Università “Carlo Cattaneo”

Ingegneria gestionale

Analisi matematica

a.a. 2016/2017

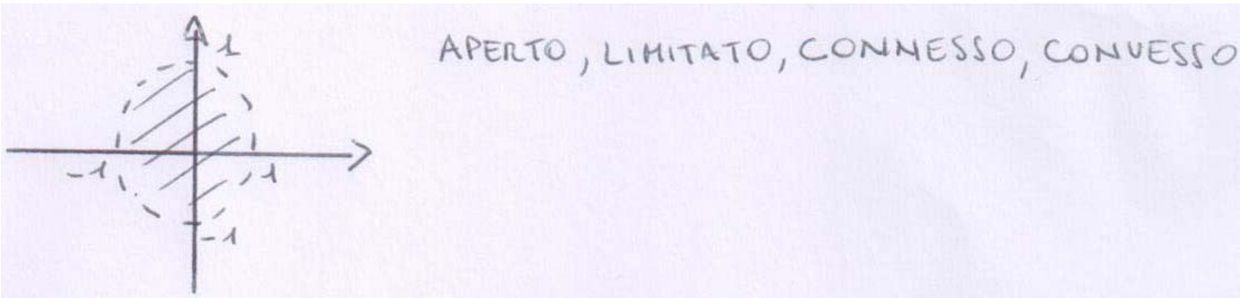
FUNZIONI IN DUE VARIABILI

ESERCIZI CON SOLUZIONE

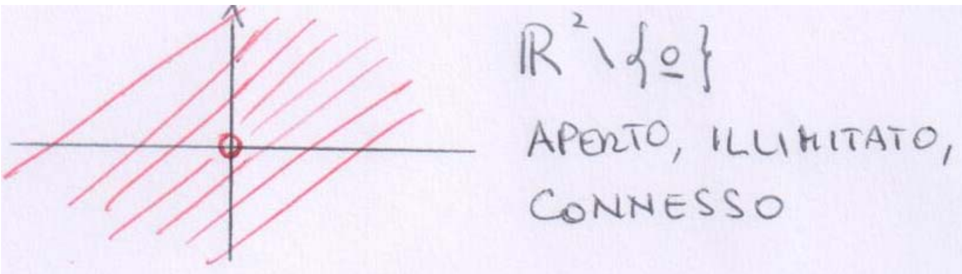
1. Determinare il dominio delle seguenti funzioni e rappresentarlo sul piano cartesiano:

a) $f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$
b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^4)$
c) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^4}$
d) $f(x,y) = \sqrt{\ln(x^2 + y^2)}$
e) $f(x,y) = \ln(xy^2 + x^2y)$

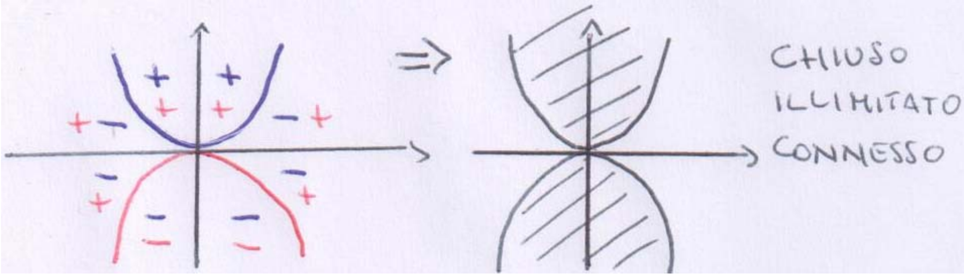
a) $x^2 + y^2 < 1$



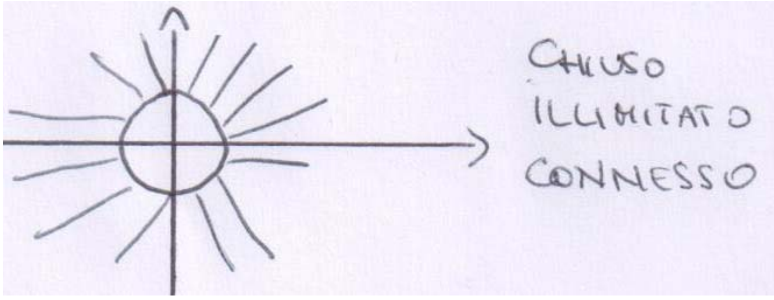
b) $x^2 + y^4 > 0$ verificata ovunque tranne che in $(0,0)$



c) $y^2 - x^4 \geq 0$, $(y - x^2)(y + x^2) \geq 0$
$\boldsymbol{y \geq x^4}$ o $\boldsymbol{y \geq -x^2}$

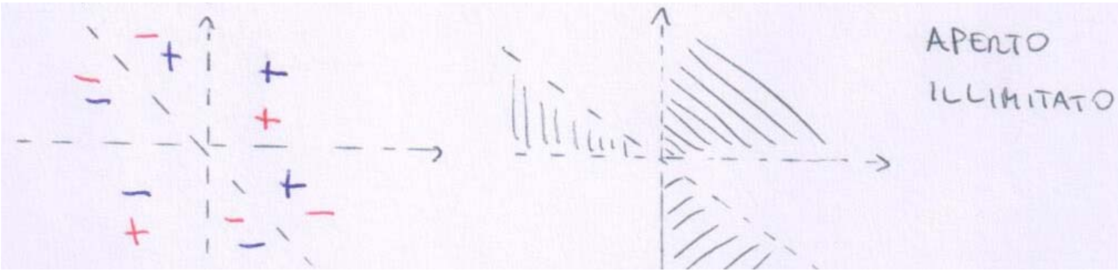


d) $\ln(x^2+y^2) \geq 0$, $x^2+y^2 \geq 1$



e) $xy^2 + x^2y > 0$, $xy(y+x) > 0$

$\boldsymbol{xy > 0}$ o $\boldsymbol{y > -x}$



2. Determinare le curve di livello k delle seguenti funzioni:

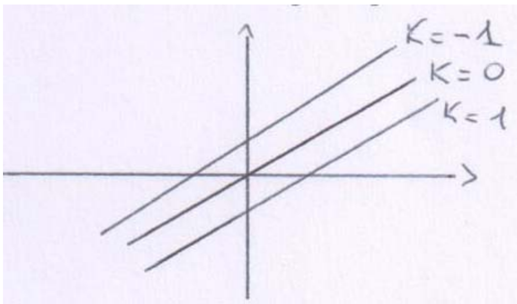
a) $f(x,y) = 2x - 5y$

b) $f(x,y) = x^2y$

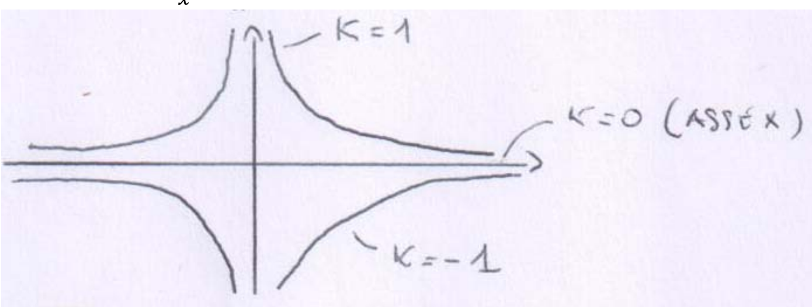
c) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2}{y+1}}$

d) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

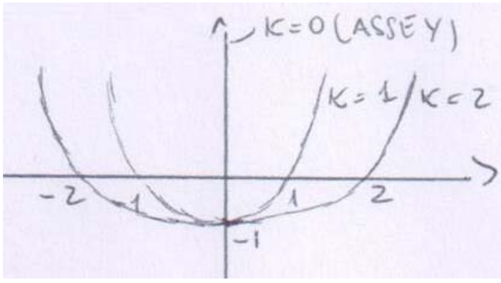
a) $2x - 5y = k$, $y = \frac{2}{5}x - \frac{k}{5}$



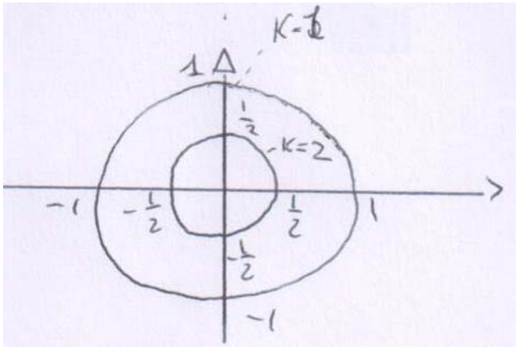
b) $x^2y = k$, $y = \frac{k}{x^2}$ per $x \neq 0$



c) $\sqrt{\frac{x^2}{y+1}} = k \ (k \geq 0)$, $\frac{x^2}{y+1} = k^2$, $y = \frac{x^2}{k^2} - 1$ se $k \neq 0$, $x = 0$ se $k = 0$



d) $\frac{1}{x^2+y^2} = k$, $x^2 + y^2 = \frac{1}{k}$ $(k \neq 0)$



3. Calcolare i seguenti limiti in due variabili:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2+1}{x^2+y^2}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\ln(x^2y^2+1)}{xy}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2xy+y^2}{x^2+y^2}$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^4}$

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2+1}{x^2+y^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\ln(x^2y^2+1)}{xy} = \frac{0}{0}$

ponendo $xy = t$, si ha $xy \to 0 \cdot 1, t \to 0$ e si ottiene

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(t^2+1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t} = 0$$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2xy+y^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$

calcolandolo lungo la direzione $y = x$ si ha $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$
calcolandolo lungo la direzione $y = 2x$ si ha $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{5x^2} = 0$
dunque il limite dato non esiste.

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^4} = \frac{0}{0}$
calcolandolo lungo la direzione $y = 0$ si ha $\lim_{x\to 0} 0 = 0$
calcolandolo lungo la direzione $x = 0$ si ha $\lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4} = 1$
dunque il limite dato non esiste.

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$
calcolandolo lungo la direzione $y = x$ si ha $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{2x^2} = \frac{0}{0}$, poiché $\sin x^2$ è asintotico a x^2 per $x \to 0$, si ha: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$
calcolandolo lungo la direzione $y = x^2$ si ha $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{x^2+x^4} = \frac{0}{0}$, poiché $\sin x^3$ è asintotico a x^3 per $x \to 0$ e $x^2 + x^4$ è asintotico a x^2 per $x \to 0$, si ha: $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$
dunque il limite dato non esiste.

4. Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni:

a) $f(x,y) = x^2 + 2xy - xy^2$
b) $f(x,y) = ye^{2x^2}$
c) $f(x,y) = y^2e^{-x}$
d) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$
e) $f(x,y) = \sqrt{e^x + x^2e^y}$
f) $f(x,y) = \frac{x^2+3y}{xy}$
g) $f(x,y) = x^3ye^{xy}$

a) $\nabla f(x,y) = [2x + 2y - y^2, 2x - 2xy]$
b) $\nabla f(x,y) = \left[4xye^{2x^2}, e^{2x^2}\right]$
c) $\nabla f(x,y) = [-y^2e^{-x}, 2ye^{-x}]$
d) $\nabla f(x,y) = \left[\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}, \frac{-xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}\right]$
e) $\nabla f(x,y) = \left[\frac{e^x+2xe^y}{2\sqrt{e^x+x^2e^y}}, \frac{x^2e^y}{2\sqrt{e^x+x^2e^y}}\right]$
f) $\nabla f(x,y) = \left[\frac{x^2y-3y^2}{x^2y^2}, -\frac{x}{y^2}\right]$
g) $\nabla f(x,y) = [3x^2ye^{xy} + x^3y^2e^{xy}, x^3e^{xy} + x^4ye^{xy}]$

5. Calcolare le derivate parziali seconde delle seguenti funzioni:

a) $f(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{7x+4y-2}}$
b) $f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$
c) $f(x,y) = \frac{\sqrt{1-x}}{y}$

a) $f_{xx} = -\frac{147}{4}(7x + 4y - 2)^{-\frac{5}{2}}$
$f_{yy} = -12(7x + 4y - 2)^{-\frac{5}{2}}$
$f_{xy} = f_{yx} = -21(7x + 4y - 2)^{-\frac{5}{2}}$
b) $f_{xx} = -2\frac{1+x^2-y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$
$f_{yy} = -2\frac{1-x^2+y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$
$f_{xy} = f_{yx} = \frac{-4xy}{(1-x^2-y^2)^2}$
c) $f_{xx} = -\frac{1}{4y}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$
$f_{yy} = \frac{2\sqrt{1-x}}{y^3}$
$f_{xy} = f_{yx} = \frac{1}{2y^2\sqrt{1-x}}$

6. Determinare la direzione di massima e minima crescita della seguente funzione: $f(x,y) = \ln(x^2 + 3y^3)$ in (2,1).

Le derivate parziali della funzione risultano:
$f_x = \frac{2x}{x^2+3y^3}$
$f_y = \frac{9y^2}{x^2+3y^3}$
Il vettore gradiente nel punto dato risulta: $\nabla f(2,1) = \left(\frac{4}{7}, \frac{9}{7}\right)$.
Dunque la direzione di massima crescita è data dal vettore gradiente normalizzato

$$\boldsymbol{d_{max}} = \frac{\left(\frac{4}{7}, \frac{9}{7}\right)}{\sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{9}{7}\right)^2}} = \frac{\left(\frac{4}{7}, \frac{9}{7}\right)}{\frac{\sqrt{97}}{7}} = \left(\frac{4}{\sqrt{97}}, \frac{9}{\sqrt{97}}\right)$$

la direzione di minima crescita è data dall'opposto vettore gradiente normalizzato

$$\boldsymbol{d_{min}} = \left(-\frac{4}{\sqrt{97}}, -\frac{9}{\sqrt{97}}\right)$$

7. Determinare le derivate direzionali delle seguenti funzioni lungo le direzioni assegnate nei punti indicati:

a) $f(x,y) = x^2 + xy - 2$ in $(1,0)$ lungo la direzione di $x - 2y = 0$
b) $f(x,y) = e^x \cos y$ in $(0,0)$ lungo la direzione di $y = 2x$
c) $f(x,y) = \sqrt{|x^2 - xy|}$ in $(0,0)$ lungo la direzione data da $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

a) Si tratta di una funzione polinomiale dunque sicuramente differenziabile, possiamo dunque calcolare la derivata direzionale con il gradiente:
$\nabla f(1,0) = (2,1)$

la direzione è quella di $y = \frac{1}{2}x$, quindi $\boldsymbol{v} = (2,1)$. Dunque:

$$D_{\boldsymbol{v}}f = (2,1) \times \frac{(2,1)}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

b) Si tratta di una funzione le cui derivate parziali risultano continue nel dominio e quindi differenziabile, possiamo dunque calcolare la derivata direzionale con il gradiente:
$\nabla f(0,0) = (1,0)$
la direzione è quella di $\boldsymbol{v} = (1,2)$. Dunque:

$$D_{\boldsymbol{v}}f = (1,0) \times \frac{(1,2)}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

c) Le derivate parziali hanno dei problemi di esistenza nel punto $(0,0)$, dunque procediamo al calcolo della derivata direzionale applicando la definizione:

$$D_{\boldsymbol{v}}f = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(0+\frac{\sqrt{2}}{2}h, 0+\frac{\sqrt{2}}{2}h\right) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{\left|\frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h^2\right|} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

8. Scrivere l'equazione del piano tangente a:

a) $f(x,y) = x^3 - y^3$ in $(0,1,-1)$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ in $(2,0,2)$

a) $z = f(0,1) + \nabla f(0,1) \times (x, y-1) = 2 - 3y$

b) $z = f(2,0) + \nabla f(2,0) \times (x-2, y) = x$

9. Scrivere l'equazione del polinomio di Taylor del secondo ordine della funzione $f(x,y) = x^3 + x + 5y + 1$ centrato in $(1,2)$.

L'equazione del polinomio è data da:

$$P_2(x,y) = f(1,2) + \nabla f(1,2) \times (x-1, y-2) + \frac{1}{2}\left[H_{(1,2)}(x-1,y-2) \times (x-1,y-2)\right]$$

dove

$f(1,2) = 13$

$\nabla f(1,2) = (4,5)$

$H_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Si ha quindi:

$$P_2(x,y) = 13 + 4(x-1) + 5(y-2) + 3(x-1)^2$$

10. Determinare i punti stazionari delle seguenti funzioni:

a) $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 4xy + x^3$

b) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$

c) $f(x,y) = \ln x - 3x + 2xy - y^2$

d) $f(x,y) = 2x^2y(3x - 3y)$

e) $f(x,y) = 5xy^2 - 20xy - 3y^2$

a) $\left(\frac{2}{9}, \frac{4}{27}\right)$, $(0,0)$
b) $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$
c) $(1,1)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
d) $(0,0)$
e) $(0,0)$, $\left(\frac{6}{5}, 4\right)$