ANALISI MATEMATICA

Simulazione 2^a prova parziale del 31-01-2017

COGNOME:... NOME:... MATRICOLA:........................

1. Assegnata la funzione $f(x) = xe^{x-x^2}$, individuare gli intervalli in cui la funzione è strettamente crescente/decrescente e classificare gli estremanti locali della funzione.

   Svolgimento: La funzione è derivabile in ogni punto del suo dominio $D_f = \mathbb{R}$. Segue che la funzione è strettamente crescente in un punto se e solo se $f'(x) > 0$. Dato che
$$f'(x) = e^{x-x^2}\left(1 + x - 2x^2\right)$$
   si ha $f'(x) > 0$ per $x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ e $f'(x) < 0$ $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$. Segue che la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ ed è strettamente decrescente negli intervalli $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ e $(1, +\infty)$. Essendo la funzione derivabile in ogni punto del suo dominio, lo studio del segno della derivata prima ci permette di concludere che $x = -\frac{1}{2}$ è un punto di minimo locale, mentre $x = 1$ è un punto di massimo locale.

2. Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{2x \sin x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{\pi}{2\cos x} - x\tan x\right)$$
   Svolgimento. Il primo limite si presenta nella forma di indecisione $\frac{0}{0}$. Ricordandoci che $x \sim \sin x$ per $x \to 0^+$ e per il Teorema polinomio di Taylor-MacLaurin con il resto secondo Peano abbiamo che $e^x = T_2(x) + o\left(x^2\right)$ per $x \to 0^+$, dove $T_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, segue che:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{2x\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{T_2(x) + o\left(x^2\right) - 1 - x}{2x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right) - 1 - x}{2x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)}{2x^2} = \frac{1}{4}$$
   Il secondo limite può essere riscritto come segue:
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{\pi}{2\cos x} - x\tan x\right) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\pi - 2x\sin x}{2\cos x}$$
   il limite si presenta nella forma di indecisione $\frac{0}{0}$, notando che
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{-2\sin x - 2x\cos x}{-2\sin x} = 1$$
   per il teorema di De l'Hôpital segue che:
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{\pi}{2\cos x} - x\tan x\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{-2\sin x - 2x\cos x}{-2\sin x} = 1$$

3. Scrivere il polinomio di Taylor-Maclaurin di ordine 3 della funzione $f(x) = x^4 + x - e^{2x}$

   Svolgimento. Abbiamo che:
$$f'(x) = 4x^3 + 1 - 2e^{2x}; \quad f''(x) = 12x^2 - 4e^{2x}; \quad f'''(x) = 24x - 8e^{2x};$$
   ricordandoci la formula del polinomio di Taylor-Maclaurin di ordine 3 per una generica funzione f derivabile almeno 3 volte:
$$T_3(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2}f''(0)\,x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)\,x^3$$
   abbiamo che il polinomio di Taylor-Maclaurin di ordine 3 della funzione data è
$$T_3(x) = -1 - x - 2x^2 - \frac{4}{3}x^3$$

4. Data la funzione $f(x)$ la quale soddisfa le condizioni imposte dal *Teorema formula di Taylor all'ordine due con il resto secondo Lagrange* e tale che $f'''(x) = e^{-x}$,

   a) fornire un'approssimazione per eccesso e un'approssimazione per difetto dell'errore che si commette approssimando in $x = 1$ la funzione con il suo polinomio di Taylor-Maclaurin di ordine due.

   b) indicare, motivando la risposta, se è possibile affermare che l'errore commesso approssimando la funzione con il suo polinomio di Taylor-Maclaurin di ordine due in $x = -1$ è maggiore dell'errore commesso operando la stessa approssimazione in $x = 1$.

5. Svolgimento:

   a) Per il *Teorema formula di Taylor all'ordine due con il resto secondo Lagrange* abbiamo che:

   $$R(x) = f(x) - T_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 \quad \text{con } \xi \in (0, x)\,, \text{ se } x > 0, \text{ oppure } \xi \in (x, 0)\,, \text{ se } x < 0.$$

   Segue che $R(1) = \frac{e^{-\xi}}{6}$ con $\xi \in (0, 1)$. Essendo

   $$\max_{\xi\in[0,1]} |R(1)| = \max_{\xi\in[0,1]} \frac{e^{-\xi}}{6} = \frac{1}{6} \qquad \text{e} \qquad \min_{\xi\in[0,1]} |R(1)| = \min_{\xi\in[0,1]} \frac{e^{-\xi}}{6} = \frac{1}{6e} \tag{1}$$

   segue che $\frac{1}{6e} \leq |R(1)| \leq \frac{e}{6}$. Segue che $\frac{1}{6e}$ è un'approssimazione per difetto dell'errore, mentre $\frac{e}{6}$ è un'approssimazione per eccesso dell'errore.

   b) Sempre per il *Teorema formula di Taylor all'ordine due con il resto secondo Lagrange* abbiamo che $R(-1) = -\frac{e^{-\xi}}{6}$ con $\xi \in (0, 1)$. Essendo

   $$\max_{\xi\in[0,1]} |R(-1)| = \max_{\xi\in[0,1]} \frac{e^{-\xi}}{6} = \frac{e}{6} \qquad \text{e} \qquad \min_{\xi\in[0,1]} |R(-1)| \min_{\xi\in[0,1]} \frac{e^{-\xi}}{6} = \frac{1}{6} \tag{2}$$

   segue che $\frac{1}{6} \leq |R(-1)| \leq \frac{e}{6}$, mentre $\frac{1}{6e} \leq |R(-1)| \geq \frac{1}{6}$. Possiamo quindi affermare che l'errore commesso approssimando la funzione con il suo polinomio di Taylor-Maclaurin di ordine due in $x = -1$ è maggiore o uguale dell'errore commesso operando la stessa approssimazione in $x = 1$.

6. Teorema da dimostrare.

7. Data la successione:

   $$a_n = \frac{5^{-n} + \sqrt[3]{n}}{n^2 + 5} \tag{3}$$

   a) si determini il suo carattere;

   b) si determini il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$

   Esercizio svolto in aula

8. Dato il numero complesso:

   a) calcolarne le radici quadrate, esprimendo il risultato in forma esponenziale;

   b) risolvere l'equazione $\bar{z} = v + i$ con $v = a + ib$.

   Esercizio svolto in aula

9. Si calcoli l'integrale definito:

   $$\int \frac{3}{x(\ln x + 1)(\ln x - 2)} dx \tag{4}$$

   Esercizio svolto in aula