Si ricordi che il **supporto** di una variabile (aleatoria o non aleatoria) e' l'insieme dei suoi valori possibili cioe' il suo insieme di definizione. Nei corsi di Matematica tale insieme di valori possibili e' detto dominio se la variabile e' indipendente (da una o piu' altre variabili), o codominio se la variabile e' dipendente (da una o piu' altre variabili). In tutto quanto segue, che la variabile aleatoria di cui trattiamo sia indipendente o dipendente (da una o piu' altre variabili) e' del tutto irrilevante.
Cio' e' il motivo per cui si usa il termine generale di **supporto** per l'insieme dei valori possibili di una variabile aleatoria (in quanto segue "v.a." e' l'abbreviazione di "variabile aleatoria").

DEFINIZIONE di v.a. discreta. Una v.a. discreta X e' una variabile definita da:
(A) il suo supporto $S_X \subseteq \mathbb{R}$ che e' un insieme discreto,
(B) la probabilita' $p(x)$ di ogni valore $x \in S_X$, con $p(x)$ che e' una funzione di $x \in S_X$ ed e' detta funzione di probabilita' della v.a. X. Tale funzione ha le seguenti due proprieta' (B1) e (B2):

(B1) $$\begin{cases} p(x) \in (0,1], \ x \in S_X \subseteq \mathbb{R} \\ p(x) = 0, \qquad \text{altrove } \left(cioe' \ per \ x \notin S_X, ovvero \ x \in \overline{S}_X = \mathbb{R} - S_X \right) \end{cases}$$

(B2) $$\sum_{x \in S_X} p(x) = 1$$

I valori per cui $p(x) = 0$, cioe' i valori $x \notin S_X$ sono i valori non possibili, o impossibili, per la v.a. X.

ESERCIZI SULLE VARIBILI ALEATORIE DISCRETE
Esercizi visti a lezione: pagg. 1 e 2. Esercizi supplementari ed integrativi: pag. 3.

Esercizio 1. Si specifichi la funzione di probabilita' della v.a. X = "risultato del lancio di un dado regolare a sei facce".
Soluzione. I dati sono i seguenti: supporto $S_X = \{1,2,3,4,5,6\}$, probabilita' $p(x)$ tutte uguali, ovvero $p(x) = c = \text{costante}$ per ogni $x \in S_X$. Allora, per la proprieta' (B2) si ha

$$\sum_{x=1}^{6} p(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^{6} c = \underbrace{c + c + \ldots + c}_{6 \ addendi} = 1 \Rightarrow \boxed{6c = 1} \Rightarrow c = \frac{1}{6} = p(x)$$

Oppure, con approccio piu' intuitivo, poiche' la somma delle $p(x)$ per la proprieta' (B2) e' pari a uno, tale somma va divisa in sei parti uguali ottenendo cosi' $p(x) = 1/6$ per ogni $x \in S_X$.
Dunque la funzione di probabilita' richiesta e' la seguente

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, \ x \in S_X = \{1,2,3,4,5,6\} \\ 0, \ altrove \end{cases}$$

Osservazione 1. Poiche' la funzione di probabilia' suddivide, o distribuisce, la probabilita' complessiva 1 fra i diversi valori possibili della v.a. si dice anche distribuzione di probabilita' od anche, piu' brevemente, distribuzione. Inoltre, si noti che la funzione di probabilita' oltre alle probabilita' indica, necessariamente, anche il supporto della v.a., e dunque specifica completamente la v.a. stessa. Da tutto cio' deriva che, quando opportuno, il termine "distribuzione" e' usato al posto di "variabile aleatoria".

Esercizio 2. Di una v.a. Y si sa che $S_Y = \{0,1\}$ e che $p(1) = 2/3$. Si specifichi la funzione di probabilita' della v.a. Y.
Soluzione. I dati sono i seguenti:
supporto $S_Y = \{0,1\}$, $p(1) = 2/3$. Allora, dalla proprieta' (B2) si ha

$$\sum_{x=0}^{1} p(x) = p(0) + p(1) = 1 \Rightarrow \boxed{p(0) + \frac{2}{3} = 1} \Rightarrow p(0) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

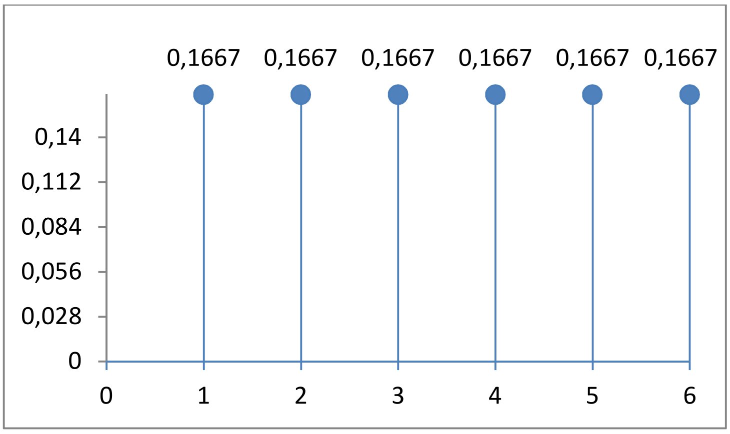
Dunque la funzione di probabilita' richiesta e' la seguente

$$p(y)=\begin{cases}1/3, & y=0\\ 2/3, & y=1\\ 0, & altrove\end{cases}$$

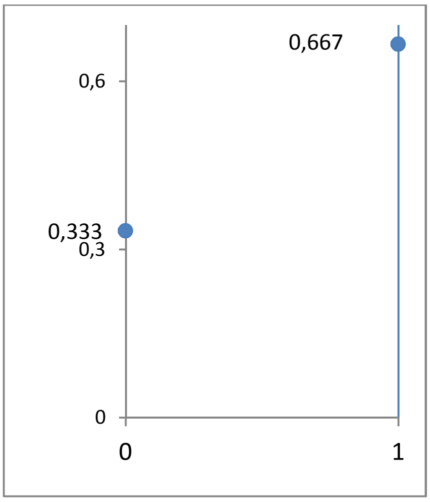
Esercizio 3. Si supponga che il numero di errori di stampa che si possono avere in un foglio formato A4 siano solo 0, 1, 2, e 3, con probabilita' rispettivamente pari a 0.9, 0.05, 0.03, e 0.02. Si specifichi la funzione di probabilita' della v.a. X = "numero di errori di stampa in un foglio formato A4".
Soluzione.

$$p(x)=\begin{cases}0.9, & x=0\\ 0.05, & x=1\\ 0.03, & x=2\\ 0.02, & x=3\\ 0, & altrove\end{cases}$$

Esercizio 4. Si dia la rappresentazione grafica delle funzioni di probabilita' determinate negli Esercizi 1 e 2.
Soluzione. Per l'Esercizio 1, mettendo i valori possibili $x \in S_X = \{1,2,3,4,5,6\}$ sull'asse delle ascisse, e sull'asse delle ordinate le probabilita' $p(x)=1/6=0.1\overline{6}\cong 1.667$ si ha il seguente grafico



Per l'Esercizio 2, mettendo i valori possibili $y \in S_Y = \{0,1\}$ sull'asse delle ascisse, e sull'asse delle ordinate le probabilita' $p(0)=1/3=0.\overline{3}\cong 0.333$, e $p(1)=2/3=0.\overline{6}\cong 0.667$ si ha il seguente grafico



Esercizio 5. Un'urna contiene 6 palline regolari numerate da 1 a 6. Si determini la funzione di probabilita' della v.a. X = "risultato della estrazione casuale di una pallina dall'urna".
Soluzione. La funzione di probabilita' e' la stessa dell'Esercizio 1.

Osservazione 2. I prossimi Esercizi 6 e 7 sono generalizzazioni dell'Esercizio 5 precedente. Si riferiscono al metodo di assegnazione della probabilita' ad un valore possibile $x \in S_X$ facendo il rapporto fra il numero dei casi che danno il valore $x \in S_X$ (detto numero dei casi favorevoli a $x \in S_X$) ed il numero complessivo dei casi possibili. Tale metodo, che e' detto metodo classico di assegnazione delle probabilita', si usa quando a tutti i casi possibili si puo' riferire la nozione di "regolarita'" come compiutamente esemplificato nei detti Esercizi 6 e 7 seguenti.

Esercizio 6. Un'urna contiene 60 palline regolari, di cui 10 numerate con 1, 10 numerate con 2, e cosi' di seguito di 10 in 10, fino alle ultime 10 numerate con 6. Si determini la funzione di probabilita' della v.a. X = "risultato della estrazione casuale di una pallina dall'urna".

Soluzione. Il risultato della estrazione di una pallina e' $x \in S_X = \{1,2,3,4,5,6\}$ e vi sono 60 palline (o "casi") regolari. Inoltre, per il risultato $x=1$ vi sono 10 palline (o casi favorevoli) su 60, per il risultato $x=2$ vi sono 10 palline (o casi favorevoli) su 60, e cosi' di seguito. Dunque, il risultato $x=1$ ha probabilita' $10/60=1/6$ (cioe' n. di casi favorevoli diviso n. dei casi possibili), il risultato $x=2$ ha probabilita' $10/60=1/6$, e cosi' di seguito. In conclusione, la funzione di probabilita' richiesta risulta la medesima ottenuta nell'Esercizio 1.

Esercizio 7. Un'urna contiene 90 palline regolari di cui 60 numerate con 1 e le rimanenti con 0. Si determini la funzione di probabilita' della v.a. X = "risultato della estrazione casuale di una pallina dall'urna".

Soluzione. Il risultato della estrazione di una pallina e' $x \in S_X = \{0,1\}$ e vi sono 90 palline (o "casi") regolari, di cui 60 favorevoli a $x=1$ ed i rimanenti 30 che sono favorevoli a $x=0$. Dunque, il risultato $x=1$ ha probabilita' $60/90=2/3$, ed il risultato $x=0$ ha probabilita' $30/90=1/3$. In conclusione, la funzione di probabilita' richiesta risulta la medesima ottenuta nell'Esercizio 2.

Osservazione 3. La tabella nel seguente Esercizio 9 da' il numero di volte (detto anche frequenza assoluta, vedi esercitazione Excel) in cui si e' osservato il valore $x \in S_X$ della v.a. X = "risultato del lancio di un dado regolare a sei facce" in 120 lanci del dado. La percentuale di tale numero di volte (su 120) richiesta nella domanda (a) e' detta anche frequenza relativa percentuale (vedi esercitazione Excel).

Esercizio 8. Si e' lanciato un dado regolare a 6 facce 120 volte ottenendo quanto riportato qui sotto:

x	1	2	3	4	5	6
n. di volte x	21	19	18	22	23	17

(a) calcolare la percentuale delle volte (o frequenza relativa %) in cui ciascun valore si e' osservato nei 120 lanci del dado.
(b) specificare le frequenze assolute (teoriche) nei 120 lanci se il dado fosse stato esattamente regolare.
(c) specificare le frequenze relative % (teoriche) nei 120 lanci se il dado fosse stato esattamente regolare.

Soluzione.

(a) P. es., per $x=1$ la frequenza relativa % si calcola come segue: $(21/120)\cdot 100 = 0{,}175 \cdot 100 = 17{,}5\%$ ed allo stesso modo per tutti gli $x \in S_X$, ottenendo dunque

x	1	2	3	4	5	6
freq.rel.% di x	17.5%	15.83%	15.00%	18.83%	19.17%	14.17%

(c) Nel caso di un dado regolare ogni $x \in S_X$, che sono 6 in totale, (teoricamente) si dovrebbe osservare lo stesso numero di volte cioe' $120/6=20$ volte ciascun $x \in S_X$, ottenendo dunque

x	1	2	3	4	5	6
freq.ass. di x	20	20	20	20	20	20

(d) In base a quanto ottenuto in (c) si ha $(20/120)\cdot 100 = 0.1667 \cdot 100 = 16.67\%$ per ciacun $x \in S_X$, cioe'

x	1	2	3	4	5	6
freq.rel.% di x	16.67%	16.67%	16.67%	16.67%	16.67%	16.67%

Si noti che a causa dell'arrotondamento dei decimali la somma delle percentuali da' 100.02 anziche' 100.