Università "Carlo Cattaneo"

Ingegneria gestionale

Analisi matematica

a.a. 2016/2017

RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

ESERCIZI CON SOLUZIONE

1) Date le rette

$$r: \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y - 2z - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} 3x - y - z - 2 = 0 \\ 5x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

a) verificare che sono parallele e distinte;
b) determinare il piano che le contiene entrambe.

a) Riscriviamo le due rette in forma parametrica:

$$r: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 5 \\ z = t \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t + 7 \\ z = t \end{cases}$$

Entrambe le rette hanno la medesima direzione (1, 2, 1) e sono distinte in quanto il punto (2, 5, 0) appartiene a r ma non a s.

b) Per calcolare il piano contenente le due rette si può procedere in due differenti modi: la prima è calcolare il piano passante per 3 punti A=(2, 5, 0), B=(3, 7, 0) e C=(3, 7, 1) quest'ultimo punto di r quando $t=1$; alternativamente il piano passa per il punto A ed è generato dalle direzioni (1, 2, 1), che è la direzione delle rette contenute, e dalla direzione della retta AB. Svolgiamo questo secondo caso:

$$\begin{cases} x = 2 + t + (3 - 2)s \\ y = 5 + 2t + (7 - 5)s \\ z = 0 + t \end{cases} = \begin{cases} x = 2 + t + s \\ y = 5 + 2t + 2s \\ z = t \end{cases}$$

Che in forma cartesiana risulta (risolvendo il sistema rispetto ai parametri s e t):

$$2x - y + 1 = 0$$

2) Considerate le rette

$$r: x + z = y = 1 \quad \text{e} \quad s: x = z - 1 = 0$$

determinare il piano contenente r e s.

Le due rette in forma parametrica risultano:

$$r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

Le due rette si intersecano per il valore $t = 1$, ovvero nel punto (0, 1, 0).
La direzione perpendicolare al piano sarà dunque perpendicolare alle direzioni delle due rette: (-1, 0, 1) e (0, 1, 0).
Tale direzione perpendicolare la trovo facendo il prodotto vettoriale:

$$(2,0,1)\wedge(0,1,0) = \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} - 1\boldsymbol{k}$$

ovvero il vettore (-1, 0, -1). A questo punto il piano cercato sarà del tipo:

$$-x - z + d = 0$$

imponiamo il passaggio per il punto in comune (0, 1, 0) di *r*:

$$d = 0$$

da cui

$$-x + 2z = 0$$

3) Determinare l'equazione parametrica e cartesiana delle retta dello spazio
a) passante per i punti A=(1,0,2) e B=(3,-1,0);
b) passante per il punto C=(1,3,1) e parallela al vettore (2,0,0);
c) di equazione cartesiana:

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y - x + z = 0 \end{cases}$$

a) Passa per A e ha direzione AB

$$\begin{cases} x = 1 + t(3-1) \\ y = 0 + t(-1-0) \\ z = 2 + t(0-2) \end{cases} = \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Da cui, risolvendo rispetto a t, si ricava:

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

b) Passa per C con direzione (2,0,0):

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

c) Si ottiene:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

4) Determinare:
a) l'equazione parametrica e cartesiana del piano passante per i punti A=(1,3,1), B=(2,0,0) e C=(0,1,1). Il punto (0,2,0) appartiene a tale piano?
b) una equazione della retta passante per A e perpendicolare al piano trovato.

a) Usiamo la formula del piano per 3 punti:

$$\begin{cases} x = 1 + t(2-1) + s(0-1) \\ y = 3 + t(0-3) + s(1-3) \\ z = 1 + t(0-1) + s(1-1) \end{cases} = \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 3 - 3t - 2s \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Risolvendo rispetto a t e s otteniamo la forma cartesiana:

$$2x - y + 5z - 4 = 0$$

Verifichiamo l'appartenenza del punto (0,2,0):

$$0 - 2 + 0 - 4 = 0$$

l'identità non è verificata dunque il punto non appartiene al piano.

b) Dato il piano $2x - y + 5z - 4 = 0$ sappiamo che la direzione (2,-1,5) data dai suoi parametri è perpendicolare al piano, quindi la retta cercata è:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$$

5) Sia r la retta nello spazio passante per i punti A=(1,-1,2) e B=(-2,0,1) e sia s la retta contenente C=(1,3,-3) e parallela al vettore (2,-2,3) determinare la posizione reciproca delle due rette (incidenti, parallele, sghembe).

Per quanto già visto la retta r ha equazione parametrica:

$$r: \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

e la retta s:

$$s: \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 3 - 2s \\ z = -3 + 3s \end{cases}$$

Le due rette hanno direzione, rispettivamente, date dai vettori: (-3,1,-1) e (2,-2,3). I due vettori non sono proporzionali e quindi le due rette non sono parallele. Per verificare se sono incidenti o sghembe cerchiamo se esiste o meno un punto di intersezione:

$$\begin{cases} -2 - 3t = 1 + 2s \\ t = 3 - 2s \\ 1 - t = -3 + s \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{cases} t = 3 - 2s \\ s = 3 \\ s = -1 \end{cases}$$

Quindi il sistema non ammette soluzioni (s assume contemporaneamente due valori diversi!) e perciò le rette sono sghembe.

6) Date le rette nello spazio di equazione:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} y + x = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

determinare l'equazione della retta ortogonale a r e s e passante per il loro punto di intersezione.

La retta s in forma parametrica risulta:

$$\begin{cases} x = 1 - s \\ y = s \\ z = 1 + 2s \end{cases}$$

La direzione perpendicolare alle due rette la trovo facendo il prodotto vettoriale:

$$(1,2,1) \wedge (-1,1,2) = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

ovvero il vettore (3,-3,3).

Il punto di intersezione tra r e s si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 1 + t = 1 - s \\ 2t = s \\ 1 + t = 1 + 2s \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} s = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Sostituendo i valori ottenuti si ricava che il punto di intersezione è (1,0,1).

Dunque la retta cercata avrà equazione:

$$\begin{cases} x = 1 + 3h \\ y = -3h \\ z = 1 + 3h \end{cases}$$

7) Sia r la retta di equazione $x + z + 1 = 2x + 2y - z - 3 = 0$ e la retta s di equazione:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

a) Determinare l'equazione del piano contenente il punto P=(1,2,3) e ortogonale alla retta s.

b) Stabilire se esiste una retta passante per P, contenuta nel piano e incidente a r. In caso affermativo scriverne l'equazione.

a) La retta s ha direzione (2,-1,0) quindi il piano avrà equazione del tipo:

$$2x - y + d = 0$$

Per trovare il valore di d imponiamo il passaggio per P:

$$2 - 2 + d = 0$$

da cui

$$d = 0$$

Quindi l'equazione del piano risulta:

$$2x - y = 0$$

b) La retta cercata passa per P e per l'eventuale punto di intersezione tra il piano e la retta r, se tale intersezione esiste la retta cercata esiste, altrimenti non esiste.

L'intersezione tra r e il piano è data dal sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z + 1 = 0 \\ 2x + 2y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

da cui il punto A

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{7} \\ y = \dfrac{4}{7} \\ z = -\dfrac{9}{7} \end{cases}$$

Esiste l'intersezione e dunque la retta esiste; passa per P e ha direzione AP:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$$