Richiami (cose da ricordarsi):

Definition 1 *Dati i vettori* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_r$, *l'insieme costituito da tutte le loro combinazioni lineari*

$$V := \{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + ... + \alpha_r \mathbf{v}_r; \quad \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n \tag{1}$$

V *non è soltato un sottoinsime di* $\mathbb{R}^n$, *ma, più precisamente, un sottospazio di* $\mathbb{R}^n$. *Con ciò si intende che* V *è chiuso rispotto alle operazioni "moltiplicazione di un vettore per uno scalare" e "prodotto scalare di vettori".*

Remark 2 *Combinando linearmente due (o più) combinazioni lineari dei vettori* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_r$, *si ottiene ancora una combinazione lineare dei vettori stessi. Cosinderiamo due combinazioni lineari di* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_r$, *una di coefficienti* $\alpha_1', \alpha_2', ..., \alpha_r' \in \mathbb{R}$ *l'altra di coefficienti* $\alpha_1'', \alpha_2'', ..., \alpha_r'' \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}' = \alpha_1' \mathbf{v}_1 + \alpha_2' \mathbf{v}_2 + ... + \alpha_r' \mathbf{v}_r \qquad \mathbf{x}'' = \alpha_1'' \mathbf{v}_1 + \alpha_2'' \mathbf{v}_2 + ... + \alpha_r'' \mathbf{v}_r$$

allora una combinazione lineare dei vettori $\mathbf{x}'$ *e* $\mathbf{x}''$ *di coefficienti* λ',$\lambda'' \in \mathbb{R}$, *vale a dire*

$$\begin{aligned} \lambda' \mathbf{x}' + \lambda'' \mathbf{x}'' &= \lambda' \left(\alpha_1' \mathbf{v}_1 + \alpha_2' \mathbf{v}_2 + ... + \alpha_r' \mathbf{v}_r\right) + \lambda'' \left(\alpha_1'' \mathbf{v}_1 + \alpha_2'' \mathbf{v}_2 + ... + \alpha_r'' \mathbf{v}_r\right) \\ &= \left(\lambda' \alpha_1' + \lambda'' \alpha_1''\right) \mathbf{v}_1 + \left(\lambda' \alpha_2' + \lambda'' \alpha_2''\right) \mathbf{v}_2 + ... + \left(\lambda' \alpha_r' + \lambda'' \alpha_r''\right) \mathbf{v}_r \end{aligned}$$

risulta essere (ancora) una combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_r$ *(questa volta) di coefficienti* $\lambda' \alpha_1' + \lambda'' \alpha_1'', \lambda' \alpha_2' + \lambda'' \alpha_2'', ..., \lambda' \alpha_r' + \lambda'' \alpha_r'' \in \mathbb{R}$.

Example 3 *Consideriamo due vettori linearmente indipendenti di* $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

consideriamo due combinazioni lineari di questi due vettori

$$\mathbf{x}' = \alpha_1' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2' \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x}'' = \alpha_1'' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2'' \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ad esempio $\alpha_1' = 2$, $\alpha_2' = -1$, $\alpha_1'' = 3$ *e* $\alpha_2'' = -2$:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

combiniamo linearmente questi due vettori ($\mathbf{x}'$ *e* $\mathbf{x}''$*) con coefficienti* $\lambda' = 2$ *e* $\lambda'' = -1$, *otteniamo*

$$\lambda' \mathbf{x}' + \lambda'' \mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

notiamo che tale vettore può essere ottenuto come combinazione lineare dei vettori di partenza $[1,0,2]^T$ *e* $[-1,1,0]^T$, *con coefficienti* $\lambda'\alpha_1' + \lambda''\alpha_1'' = 1$ *e* $\lambda'\alpha_2' + \lambda''\alpha_2'' = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = (1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + (0) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definition 4 *Si dice che* V *definito in 1 è generato dalla famiglia di vettori* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$, *o anche che quest'ultima è una famiglia di generatori di* V. *Si scrive*

$$V = span\,[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r]$$

(quindi span è un modo equivalente per indicare tutte le possibili combinazioni lineari dei vettori dati).

Example 5 *Consideriamo il singolo vettore* $\mathbf{v}_1 = [2,1] \in \mathbb{R}^2$. *Il sottospazio da esso generato (ossia l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di questo vettore, span* $[\mathbf{v}_1]$*) è l'insieme dei vettori* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ *tali che*

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{v}_1, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} \qquad \text{da cui} \quad \mathbf{x} = \alpha \mathbf{v}_1 = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

ossia l'insieme dei vettori multipli di $\mathbf{v}_1$. *Se consideriamo le coppie di punti* $(2\alpha, \alpha)$ *al variare di* α, *ci accorgiamo che esse costituiscono una retta (del piano) passante per l'origine. Per comprendere meglio le cose, scriviamo* x *a posto di* 2α, *quindi* $\frac{x}{2}$ *al posto di* α, *otteniamo l'insieme di punti* $\left(x, \frac{x}{2}\right)$ *che non è altro che il grafico della retta di equazione* $y = \frac{x}{2}$.

Remark 6 *E' chiaro che l'origine di* $\mathbb{R}^{n\geq 1}$, *ossia il vettore nullo* $[0,0,...,0] \in \mathbb{R}^n$, *appartiene a qualuque sottospazio (basta prendere tutti i coefficienti nulli nella combinazione lineare). Quindi un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^n$ *che non contenga il vettore nullo non può essere un sottospazio.*

Consideriamo nuovamente il sottospazio V di $\mathbb{R}^n$ generato dalla famiglia di vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$:

$$V = span\,[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r]$$

Se $\mathbf{x} \in V$, allora esistono dei coefficienti $\alpha_1', \alpha_2', ..., \alpha_r' \in \mathbb{R}$ che consentono di esprimere $\mathbf{x}$ come combinazione lineare dei vettori generatori di V, ossia $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$:

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + ... + \alpha_r \mathbf{v}_r$$

Ci si chiede, tali coefficienti sono univocamente determinati? Supponiamo che sia possibile esprimere $\mathbf{x}$ in due modi diversi come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$, ossia

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \alpha_1' \mathbf{v}_1 + \alpha_2' \mathbf{v}_2 + ... + \alpha_r' \mathbf{v}_r \\ \mathbf{x} &= \alpha_1'' \mathbf{v}_1 + \alpha_2'' \mathbf{v}_2 + ... + \alpha_r'' \mathbf{v}_r \end{aligned}$$

con $\alpha_i' \neq \alpha_i''$ per almeno un indice i. Sottraendo membro a membro le due uguaglianze scritte si ottiene:

$$\mathbf{0} = (\alpha_1' - \alpha_1'')\,\mathbf{v}_1 + (\alpha_2' - \alpha_2'')\,\mathbf{v}_2 + ... + (\alpha_r' - \alpha_r'')\,\mathbf{v}_r$$

ponendo $\alpha_i := \alpha_1' - \alpha_1''$, abbiamo

$$\mathbf{0} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_r\mathbf{v}_r$$

dove almeno uno dei coefficienti α_i è diverso da zero. Ma questo implica (per definizione) che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ sono linearmente dipendenti. Quindi, vale quanto segue:

Lemma 7 *Dati $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ una famiglia di generatori di un generico spazio vettoriale V, se tale vettori sono linearmente indipendenti esiste un'unico insieme di coefficienti (scalari) $\alpha_1', \alpha_2', ..., \alpha_r' \in \mathbb{R}$ che consente di esprimere un generico $\mathbf{x} \in V$ come combinazione lineare dei vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ (ogni vettore è esprimibile in un solo modo come combinazione lineare di $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$). Se i vettori sono linearmente dipendenti (non costituiscono una base di V) allora possono esistono più modi di esprimere un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ come combinazione lineare di $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$.*

Remark 8 *Se (e soltanto se) i vettori sono linearmente dipendenti, uno (almeno) di essi è esprimibile come combinazione lineare dei restanti. Dati $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$, se essi sono linearmente dipendenti, allora $\exists \alpha_i \neq 0$ tale che*

$$\mathbf{0} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + ...\alpha_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + \alpha_i\mathbf{v}_i + \alpha_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} ... + \alpha_r\mathbf{v}_r$$

da cui

$$\mathbf{v}_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\mathbf{v}_1 - ... - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\mathbf{v}_2 - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\mathbf{v}_2 - ... - \frac{\alpha_r}{\alpha_i}\mathbf{v}_r$$

Remark 9 *Si osservi che se uno dei vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ è nullo, allora essi sono linearmente dipendenti.*

Remark 10 *Dire che due vettori non nulli $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono linearmente dipendenti equivale a dire che essi sono proporzionali:*

$$\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Remark 11 *Se i vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ sono linearmente dipendenti significa che uno di essi appartiene al sottospazio vettoriale generato dagli $r-1$ restanti.*

Definition 12 *Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ è un insieme di generatori del sottospazio V di $\mathbb{R}^n$, diremo che esso è una base di V se i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$ sono linearmente indipendenti.*

Remark 13 *Se* $\mathcal{U} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ *costituisce una base di* V*,* $\forall \mathbf{x} \in V$ *la rappresentazione*

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + ... + \alpha_r \mathbf{v}_r$$

è univocamente determinata: gli scalari α_1*,* α_2*,...,*α_r *si dicono coordinate di* $\mathbf{x}$ *rispetto alla base* $\mathcal{U}$ *e si ha*

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix}$$

Example 14 *Consideriamo due basi di* $\mathbb{R}^2$*:*

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \\ \mathcal{V} &= \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

e il vettore

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} &= \overbrace{\left(\frac{1}{3}\right)}^{\alpha_1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \overbrace{\left(-\frac{5}{3}\right)}^{\alpha_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow [\mathbf{x}]_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} &= \overbrace{(1)}^{\alpha_1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \overbrace{(-3)}^{\alpha_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow [\mathbf{x}]_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si osservi che un sottospazio ammette più base, in generale infinite basi diverse, tuttavia il numero di vettori costituenti due diverse basi di un medesimo sottospazio è lo stesso per entrambe le basi. Si ha infatti il

Theorem 15 *Se* V *è un sottospazio di* $\mathbb{R}^n$*, allora due diverse basi di* V *sono necessariamente costituite da un ugual numero di vettori; tale numero viene chiamato dimensione di* V *e si indica* $\dim V$*.*

Remark 16 *Comunque si scelgono* r *vettori di* $\mathbb{R}^n$*, con* $r > n$*, essi sono linearmente dipendenti.*

Ci viene un dubbio: esistono n vettori di $\mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti che non generano tutto $\mathbb{R}^n$ ma solo un sottospazio di esso? Dato V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ a dimensione $r < n$, esistono r vettori linearmente indipendenti che non generato tutto V? A queste domande risponde il seguente teorema (entrambe le risposte sono negative):

Theorem 17 (Dell'alternativa) *Dati gli* n *vettori* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,....,$\mathbf{v}_n$ *in* $\mathbb{R}^n$*, o essi costituiscono una base di* $\mathbb{R}^n$*, cioè sono linearmente indipendenti e generano tutto* $\mathbb{R}^n$*, oppure non verificano né l'una né l'altra condizione. Dato* V *un sottospazio di* $\mathbb{R}^n$ *a dimensione* $r < n$*, e* r *vettori* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,....,$\mathbf{v}_r$ *in* V*, o essi costituiscono una base di* V*, cioè sono linearmente indipendenti e generano tutto* V*, oppure non verificano né l'una né l'altra condizione.*