School of
Economics and Management

Matematica per Economia Finanza e Management

A86001/02 – a.a. 2015/16
MATEMATICA per ECONOMIA, FINANZA e MANAGEMENT

Correttore	Voto

Esercizio	1	2	3
Voto			

Sessione Straordinaria
Primo appello

24 ott. 2016 – S5/01

Cognome ______________________________

Nome ______________________________

Matricola ______________________________

Anno di corso ______________________________

Classe: S H

A86001
A86002

Le risposte devono essere scritte unicamente sui fogli allegati. Motivare sempre i risultati ottenuti.
Compilare la prima facciata con i propri dati.
E' vietato l'uso di qualsiasi dispositivo elettronico che possa essere connesso con altri apparecchi. Il semplice possesso di tali dispositivi, anche se spenti, comporta l'annullamento della prova e sanzioni disciplinari.
I primi due esercizi sono comuni per tutti gli studenti. Risolvere il terzo esercizio relativo alla propria classe. Non saranno attribuiti punti per esercizi aggiuntivi risolti.

Primo Appello 24 ottobre 2016

1. Risolvere i seguenti esercizi.

a. (3 pt) Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\ln(x-1)}$$

b. (2 pt) Calcolare i seguenti limiti

$$\text{i)} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{x \to -\infty} \left(e^{2x} - x\right)$$

c. (3 pt) Data la funzione di domanda $p_D(q) = -1 + \dfrac{9}{q-1}$ e la funzione di offerta $p_S(q) = 6 + q$, con $q > 0$, determinare la quantità di equilibrio del mercato ed il surplus del consumatore corrispondente.

d. (3 pt) Enunciare la definizione di matrice inversa di una matrice $\mathbf{A}$ quadrata di ordine n. Dire, inoltre, motivando la risposta, se sia invertibile la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Un contratto di credito al consumo per un bene del valore di $S = 8.500,00$ Euro, prevede il pagamento di 36 comode rate mensili posticipate di importo costante. Il tasso annuo nominale convertibile mensilmente cui è concesso il finanziamento è $j_{12} = 2,84\%$.

a. (3 pt) Determinare l'importo della rata ed il debito residuo dopo la 30esima rata.

b. (3 pt) Scomporre la seconda rata in quota interessi e quota capitale.

c. (3 pt) Il finanziamento prevede spese iniziali di istruzione pratica per $120,00$ Euro, spese di incasso rata per $1,20$ Euro da corrispondere assieme al pagamento di ogni rata e ulteriori 80 Euro quali spese di chiusura del contratto, da corrispondere assieme al pagamento dell'ultima rata. Verificare se il TAEG del contratto superi il 5% annuo composto effettivo.

d. (2 pt) Enunciare il Teorema di Cantelli e fornire un esempio di legge finanziaria non scindibile.

3. (standard) Risolvere i seguenti quesiti.

a. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2}$$

i. (4 pt) Determinare il dominio, il segno e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani, gli eventuali asintoti orizzontali o verticali, gli estremanti locali o globali, gli intervalli di monotonia e di convessità, rappresentando i risultati ottenuti anche in un grafico qualitativo;

ii. (2 pt) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} dx$$

b. (2 pt) Calcolare il TIR dell'investimento

epoca (anni)	0	1	2
flussi di cassa (Euro)	−5.500	2.800	2.800

c. (3 pt) Un capitale iniziale di 1.000 è impiegato per 3 anni e sei mesi. Calcolare il montante nelle seguenti ipotesi:

1. Capitalizzazione ad interessi semplici al tasso annuo $i = 3,00\%$
2. Capitalizzazione ad interessi composti al tasso annuo effettivo $x = 2,50\%$
3. Capitalizzazione ad interessi semplici anticipati al tasso di sconto commerciale annuo $d = 2,80\%$.

3. (challenge) Risolvere i seguenti quesiti:

   a. (3 pt) Una operazione finanziaria prevede i pagamenti

tempo (anni)	2/12	8/12	14/12	20/12
flussi di cassa (€)	1.200	1.200	1.200	101.400

   Calcolare la Duration D al tasso annuo composto effettivo $i = 1,50\%$

   b. (5 pt) Data la funzione

$$F(x, y, z) = 2x^2 + 4xz + \frac{5}{2}y^2 + 2yz + 2z^2$$

   1. Calcolare il vettore gradiente della funzione in un generico punto (x, y, z).
   2. Determinare gli eventuali punti stazionari
   3. Scrivere la matrice Hessiana della funzione e determinare la natura dei punti stazionari trovati.

   c. (3 pt) Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni del sistema lineare

$$\begin{bmatrix} -1 & 1+k & 1/4 \\ 1-k & -k & 0 \\ -1 & 2 & k \\ 0 & k & k^2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Primo Appello (Soluzioni) 24 ottobre 2016

1. Risolvere i seguenti esercizi.

a. (3 pt) Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\ln(x-1)}$$

b. (2 pt) Calcolare i seguenti limiti

$$\text{i)} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{x \to -\infty} \left(e^{2x} - x\right)$$

c. (3 pt) Data la funzione di domanda $p_D(q) = -1 + \dfrac{9}{q-1}$ e la funzione di offerta $p_S(q) = 6 + q$, con $q > 0$, determinare la quantità di equilibrio del mercato ed il surplus del consumatore corrispondente.

d. (3 pt) Enunciare la definizione di matrice inversa di una matrice $\mathbf{A}$ quadrata di ordine n. Dire, inoltre, motivando la risposta, se sia invertibile la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

(a) Le condizioni da verificare sono

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ \ln(x-1) \neq 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Intersecando le tre condizioni si ottiene $\texttt{dom} f = (2, +\infty)$

(b)

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2,$

2. $\lim\limits_{x\to -\infty} (e^{2x} - x) = [0 + \infty] = +\infty$

(c) Per determinare il prezzo p^* e la quantità q^* di equilibrio dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} p = -1 + \dfrac{9}{q-1} \\ p = 6 + q \end{cases}$$

con $q > 0$. Le soluzioni del sistema sono $[p = 8, q = 2]$ e $[p = -2, q = -8]$, ma la seconda non è accettabile, quindi si ha $q^* = 2$ e $p^* = 8$. Per calcolare il surplus del consumatore conviene scrivere le funzioni di domanda e di offerta come funzioni del prezzo:

$$\begin{cases} q = 1 + \dfrac{9}{p+1} \\ q = p - 6 \end{cases}$$

il surplus sarà quindi

$$S_c = \int_0^8 \left(1 + \frac{9}{p+1} - 2\right) dq = 11.775.$$

(d) Per la definizione si veda il libro di testo.
Poiché una matrice quadrata è invertibile se e solo se è non singolare, ma

$$\det \mathbf{A} = 0$$

la matrice non è invertibile.

2. Un contratto di credito al consumo per un bene del valore di $S = 8.500,00$ Euro, prevede il pagamento di 36 comode rate mensili posticipate di importo costante. Il tasso annuo nominale convertibile mensilmente cui è concesso il finanziamento è $j_{12} = 2,84\%$.

a. (3 pt) Determinare l'importo della rata ed il debito residuo dopo la 30esima rata.

b. (3 pt) Scomporre la seconda rata in quota interessi e quota capitale.

c. (3 pt) Il finanziamento prevede spese iniziali di istruzione pratica per 120, 00 Euro, spese di incasso rata per 1, 20 Euro da corrispondere assieme al pagamento di ogni rata e ulteriori 80 Euro quali spese di chiusura del contratto, da corrispondere assieme al pagamento dell'ultima rata. Verificare se il TAEG del contratto superi il 5% annuo composto effettivo.

d. (2 pt) Enunciare il Teorema di Cantelli e fornire un esempio di legge finanziaria non scindibile.

Soluzione:

(a) Il tasso periodale è $i_{12} = \frac{2,84\%}{12} = 0,237\%$. L'importo delle 36 rate costanti è quindi

$$R = 8.500 \times \frac{0,237\%}{1-(1+0,237\%)^{-36}} = 246,606 \text{ Euro}$$

Il debito residuo dopo la trentesima rata sarà pari al valore attualizzato delle 6 rate residue

$$D_{30} = 246,606 \times \frac{1-(1+0,237\%)^{-6}}{0,237\%} = 1.467,440 \text{ Euro}$$

(b) Il debito residuo dopo il pagamento della prima rata è

$$D_1 = 8.500 \times (1+0,237\%) - R = 8.273,539 \text{ Euro}$$

Pertanto la quota di interessi nella seconda rata è

$$I_2 = 8.273,539 \times 0,237\% = 19,608 \text{ Euro}$$

e la quota capitale

$$C_2 = R - I_2 = 226,998 \text{ Euro}$$

(c) Considerando l'operazione finanziaria dal punto di vista del finanziatore, si ha un investimento puro, per il quale

$$NPV\,(5\%) = -8.500+120+(246,606+1,20)\times\frac{1-(1+i_{12})^{-36}}{i_{12}}+\frac{80}{(1+5\%)^3} = -28,287 < 0$$

dove $i_{12} = (1+5\%)^{1/12} - 1 = 0,407\%$. Pertanto, dal grafico del DCF di un investimento puro, si deduce che il TAEG non supera il 5%.

(d) Si veda il libro di testo.

3. (standard) Risolvere i seguenti quesiti.

a. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2}$$

i. (4 pt) Determinare il dominio, il segno e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani, gli eventuali asintoti orizzontali o verticali, gli estremanti locali o globali, gli intervalli di monotonia e di convessità, rappresentando i risultati ottenuti anche in un grafico qualitativo;

ii. (2 pt) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} dx$$

b. (2 pt) Calcolare il TIR dell'investimento

epoca (anni)	0	1	2
flussi di cassa (Euro)	-5.500	2.800	2.800

c. (3 pt) Un capitale iniziale di 1.000 è impiegato per 3 anni e sei mesi. Calcolare il montante nelle seguenti ipotesi:

1. Capitalizzazione ad interessi semplici al tasso annuo $i = 3,00\%$
2. Capitalizzazione ad interessi composti al tasso annuo effettivo $x = 2,50\%$
3. Capitalizzazione ad interessi semplici anticipati al tasso di sconto commerciale annuo $d = 2,80\%$.

Soluzione:

(a)

1. Il dominio della funzione è $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. La funzione risulta positiva per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, nulla in $x = 1$, punto di intersezione con l'asse x. Poiché

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$. Inoltre

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

quindi $x = 0$ è un asintoto verticale. La funzione è continua e derivabile nel suo dominio, con

$$f'(x) = \frac{-x^2 - (1-x)\,2x}{(x^2)^2} = \frac{x^2 - 2x}{x^4} = \frac{x-2}{x^3}$$

Risulta quindi monotona crescente negli intervalli $[2, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$, decrescente altrove. Il punto $x = 2$ è quindi di minimo almeno locale.
Risulta inoltre due volte derivabile con

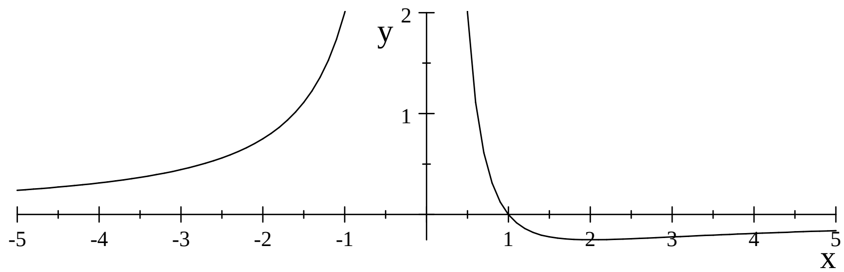
$$f''(x) = \frac{x^3 - 3x^2(x-2)}{(x^3)^2} = \frac{-2x^3 + 6x^2}{x^6} = -2\frac{x-3}{x^4}$$

Quindi

$$-2\frac{x-3}{x^4} \geq 0$$

la funzione è convessa negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, 3]$, concava altrove, con $x = 3$ punto di flesso.

Un grafico qualitativo è



2. Risulta

$$\int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x} - \ln|x| + C$$

(b) Calcolare il TIR dell'investimento

epoca (anni)	0	1	2
flussi di cassa (Euro)	-5.500	2.800	2.800

Deve essere

$$-5.500 + \frac{2.800}{1+x} + \frac{2.800}{(1+x)^2} = 0$$

da cui risulta $x^* = 1,2097\%$.

(c)

1. Risulta

$$M = 1.000 \times (1 + 3\% \times 3,5) = 1.105,000$$

2. Risulta

$$M = 1.000 \times (1 + 2,50\%)^{3,5} = 1.090,269$$

3. Risulta

$$M = \frac{1.000}{1 - 2,80\% \times 3,5} = 1.108,648$$

(d) Risolvere i seguenti quesiti:

a. (3 pt) Una operazione finanziaria prevede i pagamenti

tempo (anni)	2/12	8/12	14/12	20/12
flussi di cassa (€)	1.200	1.200	1.200	101.400

Calcolare la Duration D al tasso annuo composto effettivo $i = 1,50\%$

b. (5 pt) Data la funzione

$$F(x, y, z) = 2x^2 + 4xz + \frac{5}{2}y^2 + 2yz + 2z^2$$

1. Calcolare il vettore gradiente della funzione in un generico punto (x, y, z).
2. Determinare gli eventuali punti stazionari
3. Scrivere la matrice Hessiana della funzione e determinare la natura dei punti stazionari trovati.

c. (3 pt) Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni del sistema lineare

$$\begin{bmatrix} -1 & 1+k & 1/4 \\ 1-k & -k & 0 \\ -1 & 2 & k \\ 0 & k & k^2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

a. La duration è

tempo (anni)	2/12	8/12	14/12	20/12
flussi di cassa (€)	1.200	1.200	1.200	101.400

$$D = \frac{\frac{2}{12}\frac{1.200}{(1{,}015)^{2/12}} + \frac{8}{12}\frac{1.200}{(1{,}015)^{8/12}} + \frac{14}{12}\frac{1.200}{(1{,}015)^{14/12}} + \frac{20}{12}\frac{101.400}{(1{,}015)^{20/12}}}{\frac{1.200}{(1{,}015)^{2/12}} + \frac{1.200}{(1{,}015)^{8/12}} + \frac{1.200}{(1{,}015)^{14/12}} + \frac{101.400}{(1{,}015)^{20/12}}} = 1,6318$$

(a)

1. Si ha $\nabla F(x, y, z) = \begin{bmatrix} 4x + 4z \\ 5y + 2z \\ 4x + 2y + 4z \end{bmatrix}$
2. I punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4x + 4z = 0 \\ 5y + 2z = 0 \\ 4x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

ovvero il solo punto $P = [x = 0, y = 0, z = 0]$

3. La matrice Hessiana è $\nabla^2 F(x,y,z) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, costante. Poiché $H_1 = 4 > 0$, $H_2 = 20 > 0$ e $H_3 = -16 < 0$, il punto è di sella.

(b) Il sistema è omogeneo, quindi sicuramente possibile. La matrice dei coefficienti $\mathbf{A}$ ha rango $1 \leq \rho(\mathbf{A}) \leq 3$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. Inoltre, poiché la sottomatrice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

ha determinante $\det \mathbf{B} = -k$, il rango è almeno 2 per ogni $k \neq 0$. Se $k = 0$, la matrice dei coefficienti è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

di rango almeno 2 poiché è non singolare la sottomatrice $\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi, per ogni $k \in \mathbb{R}$, si ha $2 \leq \rho(\mathbf{A}) \leq 3$. Le matrici orlate di $\mathbf{B}$ sono

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1+k & 1/4 \\ -1 & 2 & k \\ 0 & k & k^2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1-k & -k & 0 \\ -1 & 2 & k \\ 0 & k & k^2 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{C}_1 = \tfrac{1}{4}k(2k-1)(2k+1) \qquad \det \mathbf{C}_2 = -k^2(2k-1)$$

entrambe singolari per $k = \frac{1}{2}$. Le matrici orlate di $\hat{\mathbf{B}}$ sono

$$\hat{\mathbf{C}}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{C}}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \hat{\mathbf{C}}_1 = 0 \qquad \det \hat{\mathbf{C}}_2 = \tfrac{1}{2}$$

Quindi per $k \neq \frac{1}{2}$ il rango è 3 ed esiste un'unica soluzione, per $k = \frac{1}{2}$ il rango è 2 ed esistono infinite soluzioni con un grado di libertà.