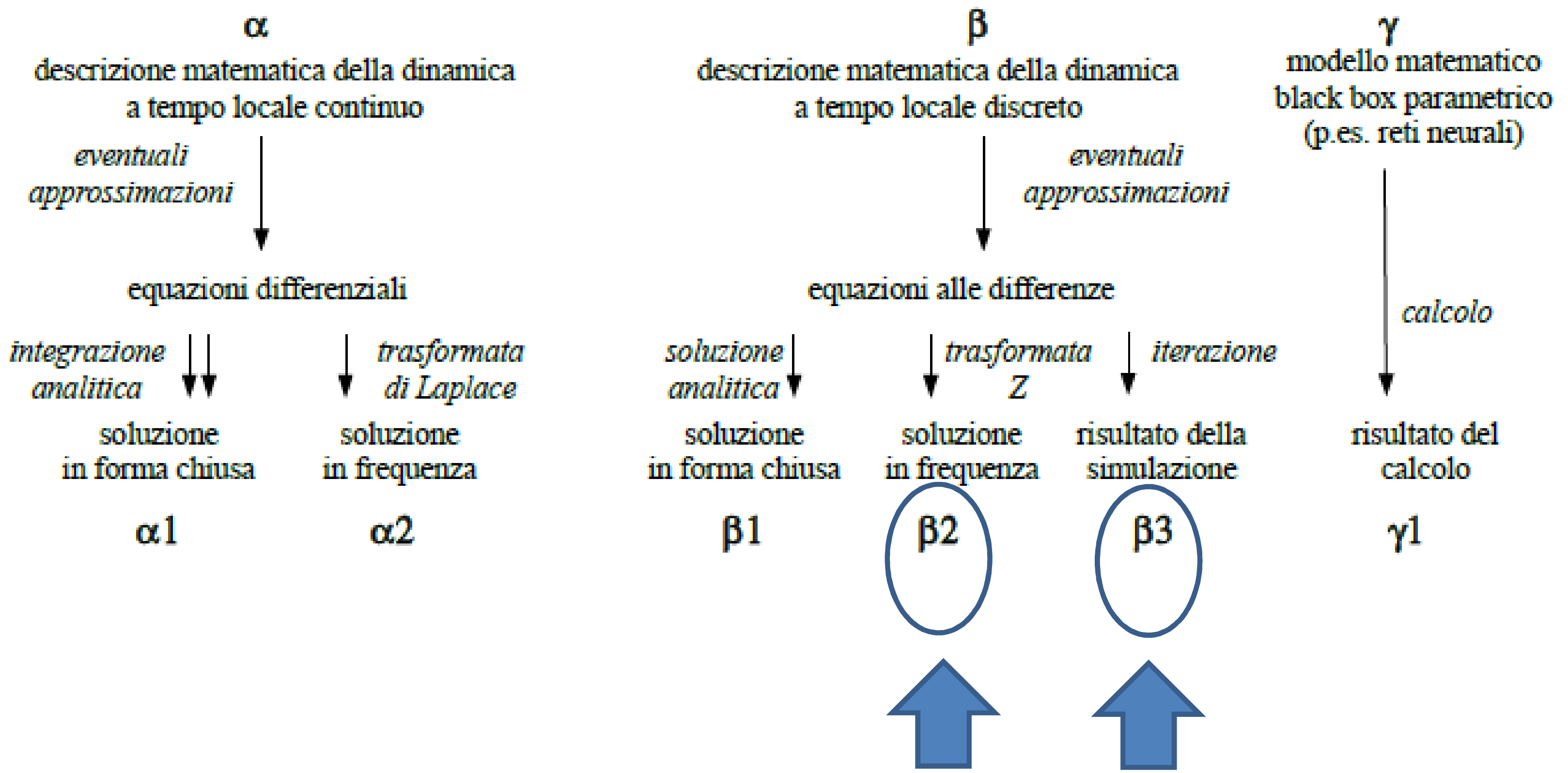
Trasformata Z, linearizzazione

- La soluzione della dinamica mediante trasformate
- Linearizzazioni
- Cenni sulla trasformata Z
- Esempio: problema 1
- Esempio: problema 2:
- Esempio: problema 3:
- Controllo come problema di dinamica inversa
- Modelli black box di controllori

In sintesi:



Si vedrà più avanti $\alpha 2$ ora si accennerà alla tecnica $\beta 2$ ovvero basata sulla trasformata Z cioè il corrispondente discreto della trasformata di Laplace.

Soluzione della dinamica mediante trasformate

Consideriamo una singola variabile di stato e tralasciamo il riferimento alla funzione di comportamento (y(t)=x(t)). Il sistema a tempo continuo è:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(u(t), x(t)) \qquad [1]$$

Mentre a tempo discreto diventa:

$$x(t+\Delta t) = f(u(t), x(t)) \qquad [2]$$

Vogliamo risolvere queste equazioni e trovare una soluzione x(t)=… in forma analitica ed in particolare determinarne la stabilità.
Si può risolvendo in modo numerico calcolando tutti i valori uno dopo l’altro:
$x(t_0)$, $x(t_0+\Delta t)$, $x(t_0+2\Delta t)$, ... ma non è una soluzione analitica.
Qualche volta, per risolvere le [1] e [2] è possibile usare tecniche alternative a quelle dell’analisi matematica: si deve però introdurre il *concetto di trasformata*

Trasformata

Una *trasformata* è una funzione di funzione: $\Phi(f(t))=F(z)$ definita su un nuovo dominio.

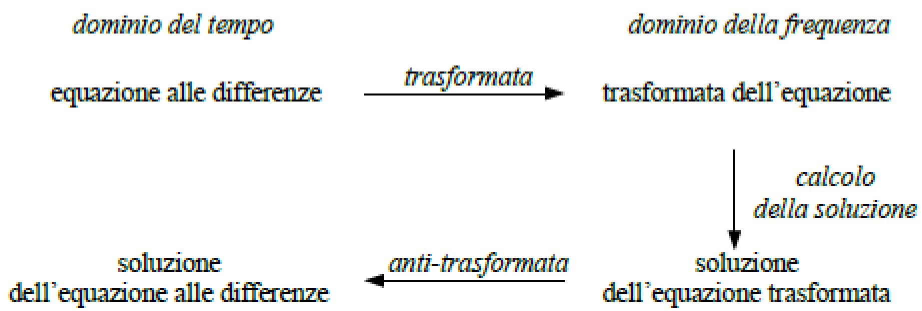
$$f(t)\xrightarrow{\Phi}F(z)$$

Se la funzione di partenza è definita nel dominio del tempo: *f=f(t)*, la nuova funzione: *F=F(z)* è definita in quello delle frequenze.

Quando si applica la funzione trasformata?

- Quando l'equazione trasformata è più semplice da risolvere di quella di partenza
- Φ è invertibile, e quindi una volta trovata la soluzione nel dominio delle frequenze è possibile ottenere la soluzione cercata, nel dominio del tempo, applicando la trasformata inversa (anti-trasformata)

$$x(t)=\Phi^{-1}(X(z))$$



Analogia: In assenza di calcolatori in passato l'uso dei logaritmi ha permesso di moltiplicare numeri grandi attraverso la somma di numeri più piccoli

Esempio logaritmo

$$
\begin{tikzcd}
a \times b \arrow[r, "\textit{logarimo}", "\text{(“trasformata”)}"'] & \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) = \alpha + \beta \arrow[d, "\begin{array}{c}\textit{calcolo}\\ \textit{della soluzione}\end{array}"] \\
\exp(\gamma) = a \times b & \alpha + \beta = \gamma \arrow[l, "\textit{esponenziale}"', "\text{(“anti-trasformata”)}"]
\end{tikzcd}
$$

$$a = 198; b = 1231; a * b = 243738$$

$$\ln(a * b) = \ln(a) + \ln(b) = 5.2883 + 7.1156 = 12.4039;$$

$$\exp(12.4039) = 243738$$

Note

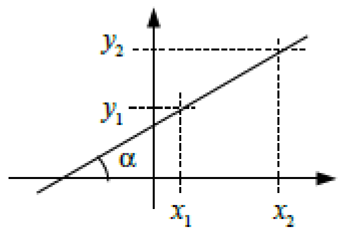
- La trasformata di Laplace per le equazioni differenziali e la trasformata Z per quelle alle differenze trasformano i problemi differenziali in problemi algebrici cosa che rende le equazioni più facilmente risolvibili.

- Tuttavia queste trasformate per essere applicate richiedono che i problemi siano lineari. Nel caso in cui ciò non sia, per applicare questa tecnica si deve prima linearizzare le equazioni

Linearizzazione

Pendenza di una retta passante per due punti

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg(\alpha)$$



La funzione *f(x)* può essere approssimata nell'intorno di un punto $\bar{x}$ mediante una funzione *g(x)* passante per $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ e di pendenza $tg(\alpha) = f'(x)\big|_{x=\bar{x}}$

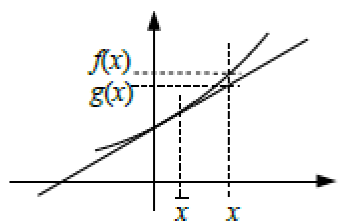
$$g(x) = g(\bar{x}) + tg(\alpha)(x - \bar{x})$$

e poichè $g(\bar{x}) = f(\bar{x})$

$$f(x) \approx g(x) = f(\bar{x}) + tg(\alpha)(x - \bar{x})$$

e dunque

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x}) \qquad [7]$$



che è la serie di Taylor troncata al primo ordine

L’equazione [7] è generalizzabile al caso n-dimensionale

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(u(t), x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

Una funzione f di n argomenti, $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, si linearizza intorno al suo argomento $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ mediante:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \approx f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) + \left.\frac{\partial f(t)}{\partial x_1}\right|_{x=\bar{x}} (x_1 - \bar{x}_1) + \ldots + \left.\frac{\partial f(t)}{\partial x_n}\right|_{x=\bar{x}} (x_n - \bar{x}_n) \qquad [8]$$

Esempio:

$$\begin{cases}\dot{x} = -5\sqrt{x} + u \\ y = x\end{cases}$$

punto di equilibrio $\dot{x} = 0$

se $\bar{u} = 5$ allora $\bar{x} = 1$

$$\begin{cases}\dot{x} \cong -\left.\dfrac{5}{2\sqrt{x}}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}}(x-\bar{x}) + 1\big|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}}(u-\bar{u}) \\ y = x\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x} = -\dfrac{5}{2}(x-1) + u - 5 \\ y = x\end{cases}$$

Oppure discretizzando..

$$\begin{cases}x(n) = x(n-1) - 5/2(x(n-1)-1) + u(n-1) \\ y(n) = x(n)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x(n) = -3/2 * x(n-1) + u(n-1) - 5/2 \\ y(n) = x(n)\end{cases}$$

$$y(0), y(1), y(2), \ldots. y(n), \ldots$$

Cenni sulla trasformata Z

Sia data la successione: $y[n]$, per $n=0,1,\ldots$ la trasformata Z di y[n] è:

$$Y(z)=\zeta(y[n])=\sum_{n=0}^{\infty} y[n]z^{-n} \qquad [9]$$

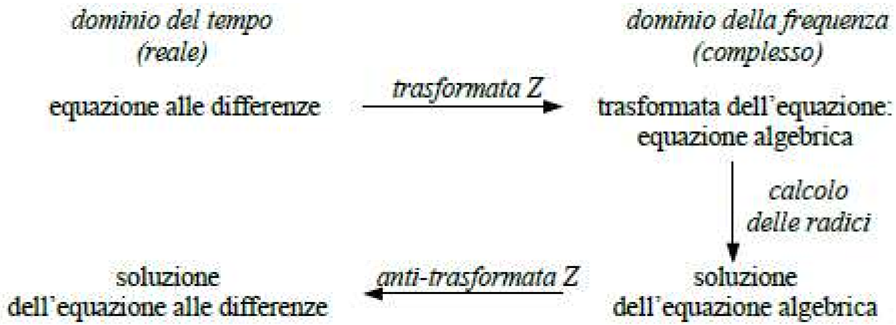
È una serie di potenze, come ad esempio la serie di Taylor tale che il suo argomento z è un numero complesso (ciò avviene anche per le trasformate di Laplace e di Fourier)

Vediamo cosa succede se la funzione da trasformare è una costante: $y[n]=k$

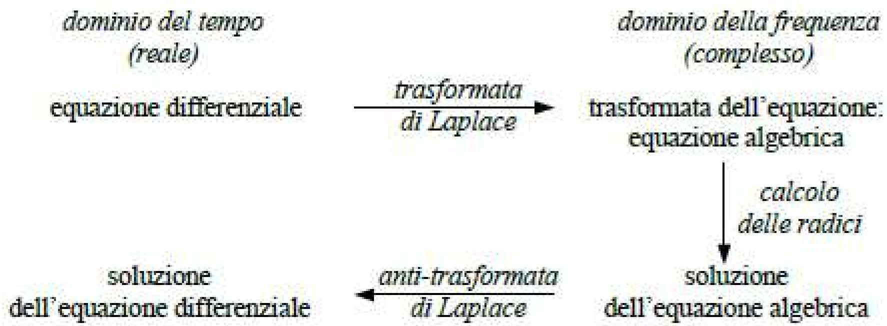
$$\zeta(k)=Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty} y[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} k\,z^{-n}=k\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \qquad \zeta(0)=0\,.$$

Attraverso *Y(z)* è possibile studiare y[n] nel piano complesso

Attraverso la trasformata Z, $\zeta(y[n])$, e la sua inversa, l'anti-trasformata Z, $\zeta^{-1}(Y(z))$, e grazie al fatto che $\zeta(y[n])$ è una funzione algebrica anche quando $y[n]$ è differenziale, si possono perciò trovare soluzioni a tempo discreto secondo la logica:



Lo stesso avverrà per la trasformata di Laplace e la sua inversa, l'anti-trasformata di Laplace.



Regione di convergenza

Non è garantito che la serie dell'equazione [9] converga, si deve calcolare la Regione di Convergenza (*Region Of Convergence*, ROC) cioè l'insieme dei punti z tali che:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} y[n] z^{-n}\right| < \infty$$

Note sui numeri complessi

Ogni numero complesso $z = x + jy$ può essere espresso usando la *formula di Eulero*:

$$z = |z| e^{j\omega} = |z| (\cos(\omega) + j \sin(\omega))$$

Dove $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ è il modulo e $\omega = \mathrm{tg}^{-1}(y/x)$ è l'argomento o fase
La relazione tra <x,y> e<|z|,ω> si può interpretare come una trasformazione di coordinate cartesiane in coordinate polari

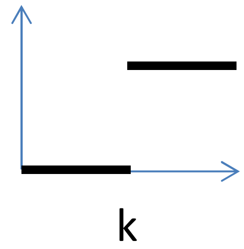
E' inoltre utile ricordare che:

$$z^n = |z|^n (\cos(n\omega) + j \sin(n\omega)) \quad \text{(“formula di De Moivre”)}$$

La ROC di una trasformata Z è dunque stabilita in riferimento al modulo del numero complesso z considerato

esempio

$\zeta(sca[n-k])$, per un certo $k>0$ La trasformata diventa: $Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty} y[n] z^{-n}=\sum_{n=k}^{\infty} z^{-n}$



Condizione necessaria per la convergenza è quindi |z|>1

esempio

Se *y[n]* ha solo un numero finito di valori non nulli ed è limitata ovviamente la sommatoria Y(z) è convergente

Si ricordi che: una serie geometrica è convergente quando |x|<1 e vale che

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Proprietà della trasformata Z

La trasformata ha due proprietà fondamentali:

1. Date due successioni x[n] e y[n] con trasformate X(z) e Y(z) e due costanti k_1 e k_2 vale la condizione di linearità

$$\zeta(k_1 x[n] + k_2 y[n]) = k_1 \zeta(x[n]) + k_2 \zeta(y[n]) \qquad [10]$$

2. Trasforma un termine differenziale in uno algebrico

$$\zeta(x[n-k]) = z^{-k} \zeta(x[n]) \qquad [11]$$

Cioè trasforma *x[n-k]* in $z^{-k} X(z)$

Esempio di funzione trasformate

Per alcuni tipi comuni di funzioni si possono trovare già calcolate le funzioni di trasformata e anti-trasformata:

$$\zeta(imp[n])=1 \qquad [12]$$

$$\zeta(imp[n-k])=z^{-k} \qquad [13]$$

$$\zeta(sca[n])=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1} \qquad [14]$$

$$\zeta(k^{n}sca[n])=\frac{1}{1-kz^{-1}}=\frac{z}{z-k} \qquad [15]$$

Le suddette uguaglianze valgono anche nella forma inversa $\zeta^{-1}(1)=imp[n]$

Esempio: trasformata di una costante: *y[n]=k*

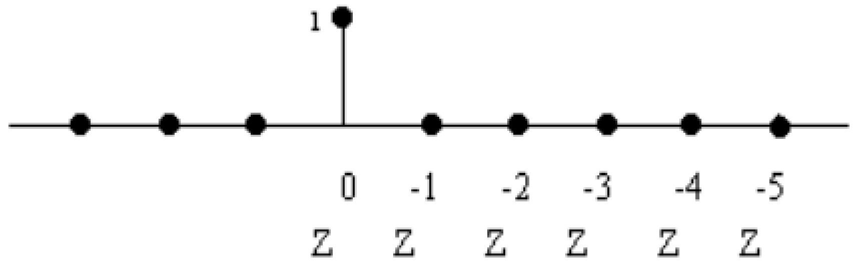
$$\zeta(k)=Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty} y[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} k\,z^{-n}:$$

ma poiché *k= ksca[n] se n>=0* allora per la (14)

$$\xi(k)=\xi(k\cdot sca(n))=\sum_{n=0}^{\infty} k\cdot sca(n)\cdot z^{-n}=k\sum_{n=0}^{\infty} sca(n)\cdot z^{-n}=\frac{k}{1-z^{-1}}$$

Verifica delle [12][13] e [14]

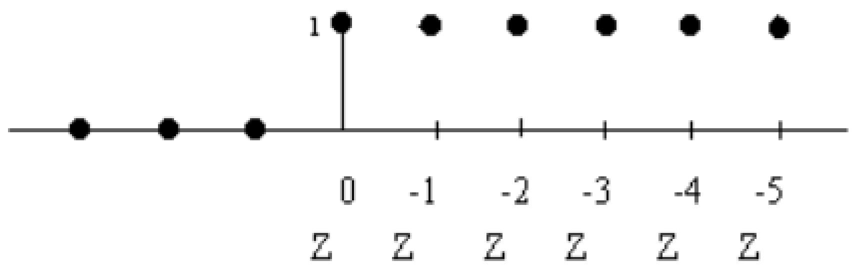
v(n)=imp(n)=Impulso unitario



$$V(z)=\sum_{n=0}^{\infty} imp(n) z^{-n}$$

$$V[z]=1\cdot z^{0}+0\cdot z^{-1}+0\cdot z^{-2}+0\cdot z^{-3}+\ldots\ldots=1$$

v(n)=sca(n)=gradino unitario



$$V(z)=\sum_{n=0}^{\infty} sca(n) z^{-n}$$

$$V[z]=1\cdot z^{0}+1\cdot z^{-1}+1\cdot z^{-2}+1\cdot z^{-3}+\ldots\ldots=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

v(n)=a^n sca(n)

$$V(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a^{n} sca(n) z^{-n}$$

$$V[z]=a^{0}\cdot z^{0}+a^{1}\cdot z^{-1}+a^{2}\cdot z^{-2}+a^{3}\cdot z^{-3}+\ldots\ldots=\frac{1}{1-\frac{a}{z}}=\frac{z}{z-a}$$

Problema 1

Risolviamo una equazione alle differenze con il metodo della trasformata Z

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=imp[n]$$

Assumendo y[n]=0 per n<0, calcolando iterativamente si ha:

n	$imp[n]$	$y[n]$
-1	0	0
0	1	$y[0]=imp[0]+y[-1]/2 = 1+0 = 1$
1	0	$y[1]=imp[1]+y[0]/2 = 0+1/2 = 0{,}5$
2	0	$y[2]=imp[2]+y[1]/2 = 0+0{,}5/2 = 0{,}25$
...	...	...

E quindi $\quad y[n]=\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}sca[n]$

Analogamente, risolvendo con la trasformata Z si ottiene:

$Y(z)-\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)=1 \qquad Y(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ E quindi per la [15] $\quad y[n]=\frac{1}{2^n}sca[n]$

Problema 2

La giacenza di un magazzino *y* [*n*] è calcolata in istanti di tempo discreti *n* , dall'istante convenzionalmente indicato come 0, *n*=0, 1, 2,... .
All'istante iniziale la giacenza e *y* [0]=10 unità. A causa delle operazioni di scarico, in ogni istante la giacenza si riduce del 10% rispetto alla giacenza dell'istante precedente. Si vuole descrivere la dinamica della giacenza di questo magazzino

$y[n]=0.9\, y[n-1]+10imp[n]$ Per $n<0$ $y[n]=0$

Applicando la trasformata Z a ogni lato dell'uguaglianza:

$$Y(z)=0.9z^{-1}Y(z)+10 \qquad Y(z)=\frac{10}{1-0.9z^{-1}}$$

Per ottenere la soluzione a tempo globale occorre anti-trasformare

$$y[n]=\zeta^{-1}\left(\frac{10}{1-0.9z^{-1}}\right)=10\zeta^{-1}\left(\frac{1}{1-0.9z^{-1}}\right)=10\times 0.9^{n}sca[n]$$

Problema 3
Successione di Fibonacci

Ogni elemento della successione è uguale alla somma dei due precedenti

$y[n+2]=y[n+1]+y[n]$ $y[0]=0$ e $y[1]=1$;

Per tenere conto delle condizioni iniziali calcoliamo la soluzione in forma chiusa di:

$y[n]=y[n-1]+y[n-2]+imp[n-1]$ Per n<0 y[n]=0

La cui trasformata Z è: $Y(z)=z^{-1}Y(z)+z^{-2}Y(z)+z^{-1}$

E quindi: $Y(z)=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}}=\frac{z}{z^{2}-z-1}$

Ovvero, fattorizzando $Y(z)=\frac{z}{(z-\frac{1-\sqrt{5}}{2})(z-\frac{1+\sqrt{5}}{2})}$

Questa equazione si può decomporre (vedi nota *) come segue: $Y(z)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{z}{z-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{z}{z-\frac{1-\sqrt{5}}{2}})$

E ricordando che: $\zeta^{-1}(\frac{z}{z-k})=k^{n}sca[n]$

Si ha $y[n]=\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n})$

Nota *

La decomposizione in frazioni parziali è una tecnica che consente di esprimere una frazione:

$$\frac{f(x)}{g(x)h(x)}$$

nella forma:

$$\frac{f(x)}{g(x)h(x)}=\frac{A}{g(x)}+\frac{B}{h(x)}$$

dove i termini A e B sono da trovare appunto con questa tecnica. In un caso relativamente semplice come quello che stiamo considerando la tecnica prevede di moltiplicare entrambi i termini dell'equazione per il denominatore, ottenendo:

$$f(x)=A\,h(x)+B\,g(x)$$

e quindi di calcolare l'equazione risultante per un valore x_1 che annulla il termine $h(x)$, così che:

$$f(x_1)=g(x_1)B$$

e:

$$B=\frac{f(x_1)}{g(x_1)}$$

e quindi analogamente per trovare il valore di A.
Per esempio:

$$\frac{5x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

diventa:

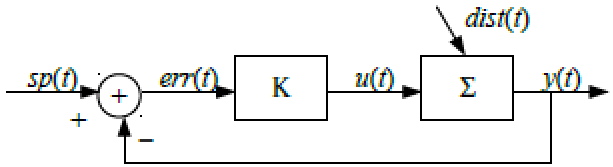
$$5x+1=A(x+2)+B(x-1)$$

Per $x=1$ si ottiene $5+1=A(1+2)$, cioè $A=2$; per $x=-2$ si ottiene $-10+1=B(-2-1)$, cioè $B=3$.
Dunque:

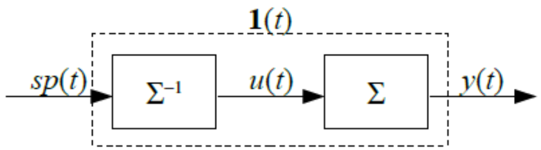
$$\frac{5x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2}$$

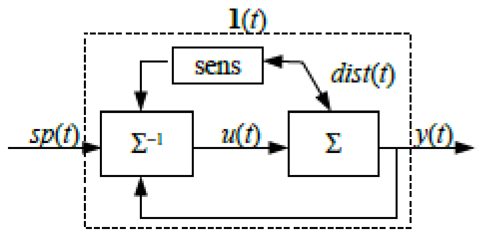
Controllo come problema di dinamica inversa

Lo schema di un sistema Σ con un controllore K è il seguente:



Le variabili di ingresso e di uscita per il sistema sono rispettivamente di uscita ed ingresso per il controllore quindi nel caso di assenza di disturbi e l'uscita y(t) dipenda solo dall'ingresso u(t) lo schema potrebbe essere rappresentato da una funzione identità con l'uscita uguale al set point:





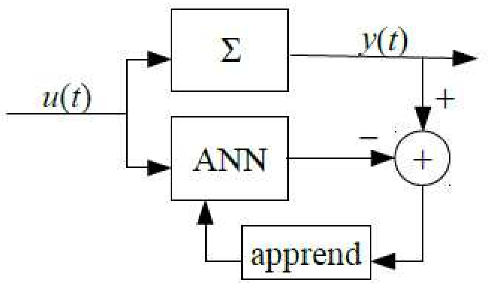
Per implementare un controllore che realizzi esattamente una dinamica inversa servirebbe conoscere oltre all'uscita del sistema, tutti i disturbi e le interazioni con l'ambiente esterno che intervengono nella dinamica di S e la perturbano, in modo da compensarle e riportare il sistema al set point (supponendo che nell'istante iniziale parta dal set point). N.B. il modello risultante deve essere però invertibile.

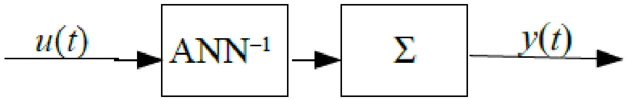
Modelli Black box di controllori

Le condizioni richieste per poter costruire un controllore attraverso la rappresentazione esplicita della dinamica inversa del sistema da controllare non sono facilmente soddisfatte in situazioni reali.

Esistono tuttavia modelli (parametrici) in grado di **apprendere a poco a poco la dinamica del sistema** (e di variare i parametri) un esempio sono le reti neurali artificiali (ANN), impiegate appunto per modellizzare relazioni complesse tra ingressi ed uscite quando non si conoscono tutti i fattori che ne determinano la dinamica.

Dopo un apprendimento appropriato il modello potrà essere impiegato come controllore per Σ





Domande di verifica

- Spiegare, anche con un esempio, l'utilità della trasformata Z per la soluzione di una dinamica discreta

- Spiegare, anche con un esempio, cosa si intende per linearizzazione di un sistema dinamico e spiegare a cosa serve.

- Spiegare cosa si intende quando si presenta il controllo come un problema di dinamica inversa, ed in particolare perché in questo caso può essere impiegata una modellistica black box.