(Libro di testo Newbold: Capitolo 5, Sezione 5). Distribuzione o v.a. Binomiale

$X=$"numero di successi in ***n*** prove, con probabilita' costante ***p*** di 1 successo in una qualsiasi prova". Simbolo: $X \sim Bi(n;p)$. Parametri: $n \in \{1,2,\ldots\}$, $p \in (0,1)$. Funzione di probabilita':

$$p(x)=\begin{cases} C_x^n p^x (1-p)^{n-x}, & x \in S_X=\{0,1,\ldots n\} \\ 0, & altrove \end{cases}, \quad (E(X)=np, V(X)=np(1-p))$$

dove $C_x^n=\binom{n}{x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}$ (= coefficiente binomiale "*n* su *x*")

Esercizio 1. Per $X \sim Bi(3;1/4)$ (a) si calcolino le probabilita' p(x) riportate nella seguente tabella:

X Bin. p=1/4; n=3	
x	p(x)
0	0,421875
1	0,421875
2	0,140625
3	0,015625

(b) si specifichi la funzione di probabilita' della Binomiale di cui sopra.
(c) si calcoli media e varianza della della Binomiale di cui sopra.
(d) con la $X \sim Bi(3;1/4)$ di cui sopra di determini la probabilita' di non piu' di due seccessi, la probabilita' di almeno un successo, la probabilita' di 1 o 2 successi, ed infine $P(X \in [\mu_X - 1, \mu_X + 1])$.
(e) si tracci il grafico della funzione di probabilita' di cui in (b).

Soluzione.
(a) se i calcoli sono corretti devono dare le probabilita' p(x) in tabella. Infatti i calcoli danno:

p(0) = $\binom{3}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{3-0}=1\cdot1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=0{,}421875 \left[C_0^3=\binom{3}{0}=\frac{3!}{0!(3-0)!}=1\right]$

p(1) = $\binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^{3-1}=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^3=0{,}421875 \left[C_1^3=\binom{3}{1}=\frac{3!}{1!(3-1)!}=3\right]$

p(2) = $\binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{3-2}=3\cdot1\cdot\frac{3}{4^2}=\left(\frac{3}{4}\right)^2=0{,}140625 \left[C_2^3=\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!(3-2)!}=3\right]$

p(3) = $\binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{3-3}=1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot1=0{,}015625 \left[C_3^3=\binom{3}{3}=\frac{3!}{3!(3-3)!}=1\right]$

(b) sulla base della tabella e dei calcoli fatti in (a) la funzione di probabilita' e':

$$p(x)=\begin{cases} 0.4219, & x=0 \\ 0.4219, & x=1 \\ 0.1406, & x=2 \\ 0.0156, & x=3 \\ 0, & altrove \end{cases}$$

(c) $E(X)=np=3\frac{1}{4}=0.75$, $V(X)=np(1-p)=3\frac{1}{4}\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^2=0.140625$

(d) La prima probabilita' richiesta e'

$$P(X\leq 2)=1-P(X>2)=1-P(X\geq 3)=1-p(3)=1-0.015625=$$

La seconda probabilita' richiesta e'

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X\leq 0)=1-p(0)=1-0.421875=0.578125$$

La terza probabilita' richiesta e'

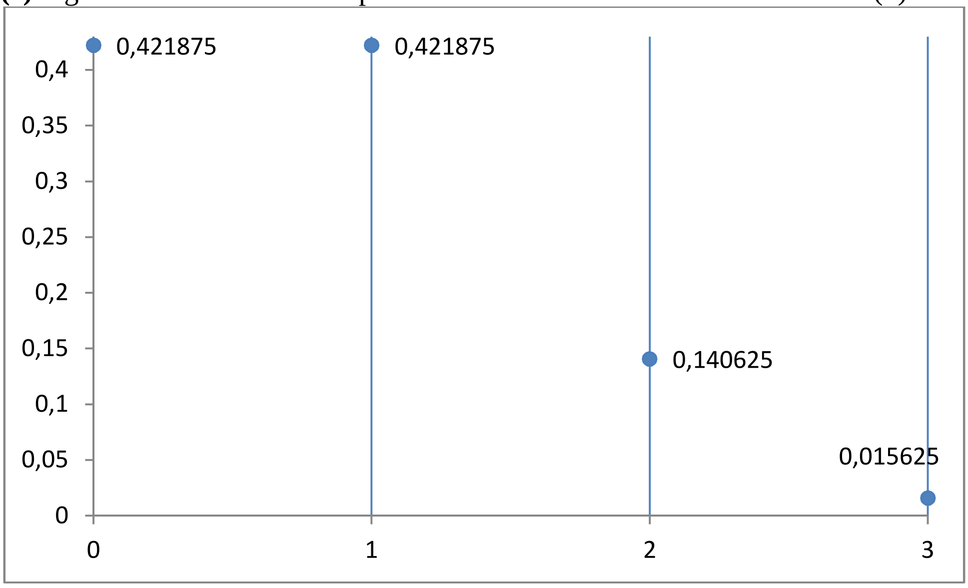
$$P(1\leq X\leq 2)=p(1)+p(2)=0.421875+0.140625=0.5625$$

Infine, la quarta probabilita' richiesta e'

$$P\left(X\in[\mu_X-1,\mu_X+1]\right)=P\left(\mu_X-1\leq X\leq \mu_X+1\right)=P\left(0.75-1\leq X\leq 0.75+1\right)=$$

$$=P\left(-0.25\leq X\leq 1.75\right)=p(0)+p(1)=2\cdot 0.421875=0.84375$$

(e) il grafico della funzione di probabilita' della Binomiale di cui di cui in (b) e':



Esercizio 2. Per $Y\sim Bi(3;1/2)$ (a) si calcolino le probabilita' p(y) riportate nella seguente tabella:

Y Bin. p=1/2; n=3	
y	p(y)
0	0,125
1	0,375
2	0,375
3	0,125

(b) si specifichi la funzione di probabilita' della Binomiale di cui sopra
(c) si calcoli media e varianza della della Binomiale di cui sopra.
(d) si calcoli la probabilita' $P\left(Y\in[\mu_Y-1,\mu_Y+1]\right)$.
(e) si tracci il grafico della funzione di probabilita' di cui in (b).
(f) si confrontino il valore della probabilita' in (d) sopra ed il valore della quarta probabilita' in (d) dell'esercizio precedente, e si commenti il confronto tenendo conto della varianza in (c) sopra e della varianza in (c) dell'esercizio precedente.

Soluzione.
(a) se i calcoli sono corretti devono dare le probabilita' p(y) in tabella.
(b) sulla base della tabella la funzione di probabilita' e':

$$p(y)=\begin{cases}0.125, & y=0\\ 0.375, & y=1\\ 0.375, & y=2\\ 0.125, & y=3\\ 0, & altrove\end{cases}$$

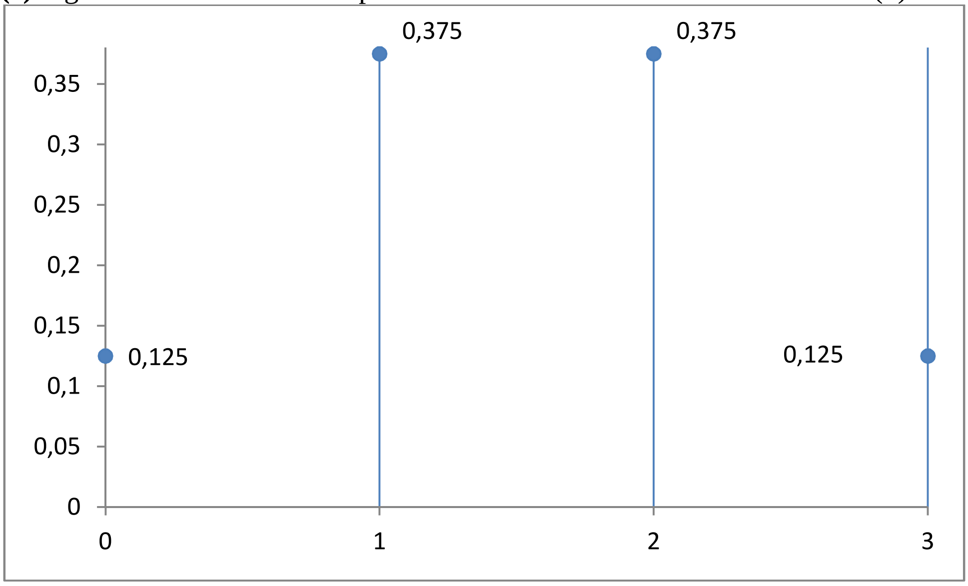
(c) $E(Y)=np=3\frac{1}{2}=1.5$, $V(Y)=np(1-p)=3\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{3}{4}=0.75$

(d) La probabilita' richiesta e'

$$P\left(Y\in[\mu_Y-1,\mu_Y+1]\right)=P(\mu_Y-1\le Y\le\mu_Y+1)=P(1.5-1\le Y\le 1.5+1)=$$

$$=P(0.5\le Y\le 2.5)=p(1)+p(2)=2\cdot 0.375=0.75$$

(e) il grafico della funzione di probabilita' della Binomiale di cui di cui in (b) e':



(f) Nello stesso intervallo con al centro la media nei due casi si ha

$$P(\mu_X-1\le X\le\mu_X+1)=0.84375>P(\mu_Y-1\le Y\le\mu_Y+1)=0.75$$

Cio' e' coerente col fatto che nei due casi le varianze sono rispettivamente tali che

$$V(X)=0.140625<V(Y)=0.75$$

In conclusione, a parita' di intervallo con al centro la media, vi e' <u>maggiore</u> concentrazione della probabilita' (o dei valori della variabile) in tale intervallo per la variabile che ha varianza <u>minore</u>, cioe' per la $X\sim Bi(3;1/4)$.

Seguono qui sotto dei brevi commenti esplicativi che integrano, per chi ne avesse bisogno, le tracce di soluzione degli esercizi nel file "Esercizi di probabilita' (Binomiale, Poisson) con tracce di soluzione" pubblicato nel materiale didattico. Si tratta degli Esercizi 1, 2, e 3 sulla variabile aleatoria Binomiale il cui testo non e' qui riportato (si veda detto file).

ESERCIZIO 1.

_ 'In dieci minuti, 8 persone visitano il sito': la durata del tempo sarebbe rilevante se fosse detto 'In dieci minuti 8 visitatori hanno (non hanno) effettuato l'acquisto' e allora la variabile da usare sarebbe la Poisson (ma allora l'esercizio dovrebbe dare la media). Conclusione:

_ la durata del tempo e' <u>irrelavante</u>,

_ successo = 'visitatore effettua l'acquisto'

_ numero delle prove n = 8

_ probabilita' di successo in una prova p = 0.1 (10.00%)

_ variabile aleatoria da usare e' Bi(8;0.1).

ESERCIZIO 2.
_ successo = 'pezzo difettoso'
_ numero delle prove n = 5,
_ probabilita' di successo in una prova p = 0.05
_ variabile aleatoria da usare e' Bi(5;0.05).

ESERCIZIO 3.
_ successo = 'testa'
_ numero delle prove n = 4,
_ probabilita' di successo in una prova p = 0.5
_ variabile aleatoria da usare e' Bi(4;0.5).
Domande in simboli e risposte:

a) $P(X=0) = p_X(0) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{4-0} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \left(p_X(0) + p_X(1)\right) = 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{4}{16}\right) = \frac{11}{16}$

$dove:\ p_X(1) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} = 4\frac{1}{2^4} = \frac{4}{16}$ e per $p_X(0)$ vedi la risposta (a) sopra.

c) $P(X=2) = p_X(2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = 6\frac{1}{2^4} = \frac{6}{16}$