SOLUZIONI ESERCIZI - FUNZIONI INTEGRALI

1.

a) $f(t) = \dfrac{2t}{e^{t^2}+1}$ è CONTINUA su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ F è DERIVABILE e

VALE: $F(x) = -\displaystyle\int_1^{3x^2} \frac{2t}{e^{t^2}+1}\,dt$

$$F'(x) = -\left(\frac{6x^2}{e^{9x^4}+1}\cdot 6x\right) = -\frac{36x^3}{e^{9x^4}+1}$$

b) ANALOGAMENTE

$$G'(x) = \frac{\sqrt[7]{3+2\ln x}}{\ln|\ln x+1|}\cdot\frac{1}{x} - \frac{\sqrt[7]{3+2(-x^3+x)}}{\ln|-x^3+x+1|}\cdot(-3x^2+1)$$

2. $F(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{e^t}{t^2+1}\,dt$

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{t^2+1}$ è CONTINUA SU $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ F CONTINUA SU $\mathbb{R}$

~~$F(2)=0$~~

~~$f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$~~

b) $F'(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

$$F''(x) = \frac{e^x(x^2+1)-2xe^x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

e)

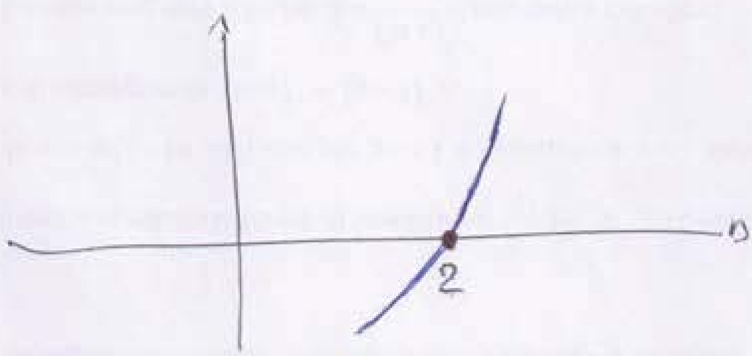
$$P_2(x) = F(2) + F'(2)\cdot(x-2) + \frac{F''(2)}{2}\cdot(x-2)^2$$

$$F(2) = \int_2^2 \frac{e^t}{t^2+1}\,dt = 0$$

$$F'(2) = \frac{e^2}{5}$$

$$F''(2) = \frac{e^2}{25}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = \frac{e^2}{2}(x-2) + \frac{e^2}{25}(x-2)^2$$



3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^2\,dt}{\ln(1+x^4)} = \frac{0}{0}$$

con de l'Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{\ln(1+x^4)} = \frac{0}{0}, \text{ ma per } x\to 0 \quad \operatorname{sen} x^2 \sim x^2$$

$$\ln(1+x^4) \sim x^4$$

EQUIVALE A: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

4.

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\ln(2-t^2)}\, dt$$

a) dominio di f è $\begin{cases} 2-t^2>0 \\ \ln(2-t^2) \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -\sqrt{2}<t<\sqrt{2} \\ t \neq \pm 1 \end{cases}$

$$(-\sqrt{2},-1)\cup(-1,1)\cup(1,\sqrt{2})$$

COSA SUCCEDE per $x \to -1$?

$$\frac{1}{\ln(2-x^2)} = \frac{1}{\ln[1+\underbrace{(1-x^2)}_{\to 0}]} \sim \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{2(1+x)}$$

~~INFINITESIMO DI~~ INFINITO DI ORDINE 1 $\Rightarrow$ DIVERGE $\Rightarrow$ f NON INTEGR.

$\Rightarrow$ F NON CONT.

ANALOGAMENTE per $x \to 1$

$$\frac{1}{\ln(2-x^2)} \sim \frac{1}{2(1-x)}$$ INFINITO DI ORDINE 1 $\Rightarrow$ f NON INTEGR.

$\Rightarrow$ F NON CONT.

$\Rightarrow$ IL PIÙ GRANDE INTERVALLO CONTENENTE $x=0$ è $(-1,1)$

$\Rightarrow \operatorname{dom} F = (-1,1)$

b)

$\lim_{x \to -1^+} F(x)$ per quanto visto sopra, questo limite si risolve con il criterio asintotico

$$\lim_{x \to -1^+} F(x) = \lim_{x \to -1} - \int_x^0 \frac{1}{\ln(2-t^2)}\, dt$$

poichè $\dfrac{1}{\ln(2-x^2)} \sim \dfrac{1}{2(1+x)} \longrightarrow +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -1^+} F(x) = -\infty \qquad x=-1 \text{ AS. VERT.}$$

analogamente

$$\lim_{x \to 1^-} F(x) = \lim_{x \to 1} \int_0^x \frac{1}{\ln(2-t^2)}\, dt$$

poichè $\dfrac{1}{\ln(2-x^2)} \sim \dfrac{1}{2(1-x)} \longrightarrow +\infty$

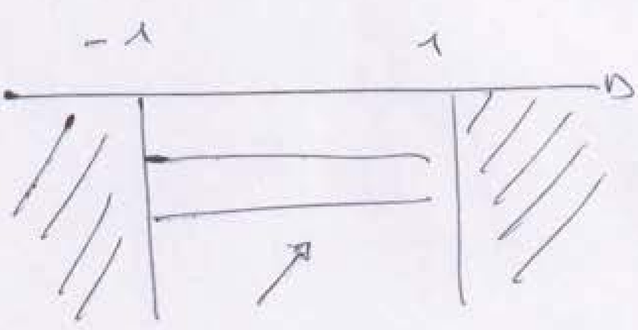
$$\Rightarrow \lim_{x \to +1^-} F(x) = +\infty \qquad x=1 \text{ AS. VERT.}$$

c) $F'(x) = \dfrac{1}{\ln(2-x^2)} > 0$ $\qquad N>0 \;\; \forall x$

$\ln(2-x^2)>0$

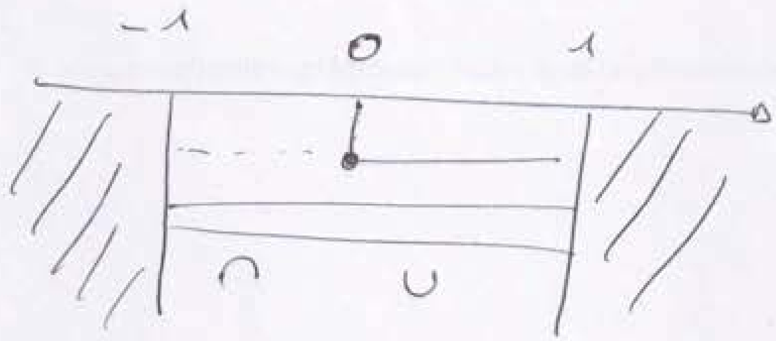
$2-x^2>1$

$x^2<1 \longrightarrow -1<x<1$



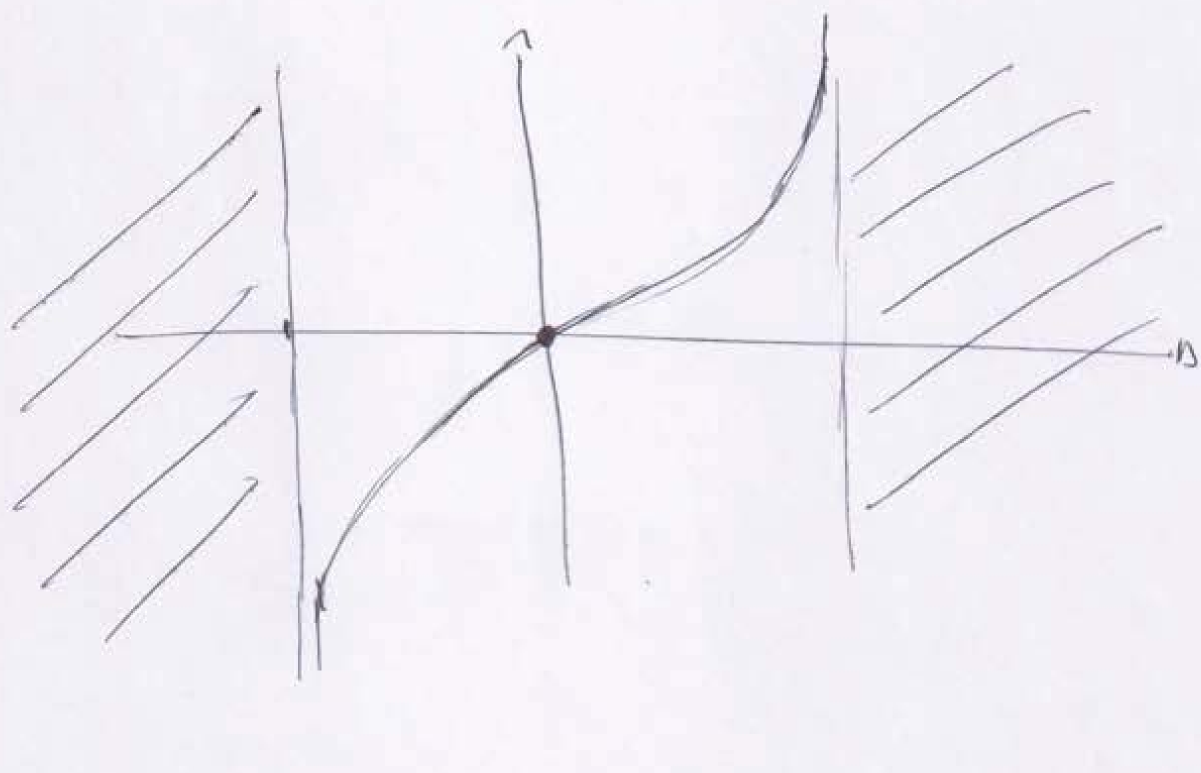
strettamente crescente

$$F''(x) = \frac{1}{\left[\ln(2-x^2)\right]^2} \cdot \frac{2x}{2-x^2} > 0$$



X=0 è PTO DI FLESSO

d) SAPPIAMO CHE $F(0)=0$



5. $$F(x) = \int_{-2}^{x} \frac{3t}{\sqrt[3]{t^2-1}}\,dt$$

a) dominio di $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ è: $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

studio cosa accade in $x=-1$ e $x=1$:

per $x \to -1$

$$\frac{3x}{\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}} \sim \frac{+3}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{x+1}}$$ È INFINITA DI ORDINE $\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ CONVERGE $\Rightarrow$ F CONTINUA in $x=-1$

per $x \to 1$

$$\frac{3x}{\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}} \sim \frac{3}{2\sqrt[3]{x-1}}$$ analog. F CONTINUA in $x=1$

$\Rightarrow \operatorname{dom} F = (-\infty, +\infty)$

b)
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_{-2}^{+\infty} \frac{3t}{\sqrt[3]{t^2-1}}\,dt$$ per $x \to +\infty$ $\dfrac{3x}{\sqrt[3]{x^2-1}} \sim \dfrac{3x}{x^{\frac{2}{3}}} = 3x^{\frac{1}{3}} \to +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$$

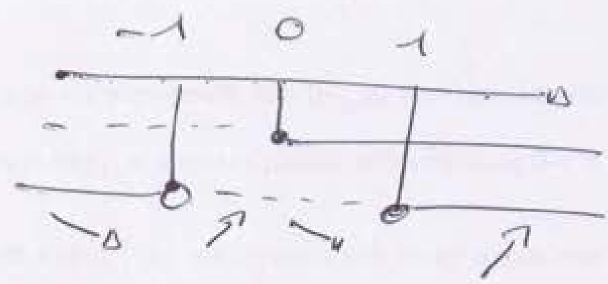
$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \int_{-2}^{-\infty} \frac{3t}{\sqrt[3]{t^2-1}}\,dt = -\int_{-\infty}^{-2} \frac{3t}{\sqrt[3]{t^2-1}}\,dt$$

per $x \to -\infty$ $\quad \dfrac{3x}{\sqrt[3]{x^2-1}} \sim \dfrac{3x}{x^{\frac{2}{3}}} = 3x^{\frac{1}{3}} \to -\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} F(x) = +\infty$$

c) $\dfrac{3x}{\sqrt[3]{x^2-1}} \geq 0$ $\qquad x \geq 0$

$x^2-1 \geq 0$



$x=0$ PTO DI MAX LOCALE

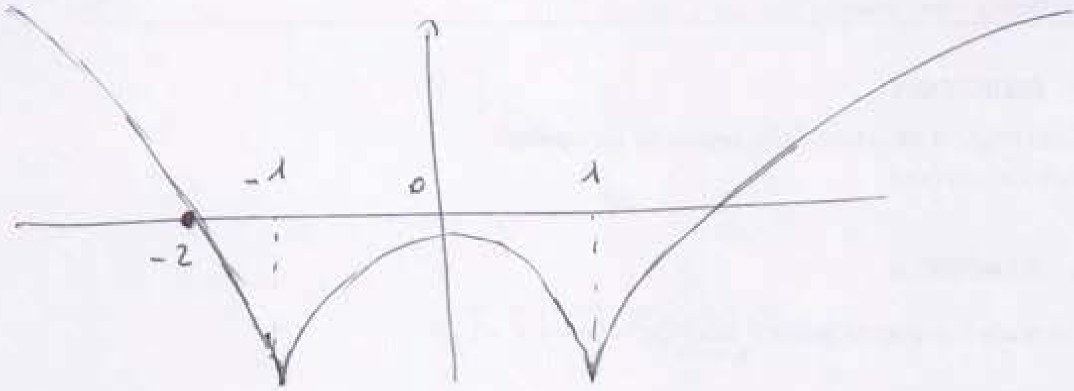
d) F NON È DERIVABILE (PUR ESSENDO CONTINUA) IN $x = \pm 1$

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{3x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{3}{0^{\pm}} = \pm\infty \qquad x=1 \text{ è PTO DI CUSPIDE}$$

$$\lim_{x \to -1^{\pm}} \frac{3x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{-3}{0^{\mp}} = \pm\infty \qquad x=-1 \text{ è PTO di CUSPIDE}$$

$F(-2) = 0$

e)



OSS. NON ABBIAMO STUDIATO IL SEGNO QUINDI NON SAPPIAMO L'ASCISSA DI X=0