Analisi matematica
Esercizi di Algebra Lineare: Parte I.

March 7, 2016

1. **Calcolo vettoriale in $\mathbb{R}^2$.** Dati:

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix};\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix}-5\\0\end{bmatrix};\ \mathbf{z}=\begin{bmatrix}8\\1\end{bmatrix};\ \alpha_1=1;\ \alpha_2=-2;\ \alpha_3=0$$

calcolare

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}+\mathbf{v}\\
&\alpha_2\mathbf{v}\\
&\mathbf{u}-\mathbf{z}\\
&\alpha_1\mathbf{u}+\alpha_2\mathbf{v}+\alpha_3\mathbf{z}\\
&\alpha_2\left(\mathbf{u}-\mathbf{z}\right)\\
&\mathbf{uv}\\
&\mathbf{zu}\\
&\alpha_2\mathbf{zuv}\\
&|\mathbf{u}|\\
&|\mathbf{u}-\mathbf{v}|\\
&|\mathbf{v}-\mathbf{z}|\\
&vers\left(\mathbf{u}\right)\\
&vers\left(\alpha_1\mathbf{v}\right)\\
&vers\left(\alpha_2\mathbf{z}+\mathbf{u}\right)
\end{aligned}$$

2. **Calcolo vettoriale in $\mathbb{R}^3$.** Dati:

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix};\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix}-5\\0\\1\end{bmatrix};\ \mathbf{z}=\begin{bmatrix}8\\1\\0\end{bmatrix};\ \alpha_1=0;\ \alpha_2=1;\ \alpha_3=2$$

calcolare

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}$$
$$\alpha_2\mathbf{v}$$
$$\mathbf{u}-\mathbf{z}$$
$$\alpha_1\mathbf{u}+\alpha_2\mathbf{v}+\alpha_3\mathbf{z}$$
$$\alpha_2\left(\mathbf{u}-\mathbf{z}\right)$$
$$\mathbf{uv}$$
$$\mathbf{zu}$$
$$\alpha_2\mathbf{zuv}$$
$$|\mathbf{z}|$$
$$|-8\mathbf{z}|$$
$$|\mathbf{u}-\alpha_3\mathbf{z}|$$
$$|\mathbf{u}-\mathbf{z}|$$

3. **Calcolo vettoriale in $\mathbb{R}^2$.** Dati:

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}2\\0\\0\\1\end{bmatrix};\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\3\end{bmatrix};\ \mathbf{z}=\begin{bmatrix}3\\2\\0\\1\end{bmatrix};\ \alpha_1=2;\ \alpha_2=0;\ \alpha_3=4$$

calcolare

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}$$
$$\alpha_2\mathbf{v}$$
$$\mathbf{u}-\mathbf{z}$$
$$\alpha_1\mathbf{u}+\alpha_2\mathbf{v}+\alpha_3\mathbf{z}$$
$$\alpha_2\left(\mathbf{u}-\mathbf{z}\right)$$
$$\mathbf{uv}$$
$$\mathbf{zu}$$
$$\alpha_2\mathbf{zuv}$$
$$|\alpha_2\left(\mathbf{u}-\mathbf{z}\right)|$$

4. Verificare, usando la definizione, se

   (a) i vettori $\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ sono linearmente indipendenti (in caso contrario esprimere uno di essi come combinazione lineare dei restanti).

   (b) i vettori $\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}\end{bmatrix}\right\}$ sono linearmente indipendenti (in caso contrario esprimere uno di essi come combinazione lineare dei restanti).

(c) i vettori $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ sono linearmente indipendenti (in caso contrario esprimere uno di essi come combinazione lineare dei restanti).

(d) i vettori $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ sono linearmente indipendenti (in caso contrario esprimere uno di essi come combinazione lineare dei restanti).

(e) i vettori $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ sono linearmente indipendenti (in caso contrario esprimere uno di essi come combinazione lineare dei restanti).

(f) i vettori $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ sono linearmente indipendenti (in caso contrario esprimere uno di essi come combinazione lineare dei restanti).

(g) i vettori $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ sono linearmente indipendenti (in caso contrario esprimere uno di essi come combinazione lineare dei restanti).

5. Per ogni insime di vettori B_i , $i = 1, ..., 10$, che segue, individuare il più grande sottoinsieme composto esclusivamente da vettori linearmente

indipendenti:

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \\
B_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} \right\} \\
B_3 &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
B_4 &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \\
B_5 &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
B_6 &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right\} \\
B_7 &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\
B_8 &= \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
B_9 &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \\
B_{10} &= \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

6. Esprimere, dove possibile, il vettore **u** come combinazione lineare dei vettori in B (qualora non fosse possibile, spiegarne il perché e darne evienza

grafica):

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

7. Si determinino, se esistono,

(a) i coefficienti $c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}$ tali che il vettore $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ possa essere scritto come come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ (Vettori della base canonica);

(b) i coefficienti $c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}$ tali che il vettore $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ possa essere scritto come come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^1+2\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^2+\mathbf{e}^3$ (dove $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ sono i vettori della base canonica);

(c) i coefficienti $c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}$ tali che il vettore $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ possa essere scritto come come combinazione lineare dei vettori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(d) i coefficienti $c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}$ tali che il vettore $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ possa essere scritto come come combinazione lineare dei vettori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

8. Si dica se

(a) il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ può essere scritto come combinazione lineare dei vettori $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ (Motivare tramite rappresentazione grafica).

(b) il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ può essere scritto come combinazione lineare dei vettori $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ (Motivare tramite rappresentazione grafica).

(c) il vettore $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ può essere scritto come combinazione lineare dei vettori $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (Motivare tramite rappresentazione grafica).

9. Indicare se $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, dove $x_1,\ y_1,\ z_1 \in \mathbb{R}$ e

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

costituisce un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, indicare una base di tale sottospazio e specificarne la dimensione.

10. Indicare se $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, dove $x_1,\ y_1,\ z_1 \in \mathbb{R}$ e

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

costituisce un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, indicare una base di tale sottospazio e specificarne la dimensione.

11. Indicare se $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, dove $x_1,\ y_1 \in \mathbb{R}$ e

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

costituisce un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$, indicare una base di tale sottospazio e specificarne la dimensione.

12. Indicare se $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, dove $x_1,\ y_1 \in \mathbb{R}$ e

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

costituisce un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$, indicare una base di tale sottospazio e specificarne la dimensione.

13. Si dica, giustificando la risposta, se:

    (a) i vettori $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ costituiscono una base in $\mathbb{R}^2$;

    (b) i vettori $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ costituiscono una base in $\mathbb{R}^3$;

14. Dopo aver verificato, in base alla definizione, che i tre vettori:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix};\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix};\ \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti, si esprima il vettore $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

15. Assegnati i vettori: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, si determinino due numeri a e b tali che:

$a\mathbf{u}+b\mathbf{v} = -\mathbf{e}^1+2\mathbf{e}^2$, $\left(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\right.$ sono i vettori della base canonica (vettori fondamentali) di $\left.\mathbb{R}^3\right)$

16. Assegnati i vettori: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ed $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ 6 \\ b \\ -2 \end{bmatrix}$ si determini, per quali valori dei parametri reali a e b:

    (a) $\mathbf{u}$ è proporzionale a $\mathbf{v}$;

    (b) $\mathbf{u}$ è ortogonale a $\mathbf{v}$;

17. Assegnate le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

si calcolino, se possibile: AB, BA, AB^T, $A+B$.

18. Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}$$

si determini per quali valori di a e b risulta: $AB^T = I_2$ (I_2 è la matrice identità 2×2).

19. Assegnato il vettore $\mathbf{u} = [-1, 3, -2]$,

    (a) si calcoli il vettore

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \begin{bmatrix} -3 & 1 & a \\ 1 & a & 2 \\ -a & a & 1 \end{bmatrix},\ a \in \mathbb{R}$$

(b) si determini, per quale valore del parametro reale a, $\mathbf{v}$ è otogonale ad $\mathbf{u}$.

20. Individuare lo spazio (o sottospazio) vettoriale generato dai vettori colonna di ciascuna delle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$