ANALISI MATEMATICA

Successioni e serie, numeri complessi, integrale indefinito

Definizioni

1) Successione, successione limitata, successione monotona, proprietà possedute definitivamente, carattere di una successione.
Calcolo dei limiti, confronto tra infiniti e tra infinitesimi, gerarchia degli infiniti, successioni asintotiche. Criteri del confronto e del confronto asintotico.
Serie, successione delle somme parziali, carattere di una serie, somma di una serie. Condizione necessaria di convergenza. Carattere ed eventuale somma della serie geometrica e delle serie telescopiche.
Carattere di una serie a termini non negativi. Criteri del confronto, del confronto asintotico, del rapporto, della radice. Carattere della serie armonica generalizzata.
Serie a termini di segno qualsiasi, criterio della convergenza assoluta.
Serie a termini di segno alterno, criterio di Leibniz.
Serie di Taylor-McLaurin.

2) Numeri complessi in forma algebrica, trigonometrica ed esponenziale. Coniugato di un numero complesso.
Somma, differenza, prodotto, quoziente di due numeri complessi. Interpretazione geometrica.
Potenza e radice di un numero complesso. Interpretazione geometrica.
Formula di Eulero.
Teorema fondamentale dell'algebra. Radici complesse di un polinomio di secondo grado. Equazioni in campo complesso.

3) Primitiva, integrale indefinito. Primitiva passante per un punto.
Proprietà di linearità dell'integrale. Integrali immediati e quasi-immediati. Metodi di integrazione indefinita: per parti, per sostituzione e per scomposizione (funzioni razionali).

Teoremi (se con asterisco * è richiesta la dimostrazione, riportata più sotto)

1) Condizione necessaria di convergenza di una serie*
2) Serie di Taylor-McLaurin
3) Formula di De Moivre per il prodotto di due numeri complessi*
4) Formula di Eulero
5) Teorema fondamentale dell'algebra
6) Teorema di integrazione per parti*

Enunciati ed eventuali dimostrazioni

1) Condizione necessaria affinché $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga è che $a_n \to 0$.

Dimostrazione. Per ipotesi la serie converge, ossia $s_n \to s$ ovvero $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, da cui $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$.

2) Le funzioni elementari sono sviluppabili in serie di Taylor-MacLaurin, ovvero sono esprimibili come serie di potenze. In particolare vale:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},\ \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\ ,\ \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

3) Dati $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, vale:

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$.

Dimostrazione.

$$\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2)$$
$$= \rho_1\rho_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

da cui, applicando le formule di addizione, la tesi.

4) Vale $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, $x \in \Re$. In particolare, per $x = \pi$ si ottiene $e^{i\pi} + 1 = 0$.

5) Un polinomio di grado n, $P(z)$, ha esattamente n radici in C. In termini equivalenti, l'equazione $a_n z^n + ... + a_1 z + a_0 = 0$ con $a_n \neq 0$ ha esattamente n soluzioni in C.
Osservazione. Ogni radice deve essere contata con la sua molteplicità; una radice z_0 è detta di molteplicità $k \geq 1$ se nella scomposizione in fattori di $P(z)$ compare $(z - z_0)^k$, ossia vale $P(z) = (z - z_0)^k \cdot Q(z)$, dove $Q(z)$ è un polinomio tale che $Q(z_0) \neq 0$.

6) Vale $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$.
Dimostrazione. Date f e g derivabili in $[a, b]$, la derivata del loro prodotto è $(fg)' = f'g + fg'$, da cui $f'g = (fg)' - fg'$. Prendendo l'integrale indefinito di entrambi i lati, con $\int (fg)'\,dx = fg$, si ottiene la tesi.