Ricordiamoci che :

Definition 1 *V è un spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, se sui suoi elementi sono definite le operazioni di somma e prodotto per uno scalare che verificano le seguenti proprietà: $\forall$ $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ $\in V$*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}+\mathbf{v}&= \mathbf{v}+\mathbf{u} && \textit{(commutativa risp. alla somma)}\\
(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}&= \mathbf{u}+ (\mathbf{v}+\mathbf{w}) && \textit{(associativa risp. alla somma)}\\
\exists \mathbf{0}\ t.c.\ \mathbf{u}+\mathbf{0}&= \mathbf{u} && \textit{(elemento neutro della somma)}\\
\exists -\mathbf{u}\ t.c.\ \mathbf{u}+(-\mathbf{u}) &= 0 \ \textit{(opposto)}\\
1 &\in \mathbb{R}\ t.c.\ 1\mathbf{u}=\mathbf{u}\\
\alpha,\beta &\in \mathbb{R}\ t.c.\ (\alpha\beta)\,\mathbf{u}=\alpha\,(\beta\mathbf{u}) \ \textit{(associativa prodotto scalari risp. prodotto scalare-vettore)}\\
\alpha,\beta &\in \mathbb{R}\ t.c.\ (\alpha+\beta)\,\mathbf{u}=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u} \ \textit{(distributiva somma di scalari risp. prodotto scalari-vettori)}\\
\alpha &\in \mathbb{R}\ t.c.\ \alpha\,(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v} \ \textit{(distributiva somma vettori risp. prodotto scalare-vettore)}
\end{aligned}
$$

V deve inoltre essere chiuso rispetto alla somma e moltiplicazione per uno scalare.

Remark 2 *Per le $n-$uple di numeri reali, vale a dire i vettori*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \textit{ con } x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$$

le proprietà di cui alla definizione sopra, sono immediata conseguenza delle equivalenti proprietà per le somme e i prodotti tra i numeri reali. Segue che $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale.

Definition 3 *Sia V uno spazio (o sottospazio) vettoriale, un insieme di vettori di V, ad esempio $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$, è detto insieme di generatori di V, se ogni elemento di V, può essere espresso come combinazione lineare di questi vettori, ossia $\forall \mathbf{x} \in V$, $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n \in \mathbb{R}$ (n scalari), tali che*

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

Se, in aggiunta, i vettori B sono linearmente indipendenti, allora essi costituiscono una base di V e il loro numero identifica la dimensione di V.

Risolvere i seguenti esercizi :

Exercise 4 *L'insieme di tutti i vettori che giaciono sul piano di equazione $x = y + z$ costituiscono un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$? Motivare la risposta e in caso questa sia affermativa individuare una base di tale sottospazio indicandone la dimensione (fare anche un esempio di vettori generatori di questo sottospazio che non sia una base).*

Solution 5 *Giaciono sul piano (tutti e solo) i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y+z \\ y \\ z \end{bmatrix} | z, y \in \mathbb{R} \right\}$$

ogni vettore di V può essere scritto come segue:

$$\begin{bmatrix} y+z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ossia come combinazione lineare di due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, ogni combinazione lineare di questi due vettori è un elemento di V. Segue che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ a dimensione due con

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

una base di tale sottospazio. Un esempio di vettori generatori di V che non sia una base si ottiene prendendo i due vettori che ne costituiscono una base e aggiungendo un vettore combinazione lineare dei due (ad esempio la loro somma):

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Exercise 6 *L'insieme di tutti i vettori che giaciono sul piano di equazione $x = y + z - 4$, costituisce uno spazio vettoriale?*

Solution 7 *Procedere come sopra.*

Exercise 8 *Dati i vettori*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} ; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} ; \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

determinare il (sotto)spazio vettoriale (di $\mathbb{R}^3$) definito come l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$. Individuare una base e specificare la dimensiona di tale (sotto)spazio. Notare che l'insime di tutte le combinazioni lineari dei quattro vettori si può indicare anche come span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.

Solution 9 *Noto che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono tra loro linearmente indipendenti mentre $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ posso ottenerli come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, segue che tutte le possibili combinazioni lineari dei quattro vettori costituiscono un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione due. Una base di tale sottospazio è costituita da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.*

Exercise 10 *Indicare se e per quale valore di $\lambda \geq 0$, λ numero reale, il seguente insieme di vettori costituisce un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:*

$$U_\lambda = \left[\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x^2 + y^2 = \lambda,\ x, y, z \in \mathbb{R} \right]$$

Individuare una base e specificare la dimensione di ogni sottospazio che posso ottenere al variare di $\lambda \geq 0$.

Solution 11 *U_λ costituisce uno spazio vettoriale solo quando $\lambda = 0$. Una possibile base di U_0 è*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

segue che U_0 ha dimensione 1.

Exercise 12 *Individuare una base per il seguente sottospazio vettoriale e indicarne la dimensione:*

$$U = \left[\begin{bmatrix} \beta \\ \lambda \\ -\beta \end{bmatrix} : \lambda, \beta \in \mathbb{R} \right]$$

Solution 13 *Il vettore*

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \lambda \\ -\beta \end{bmatrix}$$

si può vedere come combinazione lineare a coefficienti $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ dei vettori linearmente indipendenti $[1,0,-1]^T$ e $[0,1,0]^T$. Infatti

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \lambda \\ -\beta \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ con } \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

segue che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. $[1,0,-1]^T$ e $[0,1,0]^T$ rappresentano una base di tale sottospazio la cui dimensione è quindi 2.

Exercise 14 *Assegnare un valore ad α in modo tale che il seguente insieme U_α costituisce un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ (individuarne poi una base e specificarne la dimensione):*

$$U_\alpha = \begin{bmatrix} 1-\alpha+\beta & \\ \beta & : \lambda, \beta \in \mathbb{R} \\ -\lambda & \end{bmatrix}$$

Solution 15 *I vettori di U_α possono essere riscritti come segue*

$$(1-\alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Al variare di λ e β l'unico modo per ottenere l'elemento neutro della somma (ossia il vettore nullo), è fissare $\alpha = 1$, da cui otteniamo che $U_{\alpha=1}$ è l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari dei vettori $[1,1,0]^T$ e $[0,0,-1]^T$. Questi due vettori sono inoltre linearmente indipendenti quindi costituiscono una base di $U_{\alpha=1}$ che ha dimensione due.

Exercise 16 *Dato il seguente spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbb{R}^4$):*

$$U = \left[\begin{bmatrix} \lambda \\ \beta+\lambda \\ -\lambda \\ \beta \end{bmatrix} : \lambda, \beta \in \mathbb{R} \right]$$

indicare se il seguente insieme di vettori di $\mathbb{R}^4$ è un sottospazio vettoriale di U

$$V = \left[\begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ -2\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right]$$

Solution 17 *Notiamo che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, fissando $\lambda = 2\alpha$ e $\beta = -\alpha$, abbiamo che:*

$$\alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \beta+\lambda \\ -\lambda \\ \beta \end{bmatrix}$$

quindi ogni vettore di V si ottiene come combinazione lineare dei vettori di U, vale a dire $V \subset U$. Segue che V costituisce un sottospazio vettoriale di U.

Exercise 18 *Individuare una base ortonormale per il seguente spazio vettoriale:*

$$U = \left[\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} : \lambda, \beta \in \mathbb{R} \right]$$

Solution 19 *Ogni vettore di U può essere ottenuto come segue*

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ossia come combinazione lineare dei due vettori linearmente indipendenti $[1,0,0]^T$ e $[0,0,1]^T$. Segue che questi due vettori costituiscono una base di U. Essendo due vettori a modulo unitario e ortogonali, essi costituiscono una base ortonormale di U.