Università "Carlo Cattaneo"
Ingegneria gestionale
Analisi matematica
a.a. 2016/2017

EQUAZIONI DIFFERENZIALI 2

ESERCIZI CON SOLUZIONE

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{1}{t}y - \dfrac{2}{t^2}y^2 \\ \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

L'equazione differenziale associata al problema è di Bernoulli:

$$y' + \frac{1}{t}y = -\frac{2}{t^2}y^2$$

con la condizione di esistenza $t \neq 0$.
Dividendo per y^2 (con $y \neq 0$) si ottiene:

$$y^{-2}y' + \frac{1}{t}y^{-1} = -\frac{2}{t^2}$$

Ponendo $y^{-1} = u$, $-y^{-2}y' = u'$, quindi l'equazione differenziale diventa:

$$-u' + \frac{1}{t}u = -\frac{2}{t^2}$$

$$u' - \frac{1}{t}u = \frac{2}{t^2}$$

ovvero una equazione lineare del primo ordine, il cui interale generale è dato da

$$u(t) = e^{-\int -\frac{1}{t}dt}\left[\int \frac{2}{t^2}e^{\int -\frac{1}{t}dt}dt + c\right]$$

$$u(t) = e^{\ln|t|}\left[\int \frac{2}{t^2}e^{-\ln|t|}dt + c\right]$$

Poiché la soluzione va cercata in un intorno di $t = 1$ si ha $t > 0$:

$$u(t) = e^{\ln t}\left[\int \frac{2}{t^2}e^{-\ln t}dt + c\right]$$

$$u(t) = t\left[\int \frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{t}dt + c\right]$$

$$u(t) = t\left[\int \frac{2}{t^3}dt + c\right]$$

$$u(t) = t\left[-\frac{1}{t^2} + c\right]$$

$$u(t) = -\frac{1}{t} + ct$$

Poiché $y^{-1} = u$, ha $y = \frac{1}{u}$, quindi:

$$y(t) = \frac{1}{-\frac{1}{t} + ct}$$

Imponendo la condizione di Cauchy si ottiene:

$$2 = \frac{1}{-1+c}$$
da cui
$$c = \frac{3}{2}$$
Quindi la soluzione è data da:
$$y(t) = \frac{1}{-\frac{1}{t} + \frac{3}{2}t}$$

Osserviamo che per $y = 0$ si ottiene una soluzione particolare dell'equazione differenziale che non è soluzione del problema di Cauchy.

2. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = -\dfrac{1+t}{2t}y + \dfrac{e^t}{2ty} \\ \\ y(1) = \sqrt{e} \end{cases}$$

L'equazione differenziale è di Bernoulli:
$$y' + \frac{1+t}{2t}y = \frac{e^t}{2t} \cdot y^{-1}$$
con la condizione di esistenza $t \neq 0$ e $y \neq 0$.
Dividendo per y^{-1} (che per condizioni di dominio è non nullo) si ottiene:
$$yy' + \frac{1+t}{2t}y^2 = \frac{e^t}{2t}$$

Ponendo $y^2 = u$, $2yy' = u'$, quindi l'equazione differenziale diventa:
$$\frac{1}{2}u' + \frac{1+t}{2t}u = \frac{e^t}{2t}$$
$$u' + \frac{1+t}{t}u = \frac{e^t}{t}$$
ovvero una equazione lineare del primo ordine, il cui interale generale è dato da
$$u(t) = e^{-\int \frac{1+t}{t}dt}\left[\int \frac{e^t}{t} e^{\int \frac{1+t}{t}dt} dt + c\right]$$
$$u(t) = e^{-\int \left(\frac{1}{t}+1\right)dt}\left[\int \frac{e^t}{t} e^{\int \left(\frac{1}{t}+1\right)dt} dt + c\right]$$
$$u(t) = e^{-\ln|t|-t}\left[\int \frac{e^t}{t} e^{\ln|t|+t} dt + c\right]$$
Poiché la soluzione va cercata in un intorno di $t = 1$ si ha $t > 0$
$$u(t) = e^{-\ln t - t}\left[\int \frac{e^t}{t} e^{\ln t + t} dt + c\right]$$
$$u(t) = \frac{1}{t}e^{-t}\left[\int \frac{e^t}{t} te^t dt + c\right]$$
$$u(t) = \frac{1}{t}e^{-t}\left[\int e^{2t}\, dt + c\right]$$
$$u(t) = \frac{1}{t}e^{-t}\left[\frac{1}{2}e^{2t} + c\right]$$

$$u(t) = \frac{1}{2t}e^t + \frac{c}{t}e^{-t}$$

Poiché $y^2 = u$, ha $y = \sqrt{u}$ (consideriamo la soluzione positiva in quanto la soluzione esite in un intorno di $y = \sqrt{e}$), quindi:

$$y(t) = \sqrt{\frac{1}{2t}e^t + \frac{c}{t}e^{-t}}$$

Imponendo la condizione di Cauchy si ottiene:

$$\sqrt{e} = \sqrt{\frac{e}{2} + \frac{c}{e}}$$

$$e = \frac{e}{2} + \frac{c}{e}$$

$$\frac{e}{2} = \frac{c}{e}$$

da cui

$$c = \frac{e^2}{2}$$

Quindi la soluzione è data da:

$$y(t) = \sqrt{\frac{1}{2t}e^t + \frac{e^2}{2t}e^{-t}}$$

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y'' - 3y' + y = 0 \\ y'(1) = 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

L'equazione differenziale è del secondo ordine omogenea a coefficienti costanti:

$$2y'' - 3y' + y = 0$$

il polinomio caratteristico associato risulta

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

che ammette autovalori $\lambda = 1$ e $\lambda = \frac{1}{2}$.

Dunque l'integrale generale è dato da:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{\frac{1}{2}t}$$

Imponendo le due condizioni si ottiene:

$$2 = c_1 e + c_2 e^{\frac{1}{2}}$$

e, poiché $y'(t) = c_1 e^t + \frac{1}{2}c_2 e^{\frac{1}{2}t}$, si ha

$$1 = c_1 e + \frac{1}{2}c_2 e^{\frac{1}{2}}$$

da cui

$$\begin{cases} 2 = c_1 e + c_2 e^{\frac{1}{2}} \\ 1 = c_1 e + \frac{1}{2}c_2 e^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ \\ c_2 = 2e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Quindi la soluzione è data da:

$$y(t) = 2e^{\frac{t-1}{2}}$$

4. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' + 2y = 3t - t^2$ passante per (0,1) e con un punto stazionario in $x = 0$.

Il problema di Cauchy descritto risulta:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 3t - t^2 \\ \\ y'(0) = 0 \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Per prima cosa si trovano le soluzioni dell'equazione omogenea associata:

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

il polinomio caratteristico associato risulta

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

che ammette autovalori complessi coniugati $\lambda = 1 + i$ e $\lambda = 1 - i$.
Dunque l'integrale generale è dato da:

$$y_o(t) = e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

Si cerca poi una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con il metodo di somiglianza. La soluzione particolare è della forma:

$$y_P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

Per trovare i valori dei coefficienti a_0, a_1, a_2 è necessario sostituire la soluzione particolare nell'equazione differenziale:

$$2a_2 - 2(a_1 + 2a_2 t) + 2(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = 3t - t^2$$
$$2a_2 - 2a_1 + 2a_0 + (2a_1 - 4a_2)t + 2a_2 t^2 = 3t - t^2$$

da cui

$$\begin{cases} 2a_2 - 2a_1 + 2a_0 = 0 \\ 2a_1 - 4a_2 = 3 \\ 2a_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

quindi

$$y_P(t) = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2$$

L'integrale generale è dunque:

$$y(t) = y_o(t) + y_P(t) = e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2$$

Imponendo le due condizioni si ottiene:

$$1 = c_1 + 1 \text{ ovvero } c_1 = 0$$

e, poiché $y'(t) = e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + e^t(-c_1 \sin t + c_2 \cos t) + \frac{1}{2} - t$, si ha

$$0 = c_1 + c_2 + \frac{1}{2}$$

da cui

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy risulta dunque:

$$y(t) = -\frac{e^t}{2}\sin t + 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2$$

5. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 4y' = 1 - 2t + e^{-4t}$ tangente nell'origine alla retta $y = x$.

Il problema di Cauchy descritto risulta:

$$\begin{cases} y'' + 4y' = 1 - 2t + e^{-4t} \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Per prima cosa si trovano le soluzioni dell'equazione omogenea associata:

$$y'' + 4y' = 0$$

il polinomio caratteristico associato risulta

$$\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

che ammette autovalori complessi coniugati $\lambda = 0$ e $\lambda = -4$.
Dunque l'integrale generale è dato da:

$$y_o(t) = c_1 + c_2 e^{-4t}$$

Si cerca poi una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con il metodo di somiglianza.
Osserviamo che la funzione $1 - 2t + e^{-4t}$ è somma di un polinomio e di un esponenziale, inoltre bisogna fare attenzione al fatto che è presente l'autovalore semplice $\lambda = 0$ e che il coefficiente dell'esponenziale è uguale all'autovalore semplice $\lambda = -4$.
Quindi la soluzione particolare è della forma:

$$y_P(t) = t(a_0 + a_1 t) + a_2 t e^{-4t}$$

Per trovare i valori dei coefficienti a_0, a_1, a_2 è necessario sostituire la soluzione particolare nell'equazione differenziale.
Poiché:

$$y'_P(t) = a_0 + 2a_1 t + a_2 e^{-4t} - 4a_2 t e^{-4t}$$
$$y''_P(t) = 2a_1 - 8a_2 e^{-4t} a_2 e^{-4t} + 16 a_2 t e^{-4t}$$

si ha

$$2a_1 - 8a_2 e^{-4t} + 16a_2 t e^{-4t} + 4(a_0 + 2a_1 t + a_2 e^{-4t} - 4a_2 t e^{-4t}) = 1 - 2t + e^{-4t}$$
$$2a_1 + 4a_0 + 8a_1 t - 4a_2 e^{-4t} = 1 - 2t + e^{-4t}$$

da cui

$$\begin{cases} 2a_1 + 4a_0 = 1 \\ 8a_1 = -2 \\ -4a_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{3}{8} \\ a_1 = -\dfrac{1}{4} \\ a_2 = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

quindi

$$y_P(t) = t\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}t\right) - \frac{1}{4}te^{-4t}$$

L'integrale generale è dunque:

$$y(t) = y_o(t) + y_P(t) = c_1 + c_2e^{-4t} + t\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}t\right) - \frac{1}{4}te^{-4t}$$

Imponendo le due condizioni si ottiene:

$$0 = c_1 + c_2$$

e, poiché $y'(t) = -4c_2e^{-4t} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}e^{-4t} + te^{-4t}$, si ha

$$1 = -4c_2 + \frac{3}{8} - \frac{1}{4}$$

da cui

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -4c_2 + \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{7}{32} \\ c_2 = -\dfrac{7}{32} \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy risulta dunque:

$$y(t) = \frac{7}{32} - \frac{7}{32}e^{-4t} + t\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}t\right) - \frac{1}{4}te^{-4t}$$