1

Università C. Cattaneo, Corso di Laurea in Economia Aziendale, A.A. 2015-2016
STATISTICA — 16.02.2016 - PROVA GENERALE STANDARD
Modalità B

(A) ai fini della valutazione verranno considerate **solo** le risposte riportate dallo studente **negli appositi riquadri** bianchi: in caso di necessità **si può anche andare fuori dai margini che delimitano i riquadri**.
(B) nello svolgimento del compito si utilizzino almeno tre cifre decimali.

COGNOME.............................NOME...........................MATR...................

ESERCIZIO 1 (4 punti)
Per un errore di produzione accade che alcune confezioni di un prodotto risultino parzialmente vuote. Si valuta che il 9% del totale delle confezioni poste in commercio siano parzialmente vuote.
a) Si determini la probabilità che, su un lotto di 14 confezioni, ve ne sia al più una parzialmente vuota.
b) Si determini la probabilità che, su un lotto di 600 confezioni, ve ne siano almeno 50 parzialmente vuote

a) X = numero confez. parzialm. vuote sulle 14; $X \sim Bin(14, 0.09)$

$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{14!}{0!\,14!}(0.09)^0(0.91)^{14} + \frac{14!}{1!\,13!}(0.09)^1(0.91)^{13} =$
$= 0.637$

b) Y = numero confez. parz. vuote sulle 600; $Y \approx N(600 \cdot 0.09, 600 \cdot 0.09 \cdot 0.91)$
$\approx N(54, 49.14)$

$P(Y \geq 50) = P\left(Z \geq \frac{50-54}{\sqrt{49.14}}\right) = P(Z \geq -0.57) =$
$= P(Z \leq 0.57) = 0.716$

ESERCIZIO 2 (4 punti)
Una variabile aleatoria X ha distribuzione normale di media -1 e varianza 9.
a) Si calcoli la probabilità che X sia positiva.
b) Si determini il quantile di ordine 0.8 di X.

$X \sim N(-1, 9)$

a) $P(X > 0) = P\left(Z > \frac{0+1}{3}\right) = P(Z > 0.33) = 1 - 0.629 = 0.371$

b) $P(X \leq q_{0.8}) = 0.8$
$P\left(Z \leq \frac{q_{0.8}+1}{3}\right) = 0.8 \Rightarrow \frac{q_{0.8}+1}{3} = 0.842 \Rightarrow q_{0.8} = 1.526$

Università C. Cattaneo, Corso di Laurea in Economia Aziendale, A.A. 2015-2016

ESERCIZIO 3 (punti 5) Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti; X ha distribuzione binomiale di parametri 2 e 0.4, Y ha funzione di probabilità

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0.3 & y = -2, y = 2 \\ 0.4 & y = 1 \\ 0 & altrove \end{cases}.$$

a) Si determini la funzione di probabilità congiunta di X e Y (attraverso la tabella a doppia entrata o in forma esplicita).
b) Si determinino il valore atteso e lo scarto quadratico medio della variabile aleatoria T=2X-3Y-1.
c) Si calcoli la covarianza di X e Y.

$X \sim Bin(2, 0.4)$; $Y \sim p_Y(y) = \begin{cases} 0.3 & y = \pm 2 \\ 0.4 & y = 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$; X, Y indip.

a)

X \ Y	-2	1	2	
0	0.108	0.144	0.108	0.36
1	0.144	0.192	0.144	0.48
2	0.048	0.064	0.048	0.16
	0.3	0.4	0.3	

b) $E(X) = 0.48 + 0.32 = 0.8$

$E(Y) = -0.6 + 0.4 + 0.6 = 0.4$

$Var(X) = (0.48 + 0.64) - 0.8^2 = 0.48$

$Var(Y) = (1.2 + 0.4 + 1.2) - 0.4^2 = 2.64$

$E(T) = 2 \cdot (0.8) - 3 \cdot (0.4) - 1 = -0.6$

$Var(T) = 4 \cdot (0.48) + 9 \cdot (2.64) = 25.68$

$\sigma(T) = \sqrt{25.68} = 5.068$

c) $cov(X, Y) = 0$ in quanto X e Y indipendenti

ESERCIZIO 4 (punti 3). Una società di spedizioni effettua un'indagine campionaria per valutare il rispetto dei tempi di consegna. Si analizza quindi un campione di 350 pacchi rilevando che, di questi, 72 sono arrivati a destinazione in ritardo rispetto al giorno stabilito di consegna.

a) Si determini un intervallo di confidenza al 99% per la proporzione di pacchi gestiti dalla società che giungono in ritardo al destinatario.

b) Si stabilisca, a livello 0.01, se la proporzione di pacchi gestiti dalla società che giungono in ritardo al destinatario è inferiore a 0.25.

$\bar{x} = \hat{p} = 72/350 = 0.206$ $\quad X = \begin{cases} 1 & \text{pacco in ritardo} \\ 0 & \text{pacco non in ritardo} \end{cases}$ $\quad X \sim Bern(p)$

a) $\left(\bar{x} - 2.576 \cdot \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + 2.576 \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}\right) = (0.150, 0.262)$

b) $\begin{cases} H_0: p = 0.25 \\ H_1: p < 0.25 \end{cases}$

SI RIFIUTA (A LIVELLO 0.01) SE

$z = \dfrac{\bar{x} - 0.25}{\sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{350}}} < -2.327$

Poiché $z_{oss} = \dfrac{0.206 - 0.25}{\sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{350}}} = -1.901 \not< -2.327$, NON SI RIFIUTA (NON C'È EVIDENZA CHE $p < 0.25$)

ESERCIZIO 5 (punti 4). Si effettua un test bilaterale di livello 0.05 sulla media di una popolazione e, in base ai dati osservati nel campione, si rifiuta l'ipotesi nulla.

a) Si dica se, sulla base degli stessi dati campionari, a livello 0.1 si rifiuta o meno l'ipotesi nulla. Si giustifichi la risposta.

b) Si dica se il p-value del test, basato sugli stessi dati campionari, è maggiore o minore di 0.05. Si giustifichi la risposta.

a) Poichè si rifiuta a livello 0.05, si rifiuta certamente ad un livello superiore, ad esempio 0.1.

Infatti, se si rifiuta a livello 0.05, il p-value è minore di 0.05, quindi minore di 0.1, per cui si rifiuta a livello 0.1.

b) Come detto sopra, dal momento che si rifiuta a livello 0.05, il p-value è < 0.05.

ESERCIZIO 5 (punti 6) Un istituto bancario effettua un'indagine campionaria relativa alla giacenza media dei conti correnti dei clienti. Viene analizzato un campione di 140 conti correnti, sui quali si rileva la l'ammontare del deposito al 31 dicembre di un anno. I dati campionari ottenuti forniscono un valore medio pari a 1260 euro ed una varianza pari a 38560 euro^2.

a) Si determini un intervallo di confidenza al 95% per l'ammontare medio dei conti correnti presso l'istituto bancario, al 31 dicembre dell'anno considerato.

b) Usando il criterio del p-value, si verifichi a livello 0.05 se l'ammontare medio di cui sopra è diverso da 1300 euro.

c) Si stabilisca, a livello 0.1, se l'ammontare medio di cui al punto a) è maggiore di 1220 euro.

X = giacenza conto corrente

$n=140 \quad \bar{X}=1260 \quad S^2=38560$

a) $\left(\bar{x}-1.96\cdot\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+1.96\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=\left(1260-1.96\frac{\sqrt{38560}}{\sqrt{140}},\ 1260+1.96\frac{\sqrt{38560}}{\sqrt{140}}\right)$

$=(1260-32.528,\ 1260+32.528)=(1227.472,\ 1292.528)$

b) $\begin{cases} H_0: \mu=1300 \\ H_1: \mu\neq 1300 \end{cases}$ p-value $=2P(Z\geq|z_{oss}|)$

$z_{oss}=\frac{\bar{X}-1300}{S/\sqrt{140}}=\frac{1260-1300}{\sqrt{38560}/\sqrt{140}}=-2.41$

p-value $=2P(Z\geq 2.41)=0.0164<0.05$ SI RIFIUTA H_0

(VI È EVIDENZA CHE $\mu\neq 1300$)

c) $\begin{cases} H_0: \mu=1220 \\ H_1: \mu>1220 \end{cases}$

Si rifiuta (a livello 0.1) se $Z=\frac{\bar{X}-1220}{S/\sqrt{n}}\geq 1.28$

$z_{oss}=\frac{1260-1220}{\sqrt{38560}/\sqrt{140}}=2.41\geq 1.28$; SI RIFIUTA H_0

(C'È EVIDENZA CHE $\mu>1220$)