Università "Carlo Cattaneo"
Ingegneria gestionale
Analisi matematica
a.a. 2016/2017

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

ESERCIZI CON SOLUZIONE

1. Calcolare i punti di massimo, minimo o sella delle seguenti funzioni:

a) $f(x,y) = x^2y + x^2 - 2y$
b) $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$
c) $f(x,y) = \ln(1 + x^2y^2)$
d) $f(x,y) = x\cos y$
e) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$
f) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$
g) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+2y^2}$

a) Si tratta di una funzione polinomiale e dunque differenziabile (quante volte si vuole):
$\nabla f(x,y) = (2xy + 2x, x^2 - 2)$
i punti stazionari sono dati risolvendo $\nabla f(x,y) = (0,0)$ da cui si ottengono i punti $(\sqrt{2}, -1)$ e $(-\sqrt{2}, -1)$.
Per determinare la natura dei punti si calcola l'hessiana:
$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2+2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$
Valutando l'hessiana nei due punti si ottiene:
$H(\sqrt{2}, -1) = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$ e $\det H = -8 < 0$
$H(-\sqrt{2}, -1) = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$ e $\det H = -8 < 0$
si conclude che i punti $(\sqrt{2}, -1)$ e $(-\sqrt{2}, -1)$ sono entrambi punti di sella.

b) Si tratta di una funzione polinomiale e dunque differenziabile:
$\nabla f(x,y) = (3x^2 + y, 3y^2 + x)$
i punti stazionari sono dati risolvendo $\nabla f(x,y) = (0,0)$ da cui si ottengono i punti $(0,0)$ e $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.
Per determinare la natura dei punti si calcola l'hessiana:
$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{bmatrix}$
Valutando l'hessiana nei due punti si ottiene:
$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\det H = -1 < 0$
dunque $(0,0)$ è un punto di sella.
$H\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $\det H = 3 > 0$ e $H_{11} = -2 < 0$

dunque $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ è punto di massimo locale.

c) Calcolando il gradiente della funzione si ha $\nabla f(x,y) = \left(\frac{2xy^2}{1+x^2y^2}, \frac{2x^2y}{1+x^2y^2}\right)$, si osserva che le derivate parziali sono continue nel dominio e dunque la funzione è differenziabile.
L'unico punto stazionario risulta (0,0) e calcolando l'hessiana si ha:
$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{2y^2-2x^2y^4}{(1+x^2y^2)^2} & \frac{4xy}{(1+x^2y^2)^2} \\ \frac{4xy}{(1+x^2y^2)^2} & \frac{2x^2-2x^4y^2}{(1+x^2y^2)^2} \end{bmatrix}$
valutando nel punto si ottiene
$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dalla quale non possiamo dedurre nulla sulla natura del punto.
Studiamo dunque il segno della funzione nell'intorno di (0,0).
Introduciamo la funzione ausiliaria $g(x,y) = f(x,y) - f(0,0) = \ln(1 + x^2y^2)$ e studiamo:
$\ln(1 + x^2y^2) > 0$
$1 + x^2y^2 > 1$
$x^2y^2 > 0$
che in un intorno di (0,0) risulta sempre positiva, dunque il punto (0,0) è un punto di minimo locale.

d) Il gradiente della funzione risulta $\nabla f(x,y) = (\cos y, -x\sin y)$, si osserva che le derivate parziali sono continue nel dominio e dunque la funzione è differenziabile.
Annullando le componenti del gradiente si ottengono infiniti punti stazionari della forma $\left(0, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ con $k = 0,1,2,3, \dots$
Calcolando l'hessiana si ha:
$H(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin y \\ -\sin y & -x\cos y \end{bmatrix}$
E si osserva che
$H\left(0, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$ il suo determinante è sempre negativo dunque i punti stazionari sono tuti punti di sella.

e) Calcolando il gradiente si ha $\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)$, si osserva che le derivate parziali sono continue nel dominio e dunque la funzione è differenziabile.
Annullando le componenti del gradiente si ottiene il punto (0,0).
Calcolando l'hessiana si ha:
$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1+y^2}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}} & \frac{-xy}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ \frac{-xy}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}} & \frac{1+x^2}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}} \end{bmatrix}$
Valutandola nel punto stazionario
$H(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\det H = 1 > 0$ e $H_{11} = 1 > 0$
dunque (0,0) è punto di minimo locale.

f) Analogamente a quanto fatto sopra si ottiene che (0,0) è punto di minimo locale.

g) La funzione è definita continua per ogni $(x, y) \neq (0,0)$.
Il gradiente risulta $\nabla f(x, y) = \left(\frac{-2x}{(x^2+2y^2)^2}, \frac{-4y}{(x^2+2y^2)^2}\right)$ che si annulla in $(0,0)$ punto non appartenente al dominio della funzione. Non esistono dunque punti stazionari.

2. Calcolare gli eventuali punti di massimo e minimo della funzione

$$f(x, y) = 2x^4 + 3x^2y - 2y$$

sull'insieme $A = \{(x, y): x^2 \leq y \leq 1\}$.

La funzione data è polinomiale e dunque continua sul piano, in particolare la regione su cui calcolare gli ottimi è un compatto, dunque per il teorema di Weierstrass ammetterà sicuramente punti di massimo e minimo globali.

Cerchiamo prima gli eventuali attimi nella parte interna della regione A.
Il gradiente $\nabla f(x, y) = (8x^3 + 6xy, 3x^2 - 2)$ si annulla in punti non appartenenti alla regione dunque la funzione non ammette ottimi nella parte interna di A.

Analizziamo ora cosa succede al bordo che si presenta come l'unione dei due insiemi:
$B = \{(x, y): y = x^2, -1 \leq x \leq 1\}$
$C = \{(x, y): y = 1, -1 \leq x \leq 1\}$

La funzione ristretta su B è $f(x, x^2) = 5x^4 - 2x^2$, che ottimizziamo con le tecniche di ottimizzazione per funzioni a una variabile (studiando il segno della derivata sul compatto $-1 \leq x \leq 1$). Si ricava che su B i punti di massimo locale sono $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, i punti di minimo locale sono $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{5}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{5}\right)$.

La funzione ristretta su C è $f(x, 1) = 2x^4 + 3x^2 - 2$, che ottimizziamo con le tecniche di ottimizzazione per funzioni a una variabile (studiando il segno della derivata sul compatto $-1 \leq x \leq 1$). Si ricava che su C i punti di massimo locale sono $(1,1)$, $(-1,1)$, il punto di minimo locale è $(0,1)$.

Poiché stiamo ottimizzando su un compatto ci interessano esclusivamente (sono gli unici di cui sappiamo e possiamo dire qualcosa sulla loro natura) i punti di massimo e minimo globali; calcolando il valore che questi punti assumono mediante f, si ricava che $(1,1)$ e $(-1,1)$ sono punti di massimo globale e $(0,1)$ è punto di minimo globale.

N.B. sugli altri punti ottenuti sulla restrizione della funzione sulla frontiera nulla sappiamo dire sulla loro natura!