## Esame 26.02.15

[la domanda (c) del dell'esercizio qui sotto riguarda le combinazioni lineari che saranno trattate in una lezione successiva alla data di pubblicazione di questo file]. Le "domande aggiuntive" non sono presenti nel testo originale dell'esame.

**ESERCIZIO 2**(6 punti). Siano X e Y variabili aleatorie con distribuzione congiunta riportata nella tabella che segue:

| X \ Y | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0.36 | 0 |
| 1 | 0.44 | 0.04 |
| 2 | 0 | 0.16 |

Domanda aggiuntiva 1. In base alla tabella di cui sopra si specifichi la funzione di probabilita' congiunta delle variabili X e Y. **Soluzione**:

$$p_{XY}(x,y)=\begin{cases}0.36, & (x,y)=(0,0)\\ 0.44, & (x,y)=(1,0)\\ 0.04, & (x,y)=(1,1)\\ 0.16, & (x,y)=(2,1)\\ 0, & altrove\end{cases}$$

**a)** (2 punti) Si determinino le distribuzioni marginali di X e di Y. **Soluzione:**

$$p_X(x)=\begin{cases}0.36, & x=0\\ 0.48, & x=1\\ 0.16, & x=2\\ 0, & altrove\end{cases}\quad,\quad p_Y(y)=\begin{cases}0.8, & x=0\\ 0.2, & x=1\\ 0, & altrove\end{cases}$$

Domanda aggiuntiva 2. Si dica quale variabile, o distribuzione, notevole e' la Y. **Soluzione:** per la marginale Y si ha che e' la variabile o distribuzione notevole $Y \sim Be(0.2)$.

**b)** (2 punti) Si calcoli la covarianza di X e Y. **Soluzione**: per le singole variabili X e Y si ha:

$Y \sim Be(0.2)$ si ha: $\mu_Y = 0.2,\ \sigma_Y^2 = 0.2 \cdot 0.8 = 0.16$

$X$ si ha: $\mu_X = 1\cdot 0.48 + 2\cdot 0.16 = 0.80,\ \sigma_X^2 = 1^2 \cdot 0.48 + 2^2 \cdot 0.16 - 0.80^2 = 0.48$

Inoltre dalla funzione di probabilita' congiunta $p_{XY}(x,y)$ determinata sopra (o dalla tabella) si ottiene

$$E(XY)=\sum_{(x,y)} xy\,p_{XY}(x,y) = 1\cdot 1\cdot 0.04 + 2\cdot 1\cdot 0.16 = 0.04+0.32 = 0.36$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.36-0.2\cdot 0.8=0.20$$

Domanda aggiuntiva 3. Si determini il coefficiente di correlazione lineare di X e Y esplicitando il significato del valore ottenuto. **Soluzione**:

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\sigma_X^2}\sqrt{\sigma_Y^2}}=\frac{0.20}{\sqrt{0.48}\sqrt{0.16}}=\frac{0.20}{0.69\cdot 0.4}=\frac{0.20}{0.276}=0.72$$

Il valore ottenuto del coefficiente di correlazione lineare indica che vi e' un grado abbastanza elevato di associazione lineare diretta (o positiva) fra le due variabili X e Y. (l'associazione e' diretta, o positiva, perche' il coefficiente e' positivo, ed e' abbastanza elevata perche' il valore massimo del coefficiente e' 1).

**c)** (2 punti) Si calcolino il valore atteso, la varianza e (domanda aggiuntiva) la deviazione standard (o scarto quadratico medio) di T=1+X-2Y. **Soluzione:** Per le proprieta' delle combinazioni lineari si ha

$$E(T)=1+E(X)-2E(Y)=1+0.8-2\cdot 0.2=1.4$$

$$V(T) = V(X) + (-2)^2 V(Y) + 2\cdot 1\cdot(-2)\ Cov(X,Y) = 0.48 + 4\cdot 0.16 - 4\cdot 0.20 = 0.32$$
$$\sqrt{V(T)} = \sqrt{0.32} = 0.57$$

**Esame 08.01.15**

[la domanda (c) del dell'esercizio qui sotto riguarda le combinazioni lineari che saranno trattate in una lezione successiva alla data di pubblicazione di questo file]. Le "domande aggiuntive" non sono presenti nel testo originale dell'esame.

**ESERCIZIO 2**(5 punti)

Sia X una variabile aleatoria con distribuzione bernoulliana di parametro 0.3 e Y una variabile aleatoria con distribuzione binomiale di parametri 2 e 0.5; siano inoltre X e Y indipendenti.

a) Si scriva (esplicitamente o attraverso la tabella a doppia entrata) la funzione di probabilità congiunta di X e Y.

b) Si determini il coefficiente di correlazione lineare di (X,Y).

c) Si calcoli lo scarto quadratico medio (o deviazione standard) di T=3-2X+Y.

**a)** Le variabili $X \sim Be(0.3)$ e $Y \sim Bi(2;0.5)$ sono stocasticamente indipendenti. Le probabilita' dei valori $y \in S_Y = \{0,1,2\}$ di $Y \sim Bi(2;0.5)$ sono:

$$p_Y(0) = \binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{2-0} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}25 \left[C_0^2 = \binom{2}{0} = \frac{2!}{0!(2-0)!} = 1\right]$$

$$p_Y(1) = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \left[C_1^2 = \binom{2}{1} = \frac{2!}{1!(2-1)!} = 2\right]$$

$$p_Y(2) = \binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}25 \left[C_2^2 = \binom{2}{2} = \frac{2!}{2!(2-2)!} = 1\right]$$

Le probabilita' congiunte $p_{XY}(x,y) = p_X(x)\, p_Y(y)$ si trovano nelle celle della tabella a doppia entrata qui sotto in cui sono riportate anche le marginali $X \sim Be(0.3)$ e $Y \sim Bi(2;0.5)$

| X\Y | 0 | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,7x0,25 | 0,7x0,5 | 0,7x0,25 | 0,70 |
| 1 | 0,3x0,25 | 0,3x0,5 | 0,3x0,25 | 0,30 |
| | 0,25 | 0,50 | 0,25 | 1,00 |

| X\Y | 0 | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,175 | 0,350 | 0,175 | 0,700 |
| 1 | 0,075 | 0,150 | 0,075 | 0,300 |
| | 0,250 | 0,500 | 0,250 | 1,000 |

In conclusione, la funzione di probabilita' congiunta richiesta e'

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0.175, & (x,y) = (0,0),(0,2) \\ 0.075, & (x,y) = (1,0),(1,2) \\ 0.350, & (x,y) = (0,1) \\ 0.150, & (x,y) = (1,1) \\ 0, & altrove \end{cases}$$

**b)** Poiche' le due variabili aleatorie sono stocasticamente indipendenti la loro covarianza ed il loro coefficiente di correlazione lineare devono risultare pari a zero. Cio' risulta dai seguenti calcoli. Per le singole variabili X e Y si ha:

$$X \sim Be(0.3): \mu_X = 0.3,\ \sigma_X^2 = 0.3 \cdot 0.7 = 0.21$$

$$Y \sim Bi(2;0.5): \mu_Y = 2 \cdot 0.5 = 1,\ \sigma_Y^2 = 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.5$$

Inoltre dalla funzione di probabilita' congiunta $p_{XY}(x,y)$ si ottiene

$$E(XY) = \sum_{(x,y)} xy\,p_{XY}(x,y) = 1 \cdot 2 \cdot 0.075 + 1 \cdot 1 \cdot 0.15 = 0.15 + 0.15 = 0.30$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.30 - 0.3 \cdot 1 = 0$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\sigma_X^2}\sqrt{\sigma_Y^2}} = \frac{0}{\sqrt{0.21}\sqrt{0.5}} = 0$$

**c)** Per le proprieta' delle combinazioni lineari si ha

$$E(T) = 3 - 2E(X) + E(Y) = 3 - 2 \cdot 0.3 + 1 = 3.4$$

$$V(T) = (-2)^2 V(X) + V(Y) + 2 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot Cov(X,Y) = 4 \cdot 0.21 + 0.5 = 1.34$$

$$\sqrt{V(T)} = \sqrt{1.34} = 1.158$$

**Esame 29.01.15**

[la domanda (b) del dell'esercizio qui sotto riguarda le combinazioni lineari che saranno trattate in una lezione successiva alla data di pubblicazione di questo file]. Le "domande aggiuntive" non sono presenti nel testo originale dell'esame.

**ESERCIZIO 3**(4 punti)

Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con distribuzione binomiale di parametri 2 e 0.4.

a) Si scriva (esplicitamente o attraverso la tabella a doppia entrata) la funzione di probabilità congiunta di X e Y.

b) Si determini la funzione di probabilità della variabile aleatoria T=X+Y.

Domanda aggiuntiva 1. Si mostri che per T=X+Y di cui sopra si ha $T \sim Bi(4;2/5)$.

Domanda aggiuntiva 2. Si determini valore atteso, varianza, e deviazione standard (o scarto quadratico medio) di T=X+Y.

c) Si calcoli P(X<Y).

**a)** le variabili $X \sim Bi(2;0.4)$ e $Y \sim Bi(2;0.4)$ (dove $0.4 = 2/5$) sono stocasticamente indipendenti. Le probabilita' dei valori $y \in S_Y = \{0,1,2\}$ (che sono le stesse per i valori $x \in S_X = \{0,1,2\}$) sono:

$$p_Y(0) = \binom{2}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^{2-0} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} = 0{,}36 \left[C_0^2 = \binom{2}{0} = \frac{2!}{0!(2-0)!} = 1\right]$$

$$p_Y(1) = \binom{2}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^{2-1} = 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25} = 0{,}48 \left[C_1^2 = \binom{2}{1} = \frac{2!}{1!(2-1)!} = 2\right]$$

$$p_Y(2) = \binom{2}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^{2-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} = 0{,}16 \left[C_2^2 = \binom{2}{2} = \frac{2!}{2!(2-2)!} = 1\right]$$

Le probabilita' congiunte $p_{XY}(x,y) = p_X(x)\,p_Y(y)$ si trovano nelle celle della tabella a doppia entrata qui sotto in cui sono riportate anche le marginali $X \sim Bi(2;0.4)$ e $Y \sim Bi(2;0.4)$

| X\Y | 0 | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,36x0,36 | 0,36x0,48 | 0,36x0,16 | 0,36 |
| 1 | 0,48x0,36 | 0,48x0,48 | 0,48x0,16 | 0,48 |
| 2 | 0,16x0,36 | 0,16x0,48 | 0,16x0,16 | 0,16 |
| | 0,36 | 0,48 | 0,16 | 1 |

Tale tabella con gli opportuni calcoli da' la tabella qui sotto

| X\Y | 0 | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,1296 | 0,1728 | 0,0576 | 0,36 |
| 1 | 0,1728 | 0,2304 | 0,0768 | 0,48 |
| 2 | 0,0576 | 0,0768 | 0,0256 | 0,16 |
| | 0,36 | 0,48 | 0,16 | 1 |

In conclusione, la funzione di probabilita' congiunta richiesta e'

$$p_{XY}(x,y)=\begin{cases}0{,}1296 & (x,y)=(0,0)\\ 0{,}1728 & (x,y)=(0,1),(1,0)\\ 0{,}0576, & (x,y)=(0,2),(2,0)\\ 0{,}2304 & (x,y)=(1,1)\\ 0{,}0768 & (x,y)=(1,2),(2,1)\\ 0{,}0256 & (x,y)=(2,2)\\ 0 & altrove\end{cases}$$

**b)** La variabile $T=X+Y$ ha valori possibili $t=x+y\in S_T=\{0,1,2,3,4\}$ che si ottengono sommando i valori $x$ e $y$ di tutte le coppie $(x,y)$ che compaiono nella funzione di probabilita' $p_{XY}(x,y)$ determinata in a). Le probabilita' dei valori $t\in S_T=\{0,1,2,3,4\}$ cosi' ottenuti sono calcolate qui sotto sommando le probabilita' di tutte le coppie $(x,y)$ che danno lo stesso $t=x+y$.

$p_T(0)=p_{XY}(0,0)=0{,}1296$

$p_T(1)=p_{XY}(0,1)+p_{XY}(1,0)=2\cdot 0{,}1728=0{,}3456$

$p_T(2)=p_{XY}(0,2)+p_{XY}(1,1)+p_{XY}(2,0)=0{,}2304+2\cdot 0{,}0576=0{,}3456$

$p_T(3)=p_{XY}(1,2)+p_{XY}(2,1)=2\cdot 0{,}0768=0{,}1536$

$p_T(4)=p_{XY}(2,2)=0{,}0256$

In conclusione, la funzione di probabilita' di $T=X+Y$ richiesta e'

$$p_T(t)=\begin{cases}0{,}1296 & t=0\\ 0{,}3456 & t=1,2\\ 0{,}1536 & t=3\\ 0{,}0256 & t=4\\ 0 & altrove\end{cases}$$

Domanda aggiuntiva 1. **Soluzione**: si deve verificare che le probabilita' $p_T(t)$ determinate sopra sono le medesime che si hanno per i valori $t\in S_T=\{0,1,2,3,4\}$ della variabile $T\sim Bi(4;2/5)$. I seguenti calcoli danno esattamente le stesse probabilita' $p_T(t)$ gia' ottenute sopra.

$$p_T(0) = \binom{4}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^{4-0} = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = 0{,}1296$$

$$p_T(1) = \binom{4}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^{4-1} = 4\cdot\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{6^3}{5^4} = 0{,}3456$$

$$p_T(2) = \binom{4}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^{4-2} = 6\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{6^3}{5^4} = 0{,}3456$$

$$p_T(3) = \binom{4}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^{4-3} = 4\left(\frac{2}{5}\right)^3\frac{3}{5} = 6\frac{2^4}{5^4} = 0{,}1536$$

$$p_T(4) = \binom{4}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^{4-4} = \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 0{,}0256$$

In conclusione, rispondendo a questa domanda aggiuntiva si e' verificato il seguente risultato che si dimostra valere in generale:

**la somma $T = X + Y$ di due variabili binomiali indipendenti**
**$X \sim Bi(n_X; p)$ e $Y \sim Bi(n_Y; p)$ con lo stesso parametro $p$**
**e' la variabile binomiale $T \sim Bi(n_X + n_Y; p)$**

dove nel caso particolare della domanda aggiuntiva abbiamo: $n_X = 2, n_Y = 2, n_X + n_Y = 4$ e $p = 0.4 = 2/5$.

Domanda aggiuntiva 2. **Soluzione.** Poiche' e' $T \sim Bi(4; 2/5)$ si ha

$$E(T) = 4\frac{2}{5} = \frac{8}{25} = 1.6, V(T) = 4\frac{2}{5}\frac{3}{5} = \frac{24}{25} = 0.96, \sqrt{V(T)} = \sqrt{0.96} = 0.98$$

Alternativamente, per le proprieta' delle combinazioni lineari, si ha lo stesso risultato

$$E(T) = E(X) + E(Y) = 2\frac{2}{5} + 2\frac{2}{5} = 4\frac{2}{5} = \frac{8}{5} = 1.6$$

$$V(T) = V(X) + V(Y) = 2\frac{2}{5}\frac{3}{5} + 2\frac{2}{5}\frac{3}{5} = 4\frac{2}{5}\frac{3}{5} = \frac{24}{25} = 0.96$$

$$\sqrt{V(T)} = \sqrt{0.96} = 0.98$$

**c)** Le coppie $(x, y)$ che verificano la condizione $X < Y$ sono $(0,1), (0,2)$ e $(1,2)$ (si veda la funzione di probabilita' congiunta o la tabella a doppia entrata). Dunque dalla funzione di probabilita' congiunta $p_{XY}(x, y)$ ottenuta in a), o dalla tabella, si ottiene:

$$P(X < Y) = p_{XY}(0,1) + p_{XY}(0,2) + p_{XY}(1,2) =$$
$$= 0{,}1728 + 0{,}0576 + 0{,}0768 = 0{,}3072$$