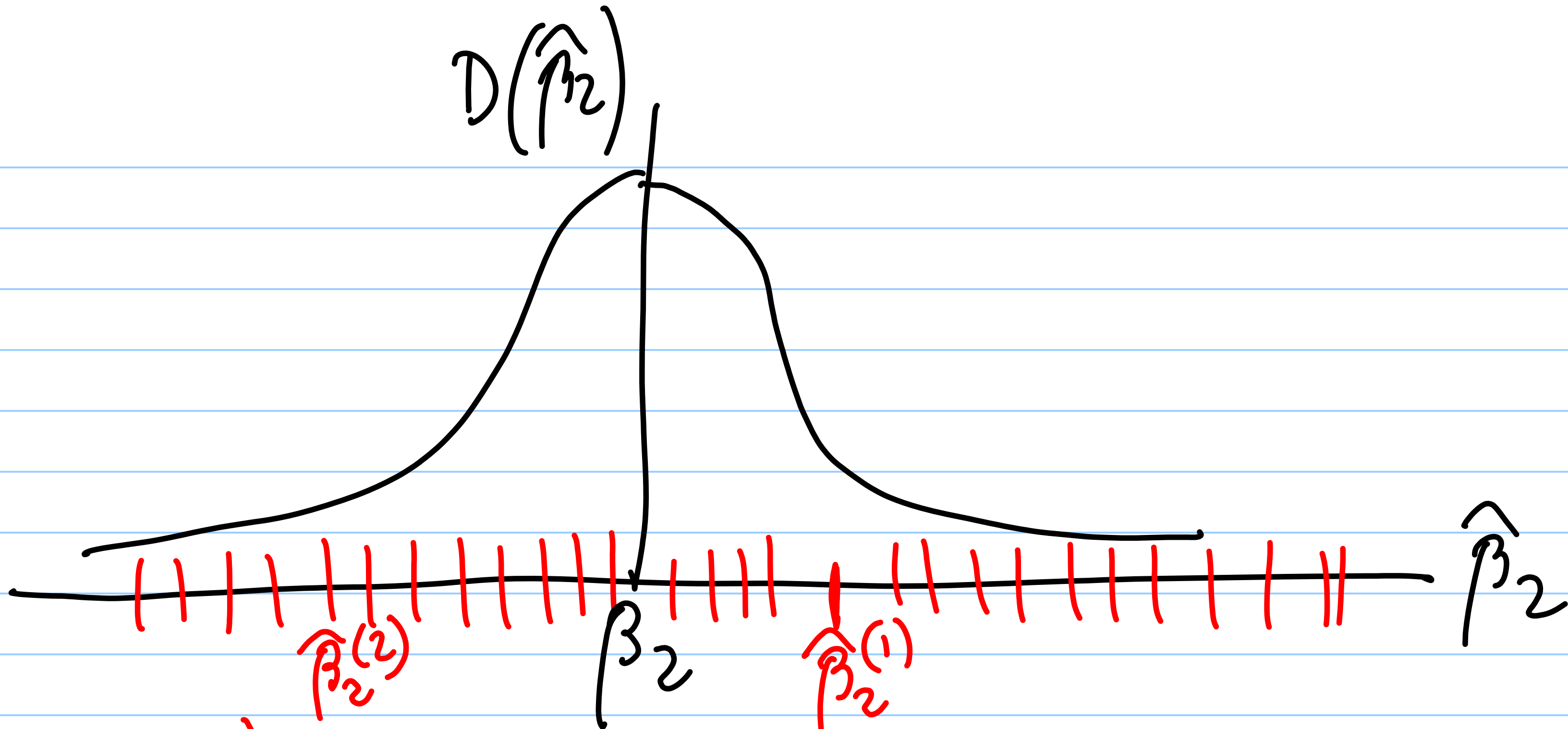
$$\boxed{E(\hat{\beta}_2) = \beta_2}$$

- $VAR(\hat{\beta}_2) = \dfrac{\sigma^2}{\sum_t (X_t - \bar{X})^2}$

<u>COMMENTI</u>

(1) $E(\hat{\beta}_2) = \beta_2$ ($\hat{\beta}_2$ STIMATORE NON DISTORTO PER β_2)

$\hat{\beta}_2$: STIMATORE PER IL PARAMETRO β_2



$\hat{\beta}_2^{(1)}$ è STIMA DI β_2 CHE OTTENIAMO DAL CAMPIONE DI DATI (1)

$\hat{\beta}_2^{(2)}$ È STIMA DI β_2 OTTENUTA CON IL CAMPIONE DI DATI (2)

$$\hat{\beta}_2^{(1)} - \beta_2 \neq 0$$

$$\hat{\beta}_2^{(2)} - \beta_2 \neq 0$$

SOLO LA DIFFERENZA TRA LA MEDIA DI TUTTE LE POSSIBILI STIME DI β_2 E β_2 È ZERO

$$E(\hat{\beta}_2) - \beta_2 = 0$$

2) $VAR(\hat{\beta}_2) = \dfrac{\sigma^2}{\sum_t (X_t - \bar{X})^2}$

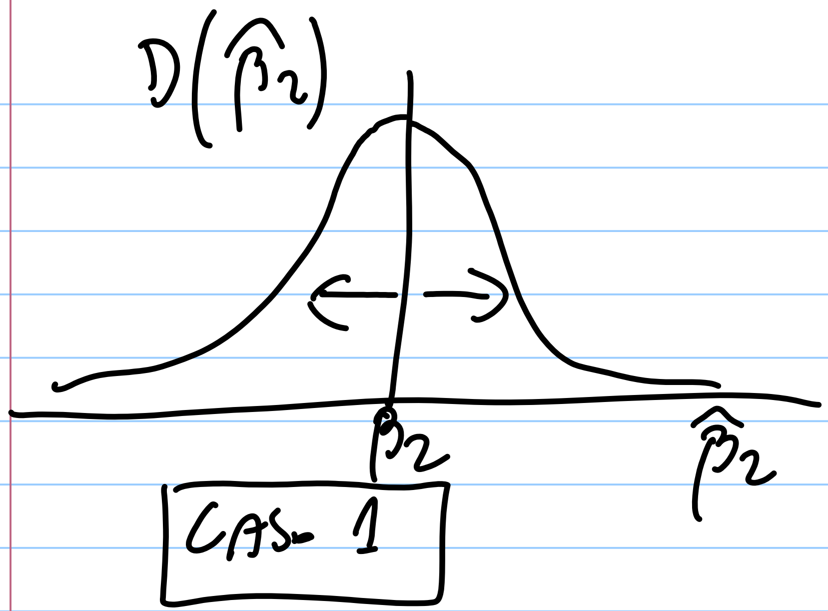
VARIANZA DEGLI ERRORI

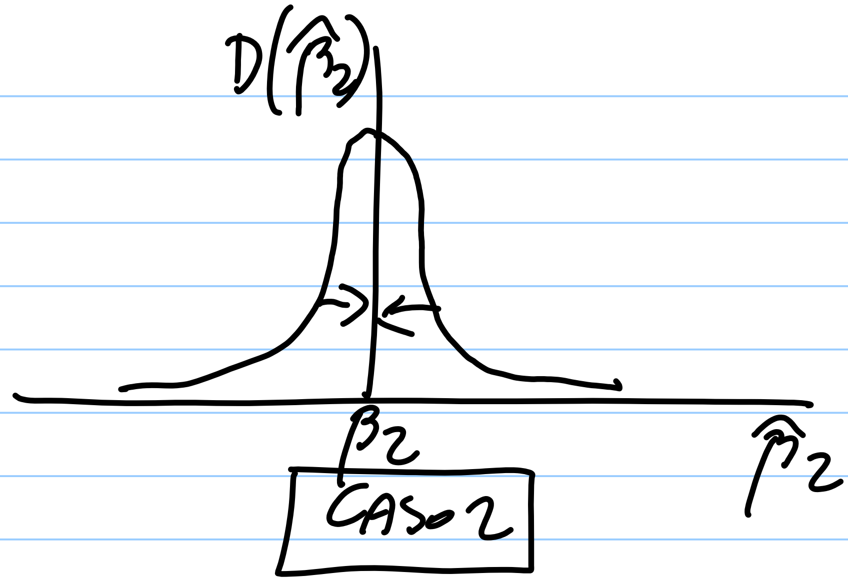
VARIANZA DELLA VARIABILE ESPLICATIVA

DISPERSIONE DELLA DISTRIBUZIONE DELLA VARIABILE CASUALE STIMATORE $\hat{\beta}_2$ INTORNO A β_2

SE $\sigma^2 \uparrow (\downarrow)$ ALLORA $VAR(\hat{\beta}_2) \uparrow (\downarrow)$

SE $\sum_t (X_t - \bar{X})^2 \uparrow (\downarrow)$, $VAR(\hat{\beta}_2) \downarrow (\uparrow)$





IL CASO 2 È PREFERIBILE RISPETTO AL CASO 1 IN QUANTO LE STIME DI $\hat{\beta}_2$ SONO <u>PIÙ CONCENTRATE</u> INTORNO A β_2 $\Longrightarrow$

$\hat{\beta}_2$ È, NEL CASO 2, PIÙ <u>PRECISO</u> RISPETTO AL <u>CASO 1</u>

<u>COLLEGAMENTO TRA "PRECISIONE" DI $\hat{\beta}_2$ E $VAR(\hat{\beta}_2)$</u>

$VAR(\hat{\beta}_2) \uparrow (\downarrow) \Rightarrow$ PRECISIONE DI $\hat{\beta}_2 \downarrow (\uparrow)$

È POSSIBILE CALCOLARE/MISURARE LA VARIANZA (LA PRECISIONE) DELLO STIMATORE $\hat{\beta}_2$?

$$VAR(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum_t (X_t - \bar{X})^2}$$

VARIANZA ERRORI NON NOTA

OSSERVATA

PER CALCOLARE VAR $(\hat{\beta}_2)$ DOBBIAMO STIMARE σ^2. COME?

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{T-2}, \quad \text{DOVE } RSS \equiv \sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2$$

→ STIMATORE PER σ^2

(SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $\hat{\sigma}^2$ È STIMATORE NON DISTORTO PER σ^2)

$$\mathrm{VAR}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum_t (x_t - \bar{x})^2}$$

$$\widehat{\mathrm{VAR}}(\hat{\beta}_2) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_t (x_t - \bar{x})^2} = \frac{RSS}{(T-2)\sum_t (x_t - \bar{x})^2}$$

↳ LA VARIANZA STIMATA DI $\hat{\beta}_2$

DEFINIZIONE

$$\underbrace{\sqrt{\widehat{VAR}(\hat{\beta}_2)} = \sqrt{\frac{RSS}{(T-2)\sum_t (x_t - \bar{x})^2}}}_{\text{STANDARD ERROR DI } \hat{\beta}_2}$$

$$\left(SE(\hat{\beta}_2) \right)$$

DEFINIZIONE

$$\sqrt{\hat{\sigma}^2} = \hat{\sigma}$$

STANDARD ERROR DELLA REGRESSIONE

APPLICAZIONE

(BIRRA)

MODELLO STATISTICO DI DOMANDA DI UN BENE:

$$Q_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + U_t \qquad t = 1 \ldots T = 30$$

INTERPRETAZIONE ECONOMICA DI β_2

$$\frac{dQ_t}{dP_t} = \beta_2 = \text{EFFETTO MARGINALE DI } P_t \text{ SU } Q_t$$

$(\beta_2 < 0)$

$\beta_2 < 0$

ELASTICITÀ DI Q_t A P_t $\equiv$ $\boxed{e_{QP} = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}}$

REATTIVITÀ DELLA VARIABILE Q A UNA ||VARIAZIONE PERCENTUALE|| DELLA VARIABILE P

E.S. SE P AUMENTA DEL 7%, Q DIMINUISCE DI e_{QP}%

SE SIAMO INTERESSATI A MISURARE e_{QP}, DOBBIAMO NECESSARIAMENTE MISURARE β_2

PER MISURARE β_2 CI SERVIAMO DELLO STIMATORE $\hat{\beta}_2$

$$\boxed{\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_t (Q_t - \overline{Q})(P_t - \overline{P})}{\sum_t (P_t - \overline{P})^2}}$$

$$\left(\hat{\beta}_1 = \overline{Q} - \hat{\beta}_2 \overline{P} \right)$$

$\hat{\beta}_2$ (STIMATORE)

$\downarrow$ (DATI)

$\hat{\beta}_2$ = VALORE STIMATO (STIMA)

$= \underline{\underline{-9.83}}$ (VALORE NEGATIVO, COME DA TEORIA ECONOMICA)

RETTA DI REGRESSIONE

$$\hat{Q}_t = \underbrace{\hat{\beta}_1}_{86.4} + \underbrace{\hat{\beta}_2}_{-9.83} P_t \quad \text{(VALORI FITTATI)}$$

$R^2 = 0.65 = 65\%$ DELLA VARIABILITÀ DI Q_t È SPIEGATA DAL MODELLO

$$SE(\hat{\beta}_2) = \sqrt{\widehat{VAR}(\hat{\beta}_2)} = 1.375$$

→ ELEMENTO FONDAMENTALE PER CALCOLARE $SE(\hat{\beta}_2)$

È $\hat{\sigma}^2 \Rightarrow \hat{\sigma}$ = STANDARD ERROR DELLA REGRESSIONE = $= 4.76$

$RSS = \underline{633.5}$

MEDIA VARIABILE DIPENDENTE $= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} Q_t \equiv \overline{Q}$

$= 56.11$

S.D. VARIABILE DIPENDENTE $= \sqrt{\frac{\sum_t (Q_t - \overline{Q})^2}{T-1}}$ TSS $=$

$= 7.86$

$$\Downarrow$$

$$TSS = (SD\ \text{VAR DIP})^2 \cdot (T-1)$$

$$\Downarrow$$

$$ESS = TSS - RSS$$

TRASFORMAZIONE LOGARITMICA

$\log Q_t$; $\log P_t$

$$\boxed{\underbrace{\log Q_t}_{Q_t^*} = \beta_1 + \beta_2 \underbrace{\log P_t}_{P_t^*} + u_t}$$

MODELLO STATISTICO LINEARE NELLE VARIABILI TRASFORMATE

INTERPRETAZIONE DI β_2

$$\beta_2 = \frac{d \log Q_t}{d \log P_t} = \underbrace{\frac{dQ_t}{dP_t} \cdot \frac{P_t}{Q_t}}_{e_{QP}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \log(x) \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x} \end{array}}$$

USANDO LA TRASFORMAZIONE LOGARITMICA SU Q_t E P_t,

β_2 È <u>DIRETTAMENTE</u> INTERPRETABILE

COME ELASTICITÀ DELLA DOMANDA AL PREZZO, CIOÈ:

$$\boxed{\beta_2 = e_{QP}}$$

$$\boxed{\hat{\beta}_2 = \hat{e}_{QP} = -0.5}$$

<u>INTERPRETAZIONE</u> : SE IL PREZZO DELLA BIRRA AUMENTA DEL 10%, ALLORA LA QUANTITÀ DOMANDATA DI BIRRA DIMINUISCE DEL 5% (10% · 0.05)

$$\overset{\longrightarrow R^2_1}{M_1 : Q_t = f(P_t)}$$, DOVE $f(\cdot)$ È LINEARE -

QUALI ALTRE VARIABILI ESPLICATIVE POTREBBERO ESSERE UTILIZZATE PER DESCRIVERE/SPIEGARE Q_t ?

- QUALITÀ DEL BENE
- REDDITO DEL CONSUMATORE
- IMPOSIZIONE FISCALE
- TASSO DI INTERESSE
- PREZZI DI ALTRI BENI

$M_2: \; Q_t = f(P_t, PA_t, M_t)$

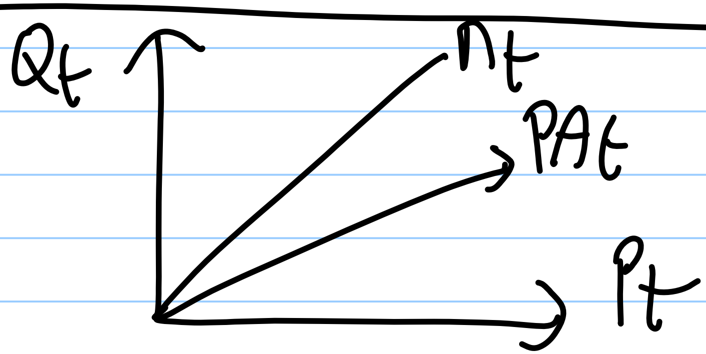
PREZZO DI ALTRO BENE

REDDITO MONETARIO

R_2^2

$\boxed{\text{SEMPRE } \boxed{R_2^2 > R_1^2}}$

$$Q_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 PA_t + \beta_4 n_t + u_t$$



$R^2_2 = \boxed{0.75}$

$R^2_1 = 0.64$

PROBLEMA : SIAMO IN GRADO DI MISURARE LA DISCREPANZA TRA LA STIMA DI β_2 E IL VERO VALORE DI β_2 ? NO, PERCHÉ β_2 NON È NOTO

$$\hat{\beta}_2 (= \text{STIMA}) - \underbrace{\beta_2}_{\text{NON NOTO}} = ?$$

SOLUZIONE : INDIVIDUARE UNA METODOLOGIA STATISTICA

CHE CONSENTA DI VALUTARE LA DISCREPANZA TRA

$\hat{\beta}_2$ (= STIMA) E SPECIFICI VALORI ASSUNTI DA β_2

DI INTERESSE PER L'UTILIZZAZIONE DEL MODELLO STATISTICO

METODOLOGIA STATISTICA = PROVA/TEST DELLE IPOTESI

PROVA DELLE IPOTESI

$$\boxed{y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + u_t}$$

CONCENTRIAMOCI SU β_2

QUALE VALORE DI INTERESSE PER NOI POTREMMO SOTTOPORRE A TEST? DI β_2 $\boxed{\beta_2 = 0}$

TALE VALORE HA INTERESSE "UNIVERSALE", IN QUANTO, SE

VERAMENTE β_2 FOSSE PARI A ZERO, LA X_t
NON AVREBBE ALCUN RUOLO NELLA SPIEGAZIONE DI y_t,
IN ALTRI TERMINI IL MODELLO $y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$
NON AVREBBE SENSO

PROCEDURA DA SEGUIRE PER VERIFICARE L'IPOTESI

$\beta_2 = 0$

(1) IPOTESI NULLA : $H_0 : \beta_2 = 0$

(2) IPOTESI ALTERNATIVA : $H_1 : \beta_2 \neq 0$ (TEST A DUE CODE)

$\left(\begin{array}{l} H_1' : \beta_2 > 0 \\ H_1'' : \beta_2 < 0 \end{array} \right.$ (TEST A UNA CODA))

(3) STATISTICA TEST = VARIABILE CASUALE LA CUI DISTRIBUZIONE $\boxed{\text{È NOTA}}$ SOTTO L'IPOTESI NULLA

VALORI CRITICI TABULATI

$$\text{STATISTICA TEST} = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{SE(\hat{\beta}_2)} \underset{H_0}{\sim} t_{(T-2)}$$

DISTRIBUZIONE t DI STUDENT

$$\text{STATISTICA TEST} = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{SE(\hat{\beta}_2)} \underset{H_0}{=} \frac{\hat{\beta}_2 - 0}{SE(\hat{\beta}_2)} \underset{H_0}{\sim} t_{(T-2)}$$

t - TEST

t - RATIO (RAPPORTO)

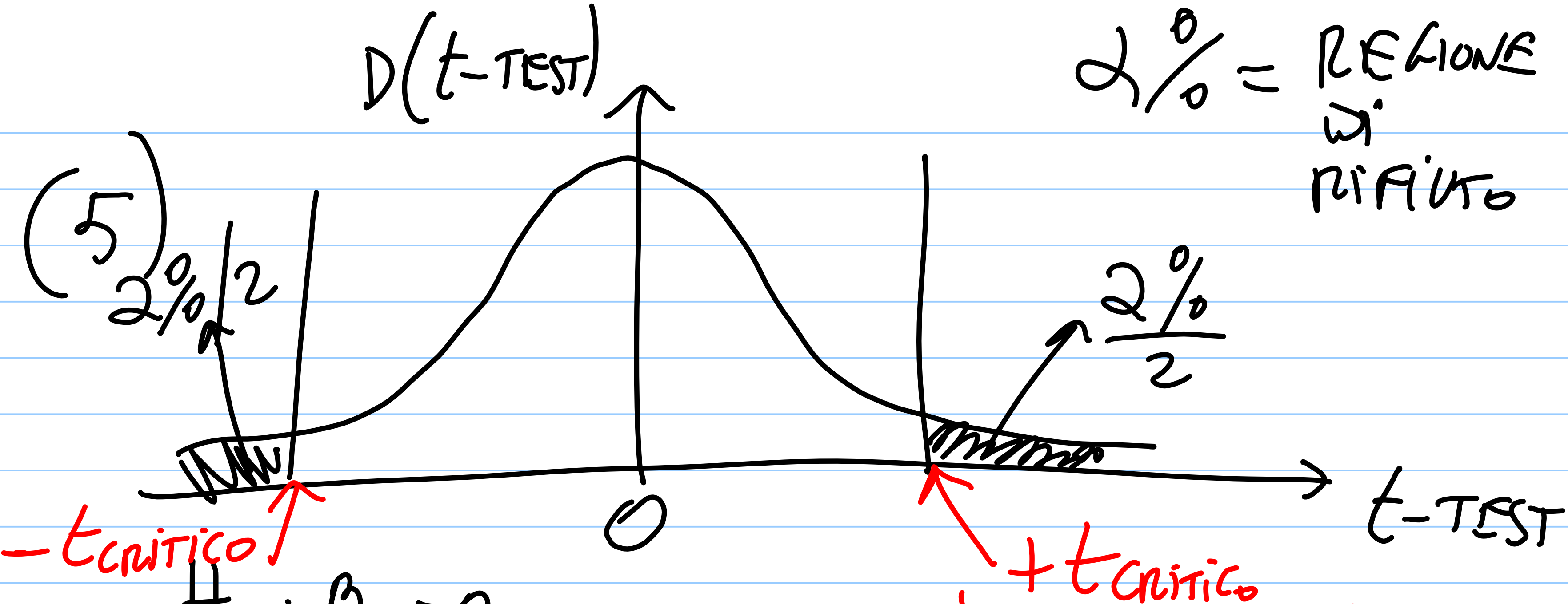
GRADI DI LIBERTÀ

(4) REGIONE DI RIFIUTO = LIVELLO DI SIGNIFICATIVITÀ = PROBABILITÀ DI COMMETTERE UN ERRORE DI I TIPO (RIFIUTARE H_0 QUANDO È VERA)

→ $\alpha\%$ VA FISSATO <u>PRIMA DEL TEST</u>

"PICCOLO" (1%, 5%, 10%)

(5)



$H_0 : \beta_2 = 0$

vs

$H_1 : \beta_2 \neq 0$

TAVOLE DELLA DISTRIBUZIONE t DI STUDENT

6) $\dfrac{\hat{\beta}_2}{SE(\hat{\beta})} \xrightarrow{\text{DATI}} \hat{t}_{CALC}$

VARIABILE CASUALE

REALIZZAZIONE VARIABILE CASUALE

REGOLA: SE $|t_{CALC}| > t_{CRITICO}$, ALLORA $H_0: \beta_2 = 0$ RIFIUTATA AL LIVELLO DI SIGNIFICATIVITÀ DEL 2%.