Rischio e valore nelle banche

Il rischio di credito:
I modelli di portafoglio

Capitolo 14

Agenda

- I modelli VaR per il rischio di credito
- CreditMetrics™ (J.P. Morgan)
- Portfolio Manager™ (KMV)
- CreditRisk+™ (CSFP)
- CreditPortfolioView™ (McKinsey)
- CreditPricing

I modelli di portafoglio

- La scelta dell'orizzonte temporale di riferimento
  - Holding period ⇨ problema assenza di un mercato secondario liquido
  - Liquidità ⇨ scadenza esposizione
- Problemi
  - Scadenze diverse = orizzonti diversi
  - Numerose esposizioni sono prive di scadenza

I modelli di portafoglio

- Possibile soluzione: orizzonte temporale unico pari a 1 anno
- Soluzione adottata dalla maggioranza dei modelli
  - Periodo relativo al tasso di rotazione media del portafoglio ⇨ poco sensato in ottica micro
  - Coerenza con orizzonte temporale stima PD
  - Coerenza con orizzonte temporale per budget e riallocazione periodica del capitale

I modelli di portafoglio

Tabella 1 - La scelta dell'orizzonte temporale

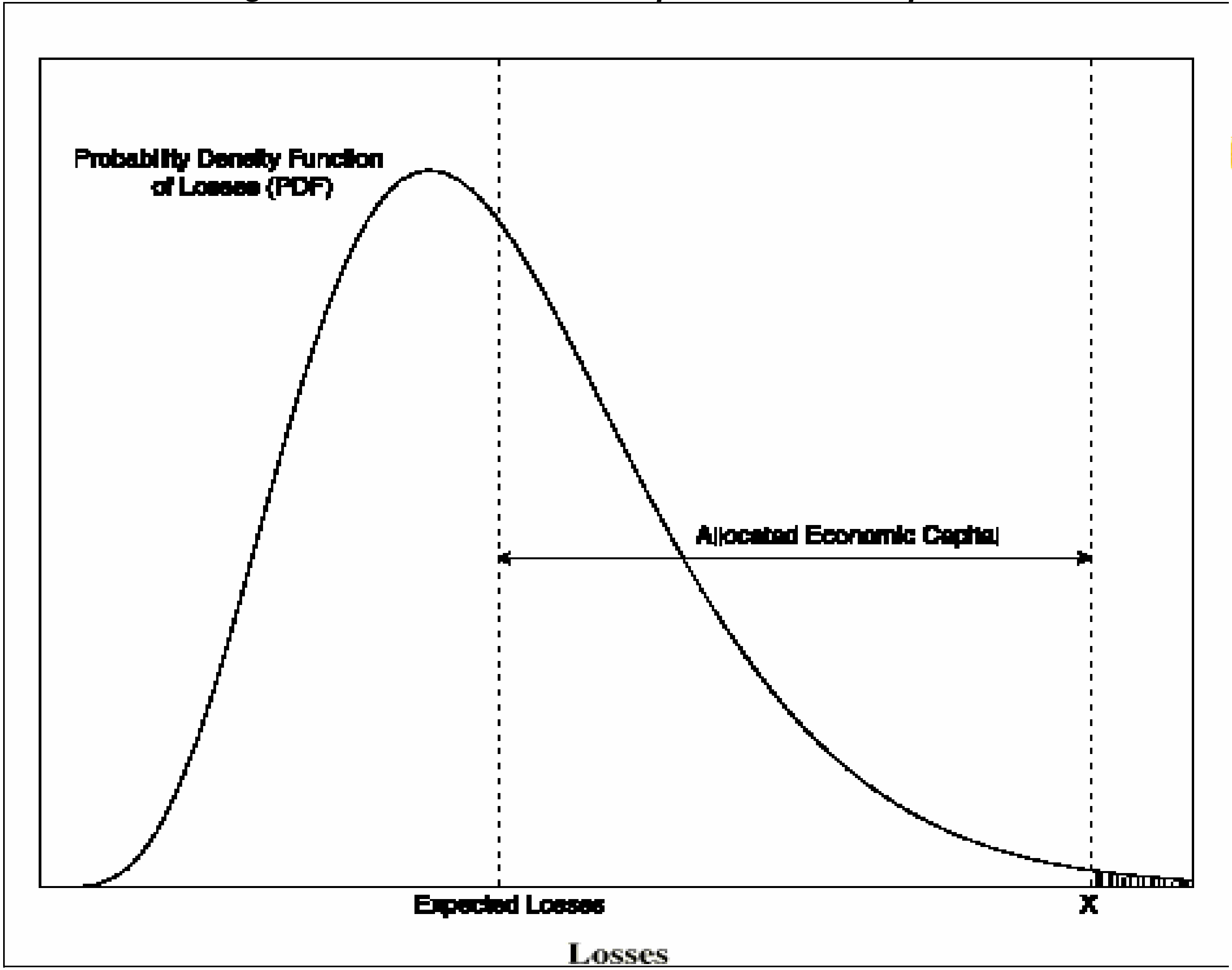
Finalità perseguita		*Fattori rilevanti per la scelta dell'orizzonte temporale*		*Orizzonte temporale ideale*
Misurazione del rischio	⇨	✓ Coerenza con l'orizzonte temporale adottato per la stima delle probabilità di insolvenza	⇨	✓ 1 anno
Controllo del rischio (limiti)	⇨	✓ Liquidità delle posizioni ✓ Tasso di rotazione media del portafoglio	⇨	✓ Vita residua esposizioni ✓ 1 anno
Misurazione delle *Risk-Adjusted Performance (RAP)*	⇨	✓ Frequenza del processo di *budgeting* ✓ Frequenza rilevazione risultati economici	⇨	✓ 1 anno ✓ 1 anno
Pricing	⇨	✓ Scadenza delle esposizioni ✓ Frequenza di revisione delle condizioni di tasso	⇨	✓ Vita residua esposizioni ✓ 1 anno o più
Allocazione del capitale	⇨	✓ Frequenza della riallocazione periodica del capitale ✓ Liquidità del mercato del capitale	⇨	✓ 1 anno ✓ 1 anno

I modelli di portafoglio

La scelta del livello di confidenza

- Problemi
  - Distribuzione non normale
  - Media non nulla
- Possibili soluzioni
  - Analitica ⇨ distribuzione nota non normale
  - Percentile ⇨ taglio distribuzione generata da simulazioni MC

Figura 1 - La distribuzione di probabilità delle perdite



CreditMetrics™

- Migration approach
- Modello in forma ridotta ⇨ diverso da modelli strutturali à la Merton, che spiegano insolvenza in base a caratteristiche strutturali dell'impresa, e da modelli macro, che spiegano l'evoluzione dei tassi di insolvenza e di migrazione sulla base del ciclo economico
- Modelli in forma ridotta sono "agnostici" ⇨ si limitano a utilizzare come input i dati storici (tassi migrazione e default per classi di rating) per giungere a una stima della distribuzione delle perdite di portafoglio

CreditMetrics™

6 fasi

1. Valore di mercato esposizioni
2. Stima probabilità di migrazione
3. Stima tasso di recupero
4. Calcolo valori di mercato corrispondenti alle diverse classi di rating a fine anno
5. Stima distribuzione variazioni VM a fine anno
6. Stima rischio di un portafoglio

CreditMetrics™

Input del modello

- ✓ Orizzonte temporale
- ✓ Sistema di rating (S&P, Moodys, interno)
- ✓ Matrice di transizione
- ✓ Tassi di recupero
- ✓ Curva degli spread di rendimento fra titoli rischiosi e government per classe di rating

CreditMetrics™

- Prima fase: stima valore esposizione
- Seconda fase: stima probabilità migrazione

Tabella 2 - Matrice di transizione a 1 anno

	RATING A FINE ANNO (%)							
RATING INIZIALE	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	90,81	8,33	0,68	0,06	0,12	0	0	0,00
AA	0,70	90,65	7,79	0,64	0,06	0,14	0,02	0,00
A	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06
BBB	0,02	0,33	5,95	86,93	5,30	1,17	0,12	0,18
BB	0,03	0,14	0,67	7,73	80,53	8,84	1,00	1,06
B	0,00	0,11	0,24	0,43	6,48	83,46	4,07	5,20
CCC	0,22	0,00	0,22	1,30	2,38	11,24	64,86	19,79

Fonte: S&P CreditWeek (15 aprile 1996)

CreditMetrics™

✓ Terza fase: stima tassi di recupero ⇨ rilevanti per determinare il valore delle esposizioni che vanno in default

Tabella 3 - Tassi di recupero

Tipologia	*Senior Secured*	*Senior Unsecured*	*Senior Subordinated*	*Subordinated*	*Junior Subordinated*
Media (%)	53,80	51,13	38,52	32,74	17,09
Dev.std. (%)	26,86	25,45	23,81	20,18	10,90

Fonte: Gupton, Finger e Bhatia (1997).

CreditMetrics™

✓ Quarta fase: stima dei valori di mercato corrispondenti alle diverse classi di rating ⇨ necessaria la curva dei tassi zero-coupon per classi di rating

Tabella 4 - Esempio di curva dei tassi* forward zero coupon *a 1 anno (%)

Scadenza	*1 anno*	*2 anni*	*3 anni*	*4 anni*
Classe di rating				
AAA	3,60	4,17	4,73	5,12
AA	3,65	4,22	4,78	5,17
A	3,72	4,32	4,93	5,32
BBB	4,10	4,67	5,25	5,63
BB	5,55	6,02	6,78	7,27
B	6,05	7,02	8,03	8,52
CCC	15,05	15,02	14,03	13,52

Dati riferiti alle classi di *rating* S&P. Fonte: Gupton, Finger e Bhatia (1997).

CreditMetrics™

- Esempio: titolo obbligazionario BBB con scadenza pari a 5 anni, cedola annua pari al 6% quotato alla pari
- Se resta in classe BBB (probabilità = 86,93%)

$$VM_{1,BBB} = 6 + \frac{6}{(1+4{,}10\%)} + \frac{6}{(1+4{,}67\%)^2} + \frac{6}{(1+5{,}25\%)^3} + \frac{106}{(1+5{,}63\%)^4} = 107{,}53$$

- Se downgrading a BB

$$VM_{1,BB} = 6 + \frac{6}{(1+5{,}55\%)} + \frac{6}{(1+6{,}02\%)^2} + \frac{6}{(1+6{,}78\%)^3} + \frac{106}{(1+7{,}27\%)^4} = 102{,}01$$

- Perdita pari a 5,52 = 107,53-102,01

CreditMetrics™

Quinta fase: stima della distribuzione delle variazioni del valore di mercato dell'attività

Tabella 5 – Distribuzione dei valori di mercato a 1 anno di un titolo BBB a 5 anni con cedola annuale 6% e tasso di recupero pari a 53,8%

Rating a fine anno	*Probabilità (%)*	*Valore di mercato –VM (inclusa cedola)*	*VM ponderato per la probabilità*	*Variazione di VM rispetto al valore medio*	*Variazione al quadrato ponderata*
AAA	0,02	109,35	0,0219	2,28	0,0010
AA	0,33	109,17	0,3603	2,10	0,0145
A	5,95	108,64	6,4643	1,57	0,1464
BBB	86,93	107,53	93,4766	0,46	0,1814
BB	5,3	102,01	5,4063	-5,07	1,3612
B	1,17	98,09	1,1476	-8,99	0,9452
CCC	0,12	83,63	0,1004	-23,45	0,6598
Insolvenza	0,18	53,80	0,0968	-53,27	5,1086
		Media	107,0742	*Varianza*	8,4182

CreditMetrics™

Tabella 6 – Misure di rischio alternative

Misura di rischio	*Valore*
Perdita attesa (*forward price – expected price*)	0,46
Deviazione standard	2,90
VaR 95% con ipotesi distribuzione normale (1,65 x dev.std.)	4,79
VaR 99% con ipotesi distribuzione normale (2,33 x dev.std.)	6,76
VaR 95% con distribuzione effettiva	5,07
VaR 99% con distribuzione effettiva	8,99

VaR distribuzione effettiva ottenuto tagliando distribuzione empirica delle variazioni dei valori di mercato in corrispondenza del percentile desiderato

VaR distribuzione effettiva > VaR distribuzione normale

CreditMetrics™

- Sesta fase: stima del VaR di un portafoglio
  - Esempio: 2 titoli indipendenti con rating A e BBB
  - La probabilità che entrambi i titoli restino nella propria classe iniziale sarebbe data dal prodotto delle due probabilità (80,53% x 91,05% = 73,32%)
  - La probabilità che entrambi divengano insolventi sarebbe: 0,06% x 1,06% = 0,00%
  - Così si potrebbe costruire la matrice delle probabilità di migrazione congiunta
  - Problema: in realtà le migrazioni non sono indipendenti

CreditMetrics™

✓ Esempio: 2 titoli indipendenti, rating A e BBB

Tabella 7 – Probabilità di migrazione congiunte di due emittenti con rating A e BB in ipotesi di indipendenza dei relativi tassi di migrazione

		Emittente A							
		AAA	*AA*	*A*	*BBB*	*BB*	*B*	*CCC*	*Default*
Emittente BB		*0,09*	*2,27*	*91,05*	*5,52*	*0,74*	*0,26*	*0,01*	*0,06*
AAA	*0,03*	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
AA	*0,14*	0,00	0,00	0,13	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
A	*0,67*	0,00	0,02	0,61	0,40	0,00	0,00	0,00	0,00
BBB	*7,73*	0,01	0,18	7,04	0,43	0,06	0,02	0,00	0,00
BB	*80,53*	0,07	1,83	73,32	4,45	0,60	0,20	0,01	0,05
B	*8,84*	0,01	0,20	8,05	0,49	0,07	0,02	0,00	0,00
CCC	*1,00*	0,00	0,02	0,91	0,06	0,01	0,00	0,00	0,00
Default	*1,06*	0,00	0,02	0,97	0,06	0,01	0,00	0,00	0,00

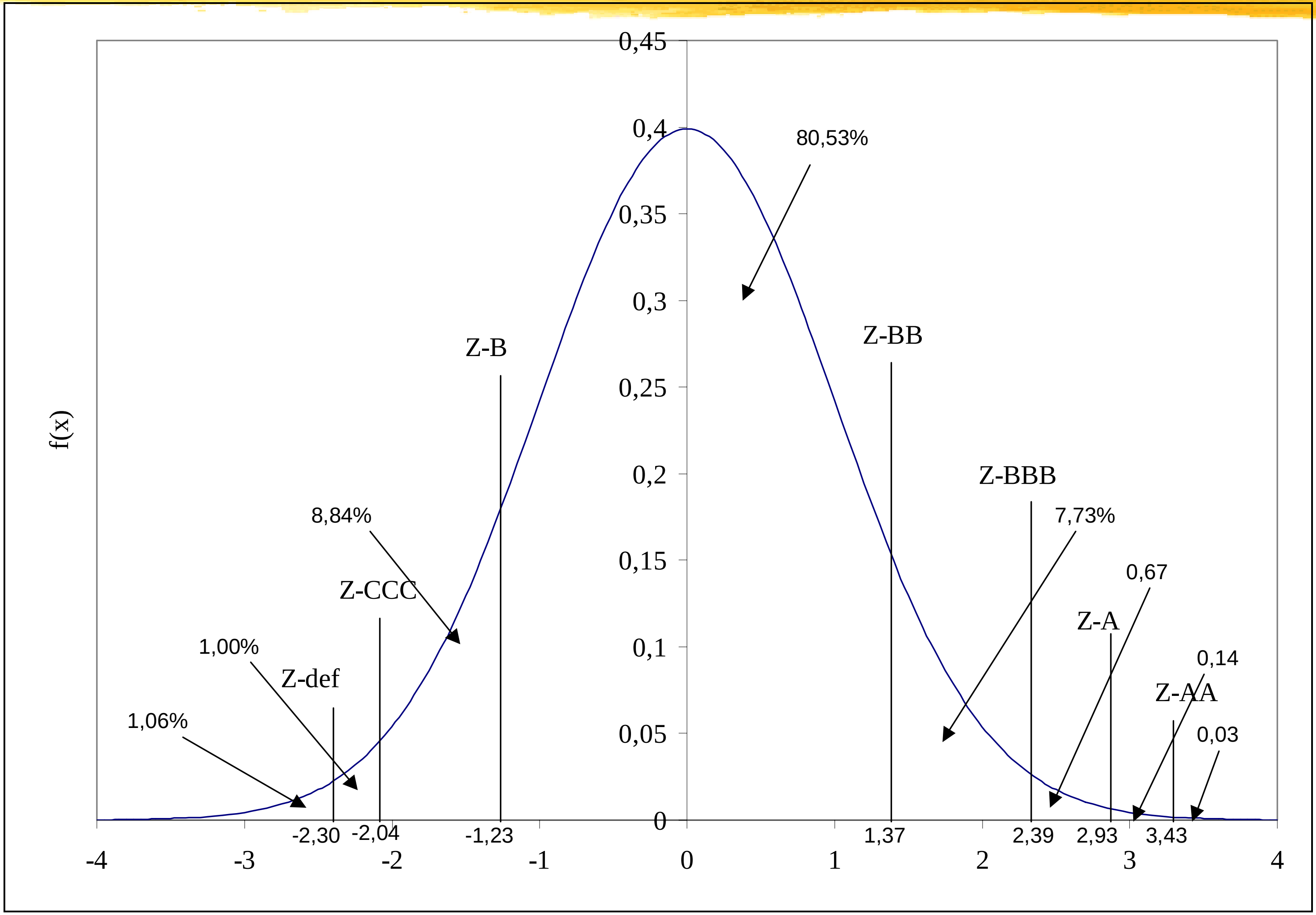
CreditMetrics™

- ✓ *CreditMetrics™* utilizza le correlazioni fra i rendimenti degli indici azionari come *proxy* della correlazione fra i rendimenti delle attività delle imprese debitrici ⇨ approccio alla Merton
- ✓ Hp. implicita: le attività delle imprese sono interamente finanziate da *equity*
- ✓ Nel caso di imprese con una leva finanziaria elevata i rendimenti azionari sono più volatili
- ✓ Le variazioni possibili degli attivi sono fatte corrispondere alle probabilità di migrazione

CreditMetrics™

Es. impresa BB

Figura 3 – La generalizzazione del modello di Merton con le migrazioni



CreditMetrics™

- I valori corrispondenti alla diverse soglie sono ricavati in base alle probabilità di migrazione riportate nella matrice di transizione
- Ogni probabilità di migrazione equivale, graficamente, all’ area sottostante la curva compresa fra due soglie critiche
- La distribuzione standardizzata dei rendimenti del valore dell’attivo deve essere costruita in modo coerente con i dati della matrice di transizione

CreditMetrics™

- Se probabilità BB divenga insolvente = 1,06%, la soglia Z_{def} deve essere tale che:

$$\int_{-\infty}^{Z_{def}} f(x)dx = F(Z_{def}) = 1{,}06\%$$

- Se la probabilità di un *downgrading* a CCC (area compresa fra Z_{def} e Z_{CCC}) è pari all'1%

$$\int_{Z_{def}}^{Z_{CCC}} f(x)dx = F(Z_{CCC}) - F(Z_{def}) = 1\%$$

f(x) = funzione di densità della distribuzione normale standardizzata, *F(x)* = corrispondente funzione di ripartizione

CreditMetrics™

Tabella 8 – Probabilità di migrazione e relative soglie per un'impresa BB

Rating a fine anno	*Probabilità*	*Probabilità cumulate*	*Soglie (Z)*
AAA	0,03%	100,00%	
AA	0,14%	99,97%	3,43
A	0,67%	99,83%	2,93
BBB	7,73%	99,16%	2,39
BB	80,53%	91,43%	1,37
B	8,84%	10,90%	-1,23
CCC	1,00%	2,06%	-2,04
Default	1,06%	1,06%	-2,30

CreditMetrics™

- Stessa logica può essere adottata nel caso di 2 imprese delle quali si conosca il grado di *asset correlation* ipotizzando distribuzione congiunta *asset returns* normale bivariata
- Esempio 2 imprese (rating A e BB) con asset correlation pari a 0,2
  - Probabilità che le 2 imprese conservino, nel corso di un anno, la rispettiva classe di rating

$$\Pr ob\left(-1{,}23 < r_{BB} < 1{,}37, -1{,}51 < r_A < 1{,}98\right) = \int_{-1,23}^{1,37}\int_{-1,51}^{1,98} f(r_{BB}, r_A; \rho)\, dr_{BB}\, dr_A = 73{,}65\%$$

  - Probabilità congiunta di default

$$\Pr ob\left(r_{BB} < -2{,}30, r_A < -3{,}24\right) = \int_{-\infty}^{-2,30}\int_{-\infty}^{-3,24} f(r_{BB}, r_A; \rho)\, dr_{BB}\, dr_A = 0{,}0054\%$$

CreditMetrics™

Tabella 9 – Probabilità di migrazione congiunte di due emittenti con rating A e BB in ipotesi di correlazione fra i rendimenti degli attivi pari al 20% - Valori %

	Emittente A								
Emittente BB	*AAA*	*AA*	*A*	*BBB*	*BB*	*B*	*CCC*	*Default*	*Totale*
AAA	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	*0,03*
AA	0,00	0,01	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	*0,14*
A	0,00	0,04	0,61	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	*0,67*
BBB	0,02	0,35	7,10	0,20	0,02	0,01	0,00	0,00	*7,69*
BB	0,07	1,79	73,65	4,24	0,56	0,18	0,01	0,04	*80,53*
B	0,00	0,08	7,80	0,79	0,13	0,05	0,00	0,01	*8,87*
CCC	0,00	0,01	0,85	0,11	0,02	0,01	0,00	0,00	*1,00*
Default	0,00	0,01	0,90	0,13	0,02	0,01	0,00	0,00	*1,07*
Totale	*0,09*	*2,29*	*91,06*	*5,48*	*0,75*	*0,26*	*0,01*	*0,06*	*100,00*

Fonte: Gupton, Finger e Bhatia (1997).

CreditMetrics™

- Si hanno a questo punto a disposizione due set di dati:
  - la matrice di transizione congiunta (64 casi diversi)
  - il valore che il portafoglio di due titoli avrebbe in ognuno dei possibili eventi (somma dei valori di mercato dei due titoli alla fine dell'anno)
- Si ha dunque a disposizione la distribuzione di probabilità dei valori di mercato, e delle relative variazioni, del portafoglio
- Da questa è possibile ricavare le misure di VaR relative a diversi livelli di confidenza.

CreditMetrics™

- ✓ Questa logica non può essere applicata a un portafoglio di N esposizioni ⇨ soluzione fondata su 2 artifici: (a) fattori di rischio sistematici comuni, (b) simulazioni Monte Carlo

1. Asset returns delle controparti sono determinati da un insieme di fattori di rischio comuni, e da fattori idiosincratici o specifici
   - ⇨ I fattori idiosincratici sono specifici della singola impresa e non contribuiscono a determinare le correlazioni fra i rendimenti degli attivi
   - ⇨ Le correlazioni sono determinate dalla comune dipendenza da alcuni fattori “sistematici”

CreditMetrics™

- Traduzione operativa: il rendimento dei titoli azionari delle controparti in portafoglio è funzione di una o più componenti connesse all’andamento di indici azionari di settore (es. chimico, bancario, automobilistico, ecc.) e di una componente specifica della singola impresa

$$r_j = \beta_{1,j} I_1 + \beta_{2,j} I_2 + \ldots + \beta_{n,j} I_n + \delta_j \varepsilon_j$$

- $I_1, I_2, \ldots I_n$ = fattori comuni (indici di settore/paese)
- ε_j indica la componente di rendimento specifico dell’impresa *j*

CreditMetrics™

Esempio di scomposizione del rendimento degli attivi di 2 imprese

Tabella 10 – La scomposizione per indici geo-settoriali del rendimento azionario di due imprese A e B

Impresa	A	B
Settore/Paese		
USA		-
- Bancario	50%	
- Assicurativo	40%	-
Italia		
- Automobilistico	-	40%
- Bancario-Finanziario	-	25%
Francia		
- Energia	-	20%
Rischio Specifico	10%	15%
Totale	100%	100%

CreditMetrics™

- Esempio: 2 titoli A e B

$$r_A = \beta_{1,A} I_1 + \beta_{2,A} I_2 + \delta_A \varepsilon_A$$

$$r_B = \beta_{3,B} I_3 + \delta_B \varepsilon_B$$

- Poiché la componente specifica è non correlata con gli indici di settore/paese, è possibile stimare la correlazione fra i rendimenti degli attivi dell'impresa A e dell'impresa B

$$\rho_{A,B} = \beta_{1,A} \beta_{3,B} \rho_{1,3} + \beta_{2,A} \beta_{31,B} \rho_{2,3}$$

CreditMetrics™

- Secondo artificio: simulazioni Monte Carlo
  - Utilizzate per generare gli scenari relativi ai rendimenti delle attività delle imprese controparti
  - Scenari generati estraendo valori casuali da una distribuzione normale congiunta coerente con la natura della distribuzione degli attivi delle imprese e con i relativi coefficienti di correlazione
  - Sulla base dei valori estratti viene identificata la classe di rating di ogni impresa e il relativo valore delle esposizioni
  - In questo modo viene in sostanza simulata la migrazione congiunta di più controparti

CreditMetrics™

✓ 6 fasi

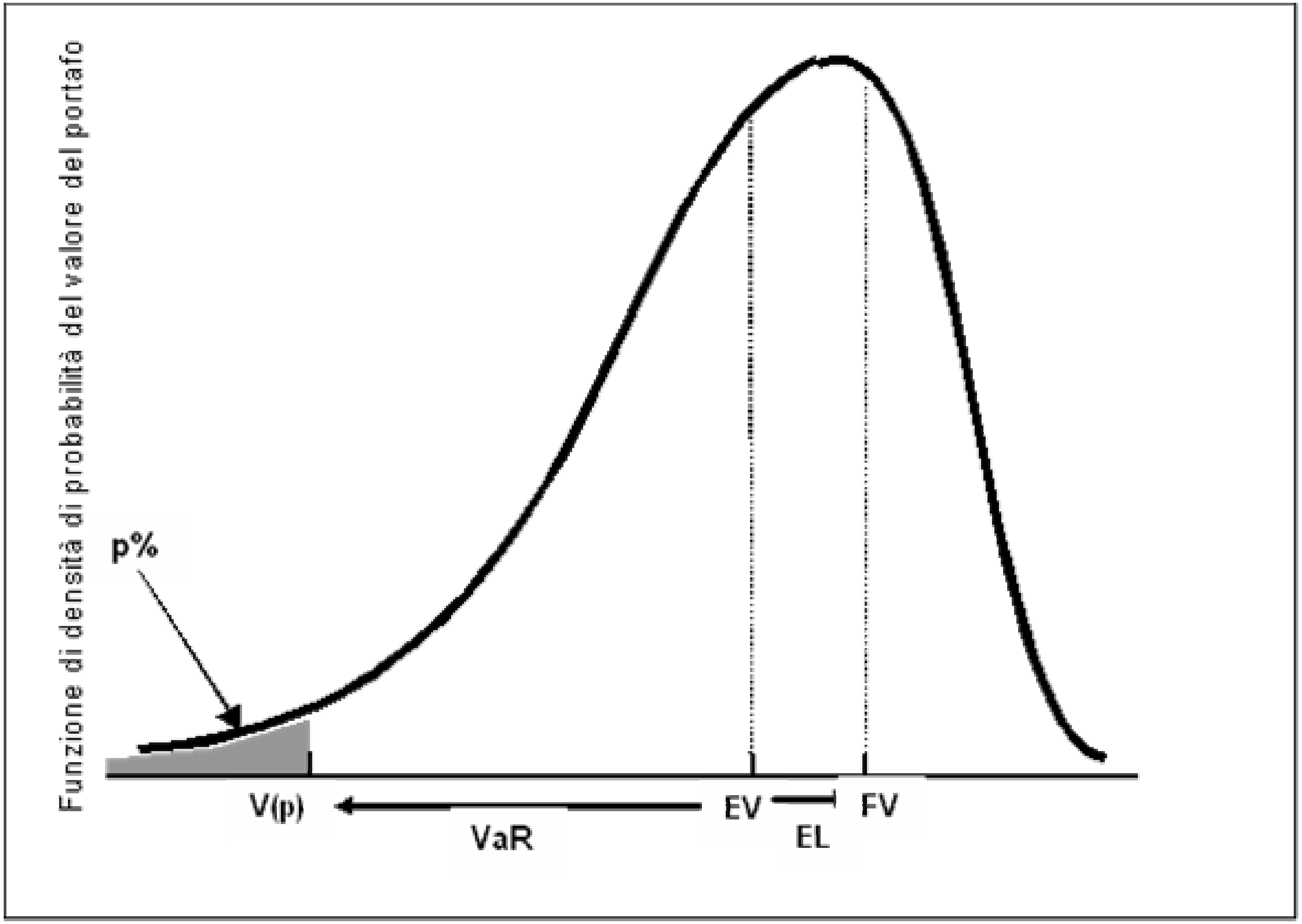
- determinazione valori soglia relativi ai tassi di rendimento dell'attivo
- stima coefficienti di correlazione fra i rendimenti degli attivi relativi a ogni coppia di controparti
- estrazione vettore di *n (num. controparti)* numeri casuali da una distribuzione normale multivariata
- Associazione a ogni controparte di una classe di rating in funzione di valori estratti e soglie critiche
- Rivalutazione di ognuna delle posizioni in portafoglio per ottenere un valore di mercato del portafoglio
- Se ai valori estratti corrisponde l'evento default estrazione casuale del RR da una distribuzione beta con media e dev. std pari a tasso medio e volatilità corrispondente alla relativa *seniority* e *security*

CreditMetrics™

- ✓ Ripetendo il processo descritto un numero sufficientemente elevato di volte si ottiene una intera distribuzione dei possibili valori di mercato del portafoglio
- ✓ Tale distribuzione consente di ricavare misure quali la perdita attesa e il valore a rischio corrispondente a diversi livelli di confidenza

CreditMetrics™

La distribuzione dei valori di mercato del portafoglio



CreditMetrics™

- ✓ Pregi di CreditMetrics™
  - utilizzo di dati di mercato oggettivi e *forward looking* (*curve rendimenti zero-coupon, correlazioni fra indici azionari*)
  - adozione di una logica di valori di mercato
  - anche rischio di migrazione e rischio di recupero
  - pieno riconoscimento della natura asimmetrica della distribuzione dei valori di mercato di un’esposizione
  - possibilità di ottenere anche il *VaR marginale* di una esposizione (differenza fra VaR complessivo del portafoglio e VaR del portafoglio al quale viene sottratta l’esposizione in esame)

CreditMetrics™

- ✓ Limiti di CreditMetrics™
  - Esposizioni di tipo bancario: problema dati relativi a tassi migrazione e curva tassi zero-coupon per classe di rating
  - Ipotesi metodologia CreditMetrics: banca price-taker
  - Ipotesi matrici di transizione stazionarie
  - Assenza di una logica economica che spieghi le migrazioni e il fenomeno dell’insolvenza
  - Ipotesi asset correlations possano essere approssimate da correlazioni fra rendimenti azionari
  - Processo di scomposizione dei rendimenti dei titoli delle controparti arbitrario e discrezionale

PortfolioManager™ (KMV)

Modello di tipo strutturale

- Utilizza come input le EDF
- Supera problema legato all’assenza di una logica economica che spieghi le migrazioni e il fenomeno dell’insolvenza
- Supera problemi connessi a utilizzo matrici di transizione storiche (le matrici di KMV sono più stabili perché rating riflette congiuntura ⇨ point in time)
- Anche qui asset correlations stimate attraverso le correlazioni fra rendimenti azionari

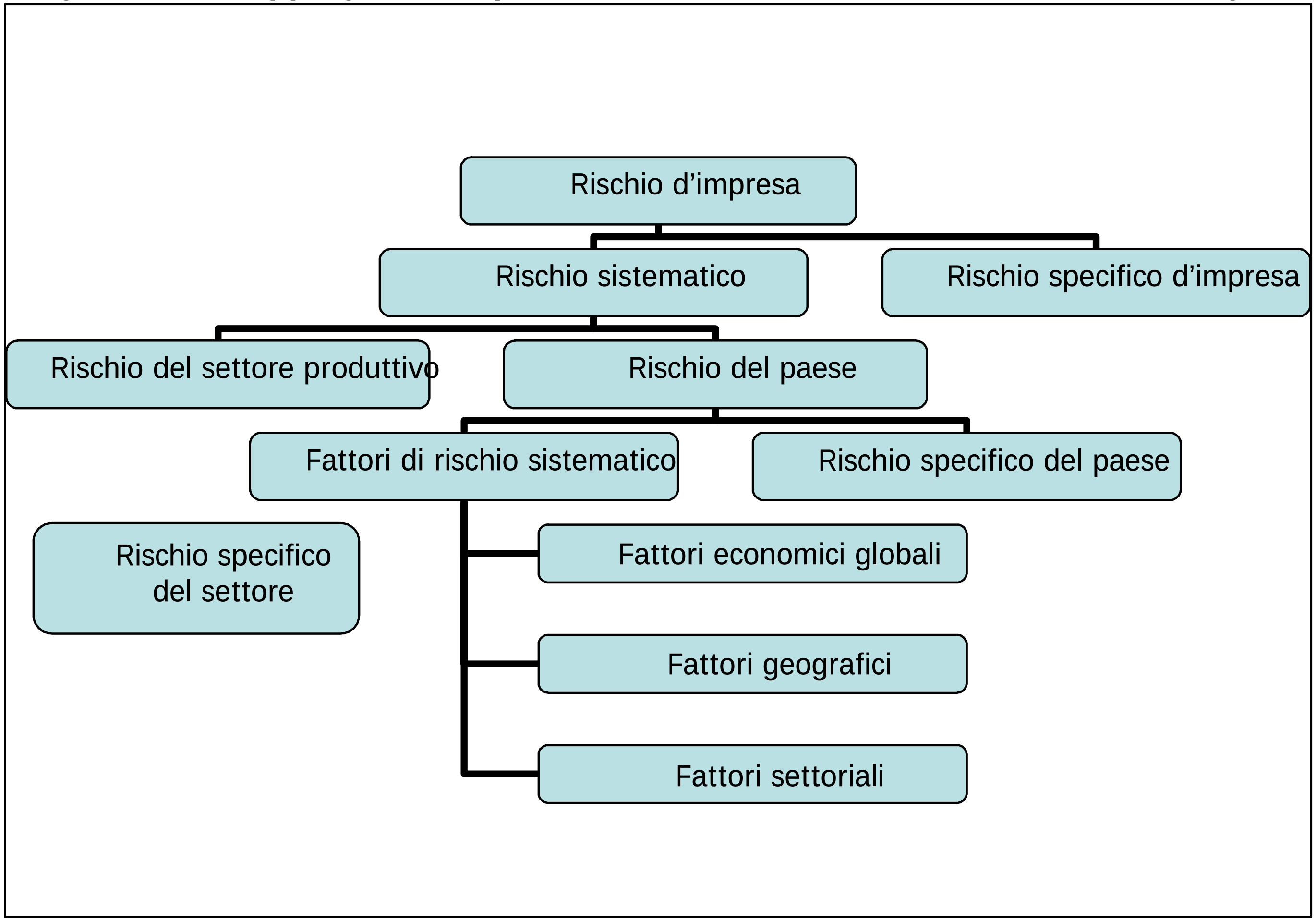
PortfolioManager™ (KMV)

Modello multi-fattoriale a tre fasi distinte:

1. il rendimento del titolo viene distinto in una componente sistematica e in una specifica
2. la componente sistematica viene scomposta in termini di esposizione per settori e paesi
3. il rendimento di ogni settore e paese è a sua volta scomposto in una componente di rischio specifico (*industry-specific risk* e *country specific risk*) e in una componente di rischio sistematico (es. esposizione del paese/settore all'andamento dell'economia globale o della macroregione o del macrosettore di appartenenza)

PortfolioManager™ (KMV)

Figura 5 – Il mapping di un'esposizione creditizia nel modello PortfolioManager™



PortfolioManager™ (KMV)

- ✓ Come in *CreditMetrics™*, la correlazione fra coppie di titoli è ricavabile dalle correlazioni fra indici di mercato
- ✓ Come per *CreditMetrics™*, è possibile mediante simulazioni Monte Carlo ricostruire l'evoluzione del portafoglio negli scenari più sfavorevoli
- ✓ L'analisi può essere svolta sia in termini di tassi di perdita, sia in termini di valori di mercato

CreditPortfolioView™ (Wilson)

Modello econometrico

- ✓ I cicli creditizi seguono quelli economici
  - Fasi recessive: salgono i default e i downgrading, scendono gli upgrading
  - Fasi espansive: scendono i default e gli upgrading, salgono i downgrading
- ✓ Logica: poiché il ciclo economico è spiegato da alcune variabili macro (tassi di interesse, occupazione, crescita PIL, ecc.) ⇨ leghiamo i tassi di migrazione e i tassi di insolvenza alle variabili macro ⇨ tassi “condizionati”

CreditPortfolioView™ (Wilson)

- ✓ La probabilità “condizionata” di insolvenza di un segmento *j* di controparti (insieme di imprese che reagiscono in modo uniforme all’evoluzione del ciclo) al tempo *t* viene modellata secondo una funzione *logit*

$$p_{jt} = \frac{1}{1 + e^{-Yj,t}}$$

- ✓ *Yj,t* rappresenta il valore al tempo *t* di un indice dello “stato di salute” del segmento *j* , funzione delle variabili macro *X*

$$Y_{jt} = \beta_{j,0} + \beta_{j,1} X_{j,1,t} + \beta_{j,2} X_{j,2,t} + \beta_{j,3} X_{j,3,t} + \upsilon_{j,t}$$

CreditPortfolioView™ (Wilson)

- ✓ Ogni fattore macroeconomico ha a sua volta una dinamica spiegata da un processo autoregressivo di secondo ordine

$$X_{j,i,t} = \gamma_{i,0} + \gamma_{i,1} X_{j,i,t-1} + \gamma_{i,2} X_{j,i,t-2} + \varepsilon_{j,i,t}$$

- ✓ Conoscendo il valore dei coefficienti di regressione e delle variabili macroeconomiche rilevanti al tempo *t*, è possibile simulare il valore dell'indice *Yj* al tempo *t*+1 e, tramite quest'ultimo, quello della probabilità di insolvenza condizionata per il segmento *j*

CreditPortfolioView™ (Wilson)

- ✓ I dati relativi alle PD delle classi *speculative grade (speculative default probability* – SDP) vengono utilizzati per costruire delle matrici di transizione "condizionate" ⇨ rapporti fra pd simulate e pd non condizionate (medie storiche)

Tabella 12 – CreditPortolioView: ciclo economico e matrice di transizione

Rapporto	*Fase ciclo economico*	*Probabilità di insolvenza*	*Probabilità downgrading*	*Probabilità upgrading*
$\frac{SDP_t}{\Phi SDP} > 1$	Recessione	Aumento	Aumento	Diminuzione
$\frac{SDP_t}{\Phi SDP} < 1$	Espansione	Diminuzione	Diminuzione	Aumento

CreditPortfolioView™ (Wilson)

Le cinque fasi del modello CreditPortfolioView™

	Fase	*Equazione rilevante*
1	Stima delle variabili macro relative al periodo *t*	$X_{j,i,t} = \gamma_{i,0} + \gamma_{i,1} X_{j,i,t-1} + \gamma_{i,2} X_{j,i,t-2} + \varepsilon_{j,i,t}$
2	Stima dell'indice di "salute" del singolo segmento *j* al tempo *t*	$Y_{jt} = \beta_{j,0} + \beta_{j,1} X_{j,1,t} + \beta_{j,2} X_{j,2,t} + \beta_{j,3} X_{j,3,t} + \upsilon_{j,t}$
3	Stima della probabilità condizionata di insolvenza del segmento *j* al tempo *t*	$p_{jt} = \dfrac{1}{1+e^{-Yj,t}}$
4	Stima del rapporto fra "*speculative default probability*" simulate del periodo *t* e probabilità di insolvenza medie	$\dfrac{SDP_t}{\Phi SDP}$
5	Correzione della matrice di transizione	

CreditPortfolioView™ (Wilson)

Pregi di CreditPortfolioView™

- ✓ Identifica relazioni causa-effetto alla base dell'evoluzione del rischio di portafoglio
- ✓ Identifica relazioni sottostanti a correlazioni fra settori/aree geografiche (sensibilità a fattori macro comuni) e agevola politica composizione portafoglio

Limiti di CreditPortfolioView™

- ✓ necessità ampia base dati storici (tassi di insolvenza relativi a settori produttivi e aree geografiche)
- ✓ criterio adottato per la correzione della matrice di transizione sulla base dello stato del ciclo economico

CreditRisk+ (CSFP)

Approccio attuariale di tipo assicurativo

- ✓ Perdite assicurative ⇨ 2 variabili rilevanti
  - \- frequenza danni
  - \- importo risarcimenti(*loss severity*)
- ✓ Perdite su crediti bancari
  - \- frequenza insolvenze (PD)
  - \- perdite in caso di insolvenza (LGD)
- ✓ In CreditRisk+ i tassi di insolvenza e di perdita sono degli input (no modello strutturale)
- ✓ Il modello si concentra solo sul rischio default

CreditRisk+ (CSFP)

Un modello a 2 fasi

Input	Tassi di insolvenza storici Volatilità tassi di insolvenza		Esposizioni Tassi di recupero
	⇩		⇩
Prima fase	Frequenza insolvenze		*Esposizioni al netto dei tassi di recuero (loss severity)*
Seconda fase		Distribuzione delle perdite da insolvenza	

CreditRisk+ (CSFP)

Hp:

- ✓ la PD di un singolo debitore è contenuta
- ✓ gli eventi insolvenza sono indipendenti
- ✓ il n. di insolvenze in un periodo è indipendente dal n. di insolvenze del periodo precedente

⇨ la distribuzione di probabilità del n. di insolvenze in un periodo è rappresentata da una *Poisson*

$$p(n) = \frac{e^{-\mu}\mu^{n}}{n!}$$

μ = media storica del n. di insolvenze

$\sqrt{\mu}$ = deviazione standard

CreditRisk+ (CSFP)

Esempio:

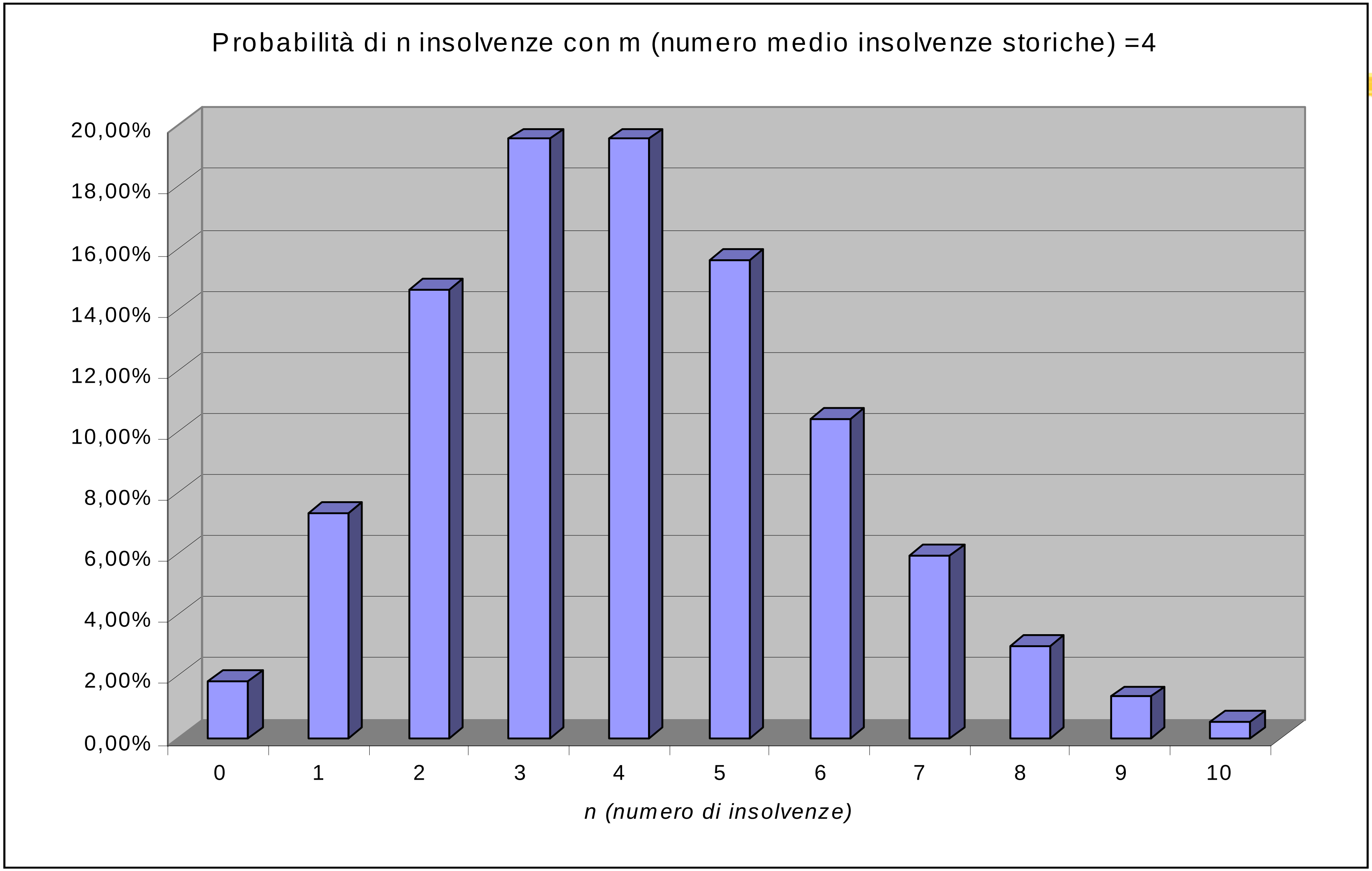
- ✓ media storica n. insolvenze = 4

$$\Pr(0) = \frac{e^{-4}4^{0}}{0!} = 1{,}83\%$$

$$\Pr(4) = \frac{e^{-4}4^{4}}{4!} = 19{,}54\%$$

- ✓ In questo modo è possibile ricostruire la distribuzione di probabilità del n. di insolvenze

CreditRisk+ (CSFP)



Un esempio

Esempio con tre crediti

i	*Debitore*	*Probabilità di default (p_i)*
1	Rossi	1%
2	Bianchi	2%
3	Verdi	0.5%
	N. di default attesi (μ):	0.035

(segue) Un esempio

$$p(0) = \frac{e^{-0,035} 0,035^0}{0!} = e^{-0,035} = 96,56\%$$

$$p(1) = \frac{e^{-0,035} 0,035^1}{1!} = 0,035 e^{-0,035} = 3,38\%$$

$$p(2) = 0,059\% \qquad p(3) = 0,001\%$$

N.b.: la “comodità” è stata pagata con l’approssimazione

- Questa $p(n)$ restituisce valori non nulli anche per $n > 3$
- Come detto, la qualità dell’approssimazione declina se le p_i non sono piccole
- Vediamo entrambi questi limiti con un altro esempio

Un altro esempio:

Esempio di cattiva approssimazione

	Probabilità di default dei singoli debitori	
Rossi	25.0%	
Bianchi	50.0%	
Verdi	12.5%	
	Probabilità di assistere a n default	
	Stimate	*Vere*
0	41.7%	32.8%
1	36.5%	48.4%
2	16.0%	17.2%
3	4.7%	1.6%

Un altro esempio:

Esempio di cattiva approssimazione

	Probabilità di default dei singoli debitori		
Rossi	25.0%		
Bianchi	50.0%		
Verdi	12.5%		
	Probabilità di assistere a n default		
	Stimate		*Vere*
0	41.7%	>>	32.8%
1	36.5%	<<	48.4%
2	16.0%		17.2%
3	4.7%	>	1.6%

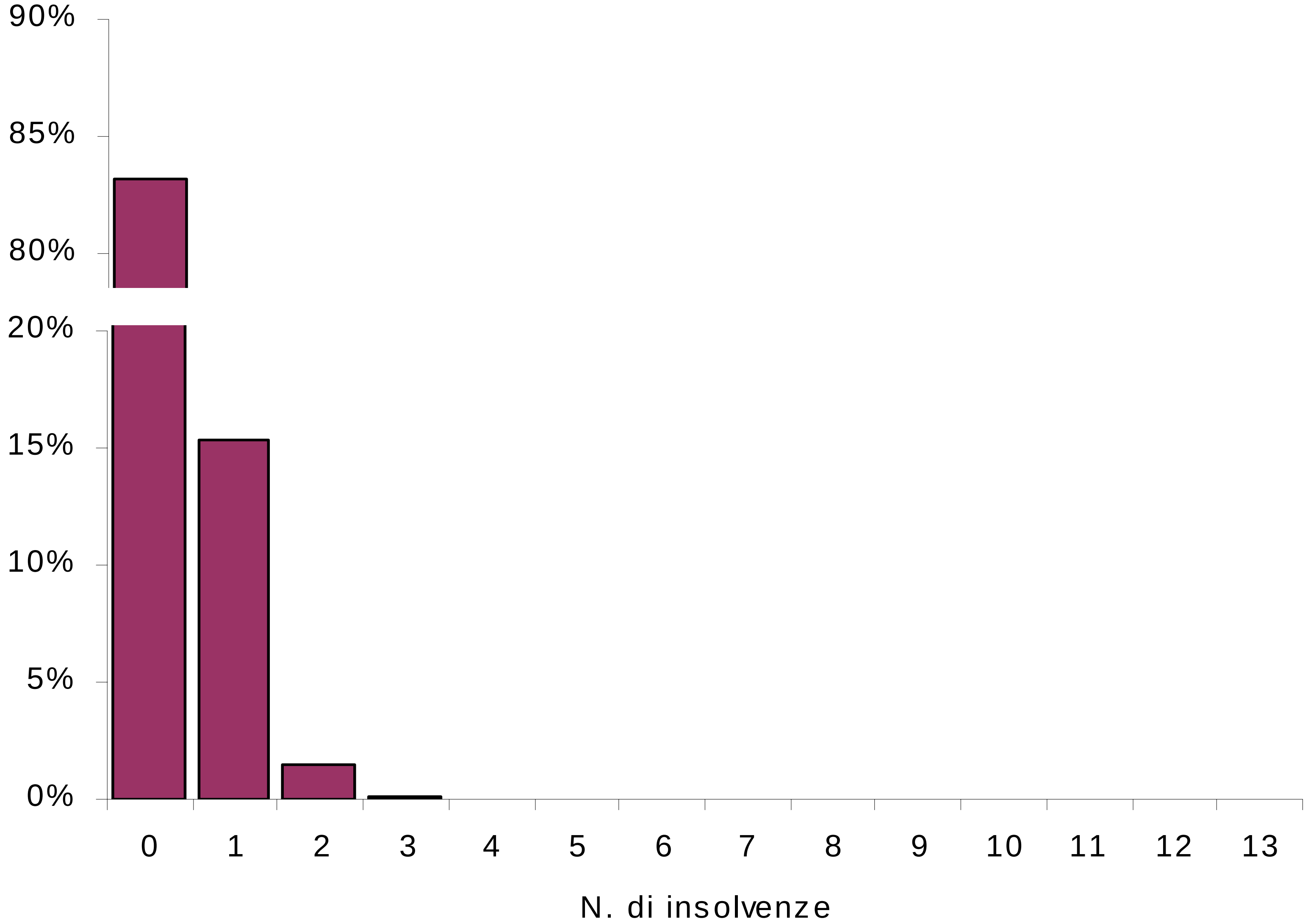
98,7%

Sovrastima gli estremi

Un esempio più realistico

i	*Debitore*	*Probabilità di default (p_i)*
1	Rossi	1%
2	Bianchi	2%
3	Verdi	0.50%
4	Gialli	2%
5	Neri	1%
6	Mori	1%
7	Grossi	1%
8	Piccoli	2%
9	Astuti	2.50%
10	Codardi	2%
11	Stupazzoni	0.50%
12	Molinari	2%
13	Vasari	1%
	N. di default attesi (μ):	0.1850

Risultati dell'esempio:



CreditRisk+ (CSFP)

✓ Dalla distribuzione del n. di insolvenze a quella delle perdite ⇨ *CreditRisk+*™ adotta 2 artifici

1. *Esposizioni nette*: ogni esposizione è considerata al netto del tasso di recupero

$$EN = EL \cdot \left(1 - RR\right) = LGD$$

2. *Banding*: aggregazione di tutte le esposizioni che presentano una valore netto simile ⇨ ogni fascia viene trattata dal modello come un portafoglio a sé stante di prestiti caratterizzati da esposizioni nette equivalenti

CreditRisk+ (CSFP)

Esempio di aggregazione per fasce (banding) in CreditRisk+ ™

Impresa	*Esposizione netta (LGD)*	*Esposizione netta (multiplo di Euro 10.000)*	*Esposizione arrotondata*	*Fascia (j)*
1	240.000	24	24	24
2	36.000	3,6	4	4
3	18.000	1,8	2	2
4	430.000	43	43	43
5	63.000	6,3	6	6
6	780.000	78	78	78
7	72.000	7,2	7	7
8	13.000	1,3	1	1
9	81.000	8,1	8	8
10	540.000	54	54	54

La distribuzione delle perdite di ogni fascia *j* è dunque data dal prodotto fra il n. di insolvenze e l'importo dell'esposizione netta della stessa fascia *j*

CreditRisk+ (CSFP)

VaR(99%)

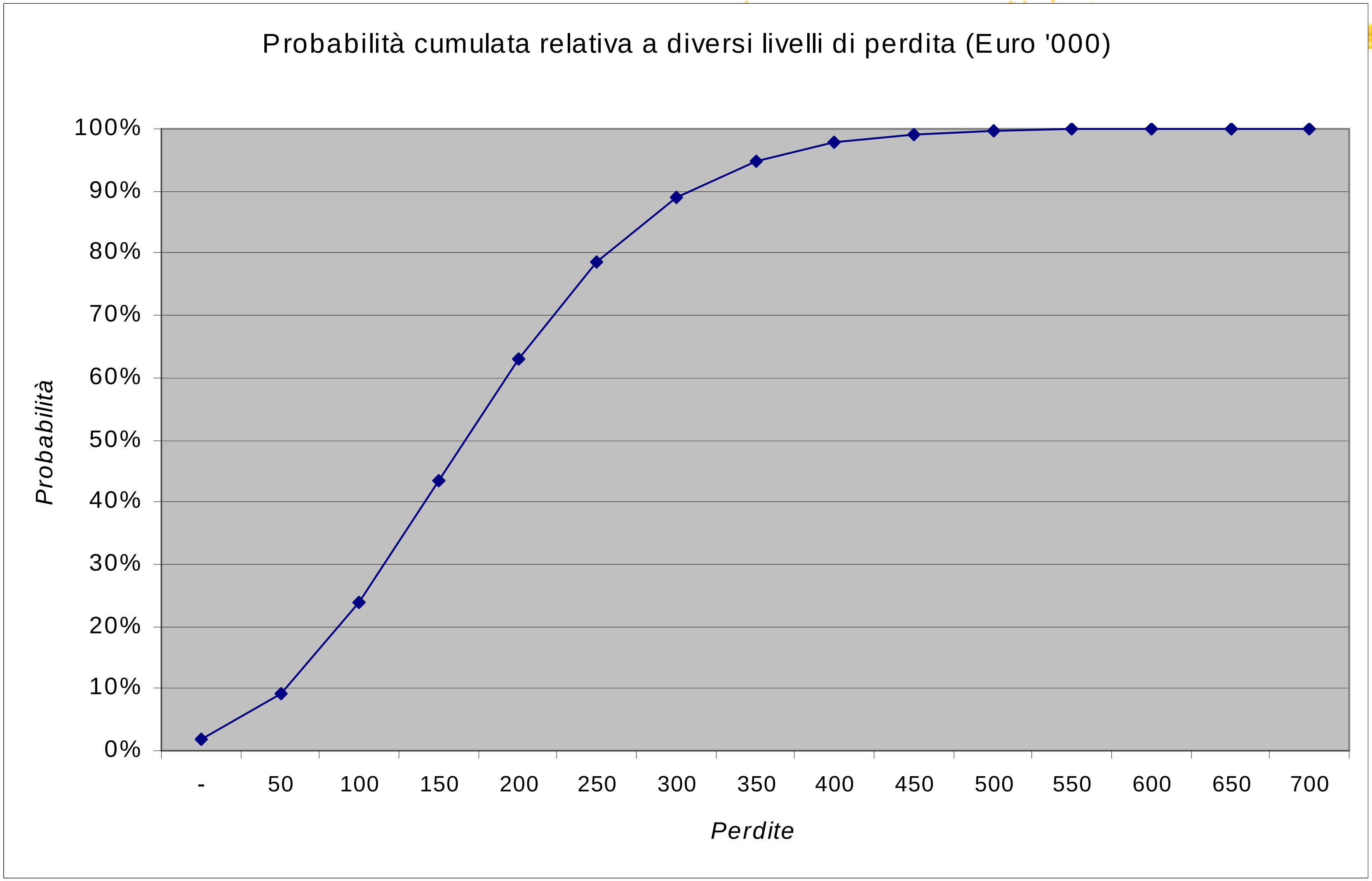
$$\Pr ob(perdita > 450.000) = (1 - 99{,}19\%) = 0{,}81\%$$

La distribuzione delle perdite relativa alla fascia j (L = Euro 50.000) $(\mu = 4\%)$

Numero di insolvenze (n)	*Probabilità che si verifichino n insolvenze (%)*	*Probabilità cumulata (%)*	*Perdita (Euro '000)*
0	1,83	1,83	-
1	7,33	9,16	50
2	14,65	23,81	100
3	19,54	43,35	150
4	19,54	62,88	200
5	15,63	78,51	250
6	10,42	88,93	300
7	5,95	94,89	350
8	2,98	97,86	400
9	1,32	99,19	450
10	0,53	99,72	500
11	0,19	99,91	550
12	0,06	99,97	600
13	0,02	99,99	650
14	0,01	100,00	700

CreditRisk+ (CSFP)

La distribuzione di probabilit àd elle perdite



Ogni banda è un mini-portafoglio con perdite proporzionali ai default

$$p(n) = \frac{e^{-\mu_j} \mu_j^n}{n!}$$

probabilità di assistere a n default nella j-esima banda, ovvero ad n perdite di ammontare vjL, ovvero a una perdita di ammontare nv_jL

Oppure, che è lo stesso:

$$p(nv_j) = \frac{e^{-\mu_j} \mu_j^n}{n!}$$

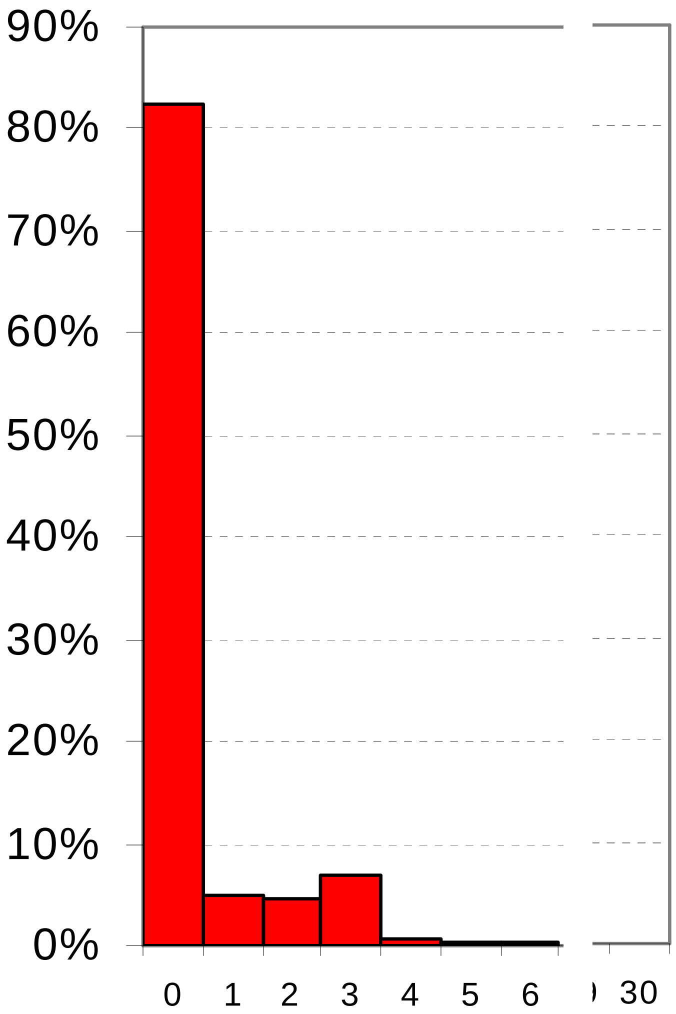
probabilità associata ad un numero nv_j di perdite, ognuna di ammontare L, provenienti dalla banda j

Per ottenere la distribuzione delle perdite devo combinare queste *p*

- Perché? Pensiamo ad esempio a una perdita di 120.000 euro (12L). Deriva da
  - 12 insolvenze in banda 1
  - 6 insolvenze in banda 2
  - 4 insolvenze in banda 3
  - 2 insolvenze in banda 6...
- Tutti questi casi devono essere combinati tra loro per ottenere la probabilità di perdita di 120.000 euro non in una singola banda, ma nell'intero portafoglio
- Ciò viene fatto combinando tra loro funzioni di Poisson (la fgp del portafoglio-somma è la produttoria delle singole fgp)

Nel nostro esempio si ottiene:

	Perdita (nL)	*Probabilità*
0	-	82.41%
1	10,000	4.90%
2	20,000	4.44%
3	30,000	7.01%
4	40,000	0.52%
5	50,000	0.37%
6	60,000	0.30%
7	70,000	0.03%
8	80,000	0.02%
9	90,000	0.01%
10	100,000	0.00%
…	…	…
30	300,000	0.00%



La correlazione tra crediti

- Abbiamo costruito la distribuzione delle perdite future in modo relativamente indolore, ipotizzando crediti incorrelati
- Vediamo ora come introdurre nel modello la correlazione tra crediti

La correlazione tra crediti: i suoi effetti

- La distribuzione di Poisson ha deviazione standard: $\sqrt{\mu}$
  - Ad esempio, per la classe B: $\sqrt{7,62} = 2,76$
- In realtà, l'andamento dei tassi di default osservati nel tempo denota una maggiore incertezza

	Tassi di insolvenza annui	
Classe di rating	*Media (%)*	*Deviazione standard (%)*
Aaa	0,00	0,0
Aa	0,03	0,1
A	0,01	0,0
Baa	0,13	0,3
Ba	1,42	1,3
B	7,62	5,1

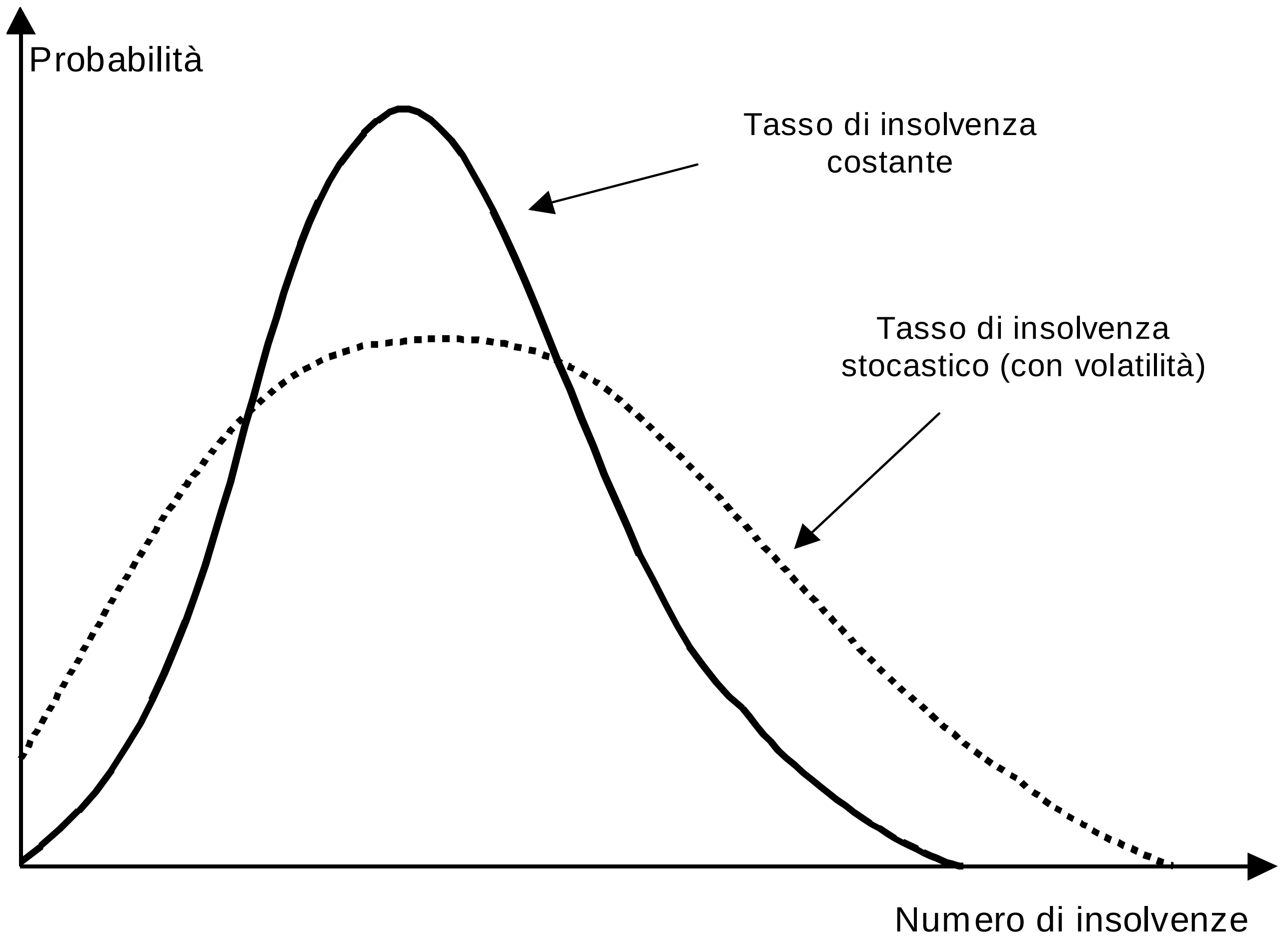
La correlazione tra crediti: come incorporarla nel modello

- Si introduce l'ipotesi che la stessa media della distribuzione di Poisson, ossia il numero medio di insolvenze, sia una variabile aleatoria

$$\mu = \tilde{\mu} = \sum_i \tilde{p}_i$$

- Logica: il numero medio di insolvenze relativo a un anno non è noto con certezza ma varia anch'esso nel tempo
- Si ottiene così un risultato più coerente con l'osservazione empirica e si recupera nel modello la correlazione, dovuta alla dipendenza dei singoli dal ciclo economico

Tasso di insolvenza stocastico: effetti per il rischio complessivo



Nella distribuzione finale il rischio è maggiore:

- Rispetto al caso in cui le probabilità di default sono note a priori ora le fonti di rischio sono due:
  - Rossi & C. andranno davvero in default?
  - E prima ancora, che probabilità hanno di andarci?
  - Gli eventi estremi sono più probabili
- Vista in un altro modo: ora c'è correlazione tra Rossi, Bianchi, Verdi & C.
  - La diversificazione di portafoglio funziona meno

Un esempio bonsai:

Probabilità di default di due debitori in due possibili stati del mondo

(a) Espansione				
			Bianchi	
		Fallisce	*Non fallisce*	*Totale*
Rossi	*Fallisce*	0.08%	1.92%	2%
	Non fallisce	3.92%	94.08%	98%
	Totale	4%	96%	100%
(b) Recessione				
			Bianchi	
		Fallisce	*Non fallisce*	*Totale*
Rossi	*Fallisce*	0.60%	5.40%	6%
	Non fallisce	9.40%	84.60%	94%
	Totale	10%	90%	100%

Distribuzione non condizionale:

		Bianchi		
		Fallisce	*Non fallisce*	*Totale*
Rossi	*Fallisce*	0.34%	3.66%	4%
	Non fallisce	6.66%	89.34%	96%
	Totale	7%	93%	100%

0,34% > 7% x 4% (0,28%)

ρ **> 1%**

CreditRisk+ (CSFP)

- Pregi del modello
  - semplicità input: PD + esposizioni nette (no matrici di transizione, correlazioni, scomposizioni esposizioni)
  - soluzione analitica: possibilità di ricavare la distribuzione delle perdite del portafoglio senza bisogno di ricorrere a tecniche di simulazione
- Limiti del modello
  - ipotesi indipendenza fra eventi di insolvenza
  - concentrazione sul solo rischio insolvenza ⇨ no rischio migrazione
  - ipotesi di costanza delle esposizioni ⇨ non rischio recupero

CreditPricing

- Processo Markoviano
  - Ipotesi di indipendenza seriale delle migrazioni
  - Un soggetto BBB che “viene” da A ha la stessa probabilità a 1 anno di migrare in BB di un soggetto BBB che era già tale alla fine dell’anno precedente
  - E’ vero? Dipende in parte dal modo in cui viene assegnato il rating

CreditPricing

Processo di attribuzione del rating	Point in time	Through the cycle
Tassi di default	Stabili	Instabili
Tassi di migrazione	Elevati	Bassi

CreditPricing

Tassi di permanenza in classe (1 anno)

Moody's		KMV	
Aaa	92.18	1 (AAA)	66.26
Aa	91.62	2 (AA)	43.04
A	91.36	3 (A)	44.19
Baa	89.16	4 (BBB)	42.54
Ba	87.08	5 (BB)	44.41
B	85.20	6 (B)	53.00
Caa-C	78.30	7 (CCC)	69.94

CreditPricing

- Da matrice di transizione a 1 anno e LGD:
  - Probabilità di migrazione
  - Tassi di insolvenza marginali, cumulati e annualizzati
  - Tassi di perdita attesi marginali, cumulati e annualizzati

$$ECL_{j,t-1} = \sum_{i=1}^{N} {}_{j}MR_{i} \cdot CLR_{i,t-1}$$

CreditPricing

- Perdita inattesa
  - Esposizioni fino a 1 anno ⇨ approccio binomiale

$$UL = \sqrt{PD \cdot (1 - PD)(LGD)^2 + PD \cdot \sigma_{LGD}^2}$$

  - Esposizione con scadenza > 1 anno ⇨ deviazione standard delle perdite cumulate

$$UL_{j,t} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} {}_{j}MR_{i,1} \cdot \left(CLR_{i,t-1} - ECLR_{j,t-1}\right)^2}$$

CreditPricing

Calcolo della perdita inattesa di un impiego di *classe 3* a **dieci anni**

$$UL_{3,10} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} {}_3MR_{i,1} \cdot \left(CLR_{i,9} - ECLR_{3,9}\right)^2}$$

Perdita inattesa

N° classi rating

Probabilità di migrazione ad 1 anno dalla classe 3 alla classe i

Perdita attesa cumulata a nove anni di un soggetto di classe i

Perdita attesa cumulata a 9 anni di un soggetto di classe 3

CreditPricing

- Per considerare anche il rischio di recupero occorre introdurre anche la variabilità di LGD

$$UL_{j,t} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} {}_{j}MR_{i,1} \cdot \left(CLR_{i,t-1} - ECLR_{j,t-1}\right)^2 + CDR_{j,t}^2 \cdot \sigma_{LGD}^2 + \sum_{i=1}^{N} {}_{j}MR_{i,1} \cdot \left(CDR_{i,t-1} - ECDR_{j,t-1}\right)^2 \cdot \sigma_{LGD}^2}$$

- LGD è comunque ipotizzata indipendente da PD

CreditPricing

- Il VaR di una esposizione è ottenuto ipotizzando che la distribuzione dei tassi di perdita sia assimilabile a una beta con:
  - media pari alla perdita attesa cumulata
  - deviazione standard pari alla perdita inattesa
  - livello di confidenza determinato dal rating della banca banca

⇩

Beta: distribuzione asimmetrica con asimmetria tanto maggiore quanto minore è la media ⇨ coerente con natura distribuzione perdite

CreditPricing

- Dalla distribuzione beta è possibile ricavare un Capital Multiplier α che consente di passare da UL a VaR

$$VaR = \alpha \cdot UL$$

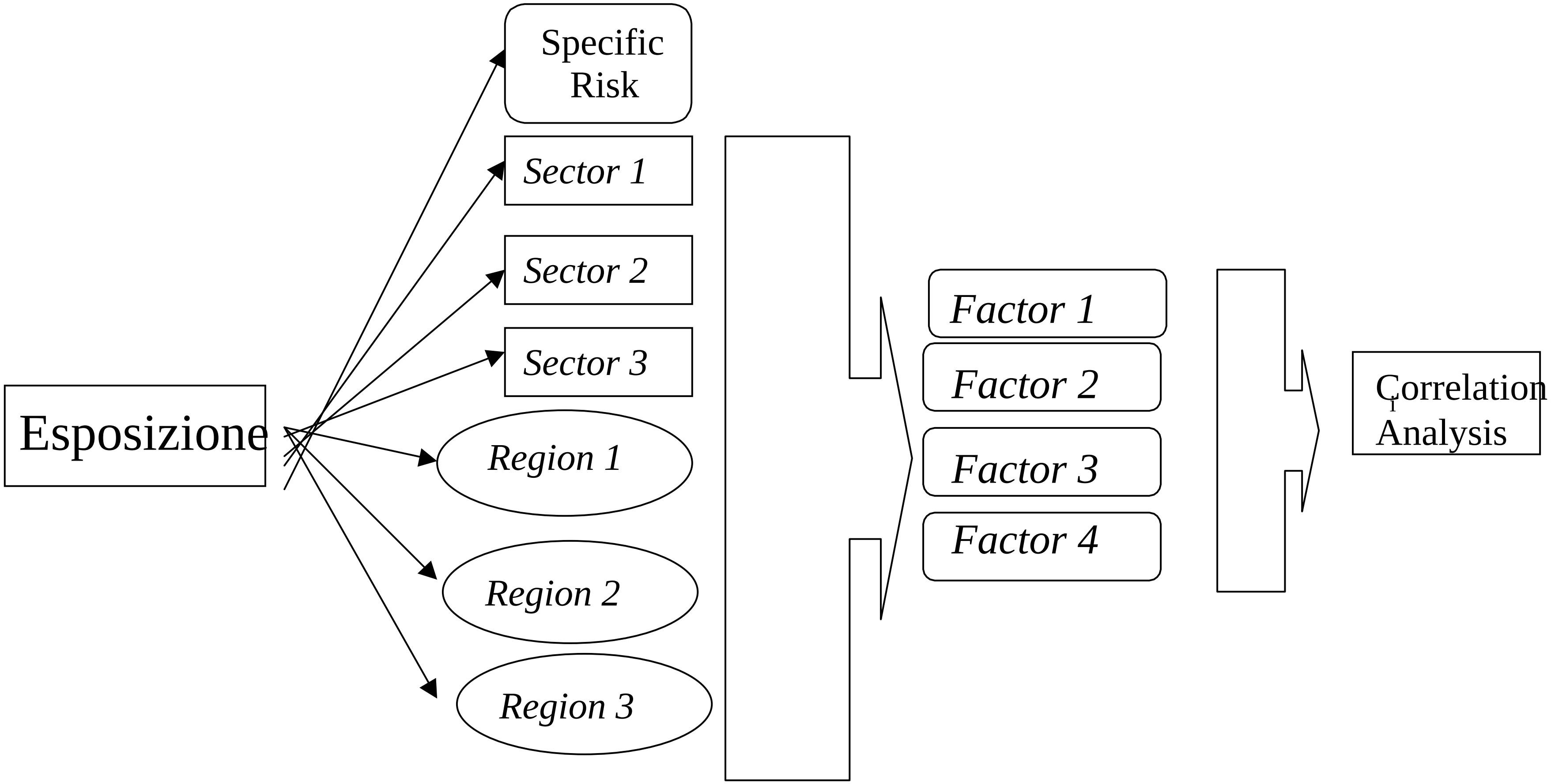
- I valori dei capital multiplier sono maggiori di quelli propri di una distribuzione normale

CreditPricing

- Dal VaR individuale al VaR di portafoglio
  - *Mapping*: le esposizioni vengono ricondotte a cluster geo-settoriali
  - Le correlazioni fra tassi di default dei cluster vengono utilizzate per stimare il VaR portaf.

$$VaR_P = \alpha \cdot \left[EAR_1, EAR_2, EAR_{3,} \ldots EAR_N \right] \times \begin{bmatrix} \rho_{1,1}, \rho_{1,2}, \rho_{1,3}, \ldots\ldots\ldots \rho_{1,N} \\ \rho_{2,1}, \rho_{2,2}, \rho_{2,3}, \ldots\ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \rho_{N,1}, \rho_{N,2}, \rho_{N,3}, \ldots \rho_{N,N} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} EAR_1 \\ EAR_2 \\ EAR_3 \\ . \\ . \\ EAR_N \end{bmatrix}$$

CreditPricing



Un’analisi comparata

- Default Mode versus Multistato
- A tassi di perdita versus a valori di mercato (Mark to Market)
- Unconditional versus conditional (tassi default & migrazione storici vs corretti per ciclo economico)
- Soluzione analitica vs simulazioni

Un’analisi comparata

Default Mode (DM)

- Due stati (default vs. no default)
- Perdite solo se insolvenza (no migrazioni)
- Il valore non cambia se non vi è default

Mark to market (MTM)

- Multistato (es. classi di rating)
- Il peggioramento del merito di credito prima della scadenza viene considerato
- Valori di mercato basati su spread di mercato

Un’analisi comparata

Conditional vs. unconditional?

Dipende dal rating assignment

Se i raters basano le valutazioni anche su informazioni relative a evoluzione settori e ciclo economico, condizionare i tassi di default e di migrazione equivale a considerare le stesse due informazioni

Un’analisi comparata

Soluzione analitica vs. Simulazioni

1. Forma analitica: si ipotizza una distribuzione nota asimmetrica e *fat-tailed* (perdite o valori di mercato (es. beta) per stimare il VaR

⇨ più accurato per applicazioni “micro” relativi a singola esposizione (*pricing*, ex-ante RAPM, etc.)

2. Simulazioni: si utilizzano simulazioni Monte Carlo per costruire una distribuzione e isolare il percentile desiderato ⇨ più accurato a livello di portafoglio (portfolio VaR, capital allocation, etc.)

Stadi evolutivi modelli CreditVaR

1. Default mode (DM) puro

2. DM con variabilità tassi di recupero

3. Multistato con rischio recupero e migrazioni quando la scadenza è > 1 anno

4. MTM con migrazioni + variazioni spread

Problemi aperti modelli CreditVaR

- Ipotesi indipendenza fra PD e LGD
- Ipotesi indipendenza fra EAD e PD ⇨ esempio esposizione connessa a derivati OTC
- Ipotesi indipendenza rischio credito - rischi di mercato (es. variazione tassi - migrazioni per corporate bond) ⇨ il livello dei tassi è una variabile deterministica
- Difficoltà back-testing