LIUC, Corso di Statistica, AA 1015-16
Soluzioni Temi d'esame su Binomiale (I)
(materiale didattico redatto da prof. R. D'Angiò)

Esame 5 Giugno 2015

ESERCIZIO 2(4 punti)
Si estraggono a caso 3 palline, con reimmissione, da una scatola che contiene 5 palline rosse e 15 palline bianche.
a) Si calcoli la probabilità che il numero di palline *rosse* estratte sia minore di 2.
b) Si calcoli il numero atteso di palline *bianche* estratte.
c) Se ogni pallina *rossa* estratta fornisce un guadagno di 2 dollari, si calcoli la varianza del guadagno totale in dollari associato all'estrazione delle 3 palline.

(a)pallina rossa = successo (non rossa =bianca = insuccesso),
probabilità di un successo in una estrazione o prova =5/20 = 1/4 = p (dove 20 = 5 rosse + 15 non rosse)
X = numero palline rosse in 3 estrazioni = numero di successi in n =3 prove
X è Binomiale di parametri n = 3 e p = 1/4

$\boxed{\mathbf{P(X<2)}}$ **= P(<=1) = p(0)+p(1) =** $\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 2\left(\frac{3}{4}\right)^3 = 2\ 0{,}421875 = \boxed{0{,}84375}$

Si vedano i calcoli di p(0) e p(1) nella soluzione dell'Esercizio 1 nel file "Esercizi su Binomiale (I)" pubblicato nel nateriale didattico.

(b) pallina bianca = successo (non bianca = rossa = insuccesso),
probabilità di un successo in una estrazione o prova = 15/20 = 3/4 = p
Y = numero palline bianche in tre estrazioni = numero di successi in n =3 prove
Y è Binomiale di parametri n = 3 e p= 3/4
$\boxed{\mathbf{E(Y)}}$ **=**n p **=** 3 **(**3/4) = 9/4 = $\boxed{2{,}25}$

Per rispondere alla domanda (c) qui sotto, si veda il paragrafo 3 del capitolo 5 di Newbold sulla trasformazione lineare
(c)X= numero palline rosse (successi) in n =3 prove (vedi la domanda (a) sopra)

V(X) **=** n p (1-p) = 3 (1/4) (3/4) = $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ = 0,5625

G = 2X(G = guadagno totale**)**

$\boxed{\mathbf{V(G)}} = 2^2\ V(X) = 4\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4} = \boxed{2{,}25}$

Esame 8 Gennaio 2015

ESERCIZIO 2(3 punti)

La probabilità di trovare posto su un treno per pendolari è pari a 0.8. Si considera una settimana lavorativa (5 giorni), supponendo che il fatto di trovare o meno posto in un giorno non dipenda da ciò che accade nei restanti 4 giorni.

a) Si calcoli la probabilità che, nei 5 giorni, si trovi posto almeno 3 volte.

b) Si calcoli il valore atteso della variabile Y=5-2X, dove X è il numero di giorni, sui 5, in cui si trova posto.

Successo = "trovare posto sul treno in un giorno o prova",
probabilitàdi un successo in una prova = p = 0.8 = costante
Numero dei giorni o prove = n = 5
X = numero di successi in n =5 prove
X è Binomiale di parametri n = 5 e p = 0.8

(a)

$\boxed{P(X>=3)}$ = p(3)+p(4)+p(5) = 0,2048 + 0,4096 + 0,32768 = $\boxed{\mathbf{0,94208}}$

dove

p(3) = $\binom{5}{3}0.8^3 0.2^{5-3} = 10 \cdot 0.8^3 \cdot 0.2^2 = 0{,}2048 \left[C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10 \right]$

p(4) = $\binom{5}{4}0.8^4 0.2^{5-4} = 5 \cdot 0.8^4 \cdot 0.2 = 0{,}4096 \left[C_4^5 = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-1)!} = 5 \right]$

p(5) = $\binom{5}{5}0.8^5 0.2^{5-5} = 1 \cdot 0.8^5 \cdot 1 = 0{,}32768 \left[C_5^5 = \binom{5}{5} = \frac{5!}{5!(5-5)!} = 1 \right]$

Risposta alternativa:

$\boxed{P(X>=3)}$ = 1 − P(X<=2)= 1 − [p(0)+p(1)+p(2)] = 1 −**[**0,00032+0,0064+0,0512**]** = 1 −0,05792 = $\boxed{\mathbf{0,94208}}$

dove

p(0) = $\binom{5}{0}0.8^0 0.2^{5-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0.2^5 = 0{,}00032 \left[C_0^5 = \binom{5}{0} = \frac{5!}{0!(5-0)!} = 1 \right]$

p(1) = $\binom{5}{1}0.8^1 0.2^{5-1} = 5 \cdot 0.8 \cdot 0.2^4 = 0{,}0064 \left[C_1^5 = \binom{5}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = 5 \right]$

p(2) = $\binom{5}{2}0.8^2 0.2^{5-2} = 10 \cdot 0.8^2 \cdot 0.2^3 = 0{,}0512 \left[C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10 \right]$

(b)E(X) = n p = 5 x 0.8 = 4
Y=5−2X
$\boxed{E(Y)}$ = 5−2E(X)= 5−(2 x 4) = 5 −8 = $\boxed{\mathbf{-3}}$

Domanda aggiuntiva: si determini V(X) e V(Y):
$\boxed{V(X)}$ = n p (1-p) = 5 x 0.8 x 0.2 = $\boxed{0.8}$
$\boxed{V(Y)}$= 2^2 V(X) = 4 x 0.8 = $\boxed{3.2}$

Esame 4 Novembre 2014

ESERCIZIO 3(punti 3).In un supermercato, la probabilità che un generico cliente acquisti un determinato prodotto A è pari a 0.3. Si considerano 6 clienti.
a) Si calcoli la probabilità che nessuno dei 6 clienti acquisti il prodotto A.
b) Si calcoli la probabilità che almeno 3 dei 6 clienti acquistino il prodotto A.
c) Si determini il numero medio di clienti che acquistano il prodotto A, tra i 6 considerati.

a) p = 0,3, n = 6, numero dei clienti che acquistano Xe' Bi(0,3;6)

$$P(X=0)=p_X(0)=\binom{6}{0}0,3^0\cdot 0,7^{6-0}=0,7^6=0,11765$$

b) $P(X\geq 3)=1-P(X\leq 2)=1-\left(p_X(0)+p_X(1)+p_X(2)\right)=$

$$=1-\left(0,11765+p_X(1)+p_X(2)\right)=1-0,74431=0,25569$$

dove

$$P(X=1)=p_X(1)=\binom{6}{1}0,3^1\cdot 0,7^{6-1}=6\cdot 0,3\cdot 0,7^5=0,30253$$

$$P(X=2)=p_X(2)=\binom{6}{2}0,3^2\cdot 0,7^{6-2}=15\cdot 0,3^2\cdot 0,7^4=0,32414$$

c) $E(X)=np=6\cdot 0,3=1,8$