1.

VERIFICHIAMO L'APPARTENENZA DI $P(2,-1,-6)$ AL PIANO SOSTITUENDO LE COORDINATE NELL'EQUAZIONE DEL PIANO:

$$2\cdot 2-3\cdot(-1)-6=1$$
$$4+3-6=1$$
$$1=1 \Rightarrow P\in \text{PIANO}$$

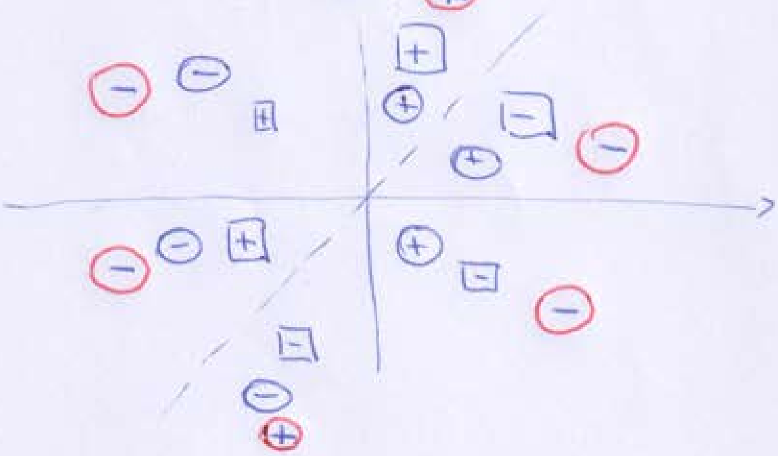
DALL'EQUAZIONE DEL PIANO $2x-3y+z=1$ RICAVIAMO CHE IL VETTORE $(2,-3,1)$ RAPPRESENTA LA DIREZIONE ORTOGONALE AL PIANO. LA RETTA CERCATA, IN FORMA PARAMETRICA, RISULTA:

$$\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1-3t \\ z=-6+t \end{cases}$$

ESPLICITANDO LA t RICAVIAMO:

$$\begin{cases} t=z+6 \\ x=2+2z+12 \\ y=-1-3z-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2z-14=0 \\ y+3z+19=0 \end{cases}$$

2. DOMINIO $\frac{y-x}{x}>0$ $\quad \boxed{y-x>0} \vee (x>0)$



DOMINIO ⟶

DOMINIO è un insieme: APERTO e ILLIMITATO (NO CONNESSO)

CURVE DI LIVELLO

$$\ln\left(\frac{y-x}{x}\right) - 1 = k$$

$$\ln\left(\frac{y-x}{x}\right) = k+1$$

$$\frac{y-x}{x} = e^{k+1}$$

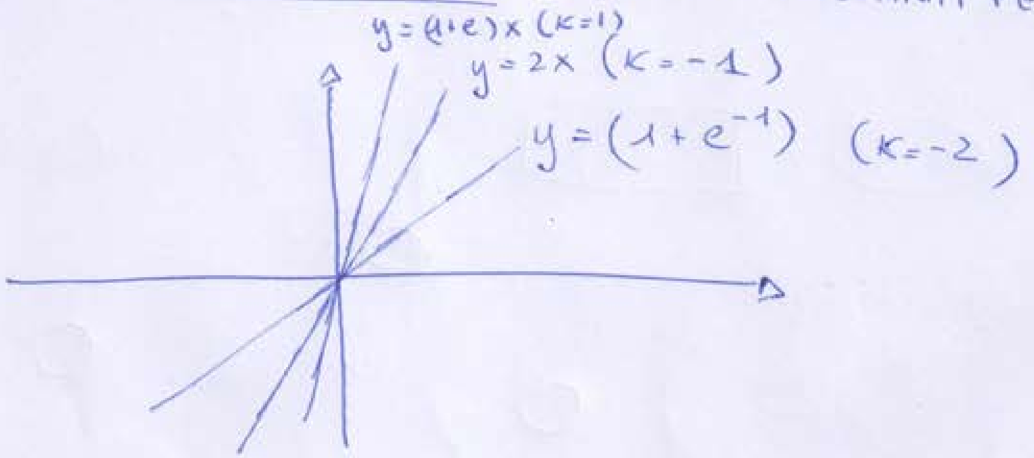
$x \neq 0$ per condizioni di esistenza

$$y - x = x \cdot e^{k+1}$$

$$y = x + x e^{k+1}$$

$$\boxed{y = \left(1 + e^{k+1}\right) x}$$

RETTE A COEFFICIENTE ANGOLARE POSITIVO PASSANTI PER $(0,0)$



$$f_x(x,y) = \frac{x}{y-x} \cdot \frac{-1\cdot x - (y-x)\cdot 1}{x^2} = -\frac{y}{x(y-x)}$$

$$f_y(x,y) = \frac{x}{y-x} \cdot \frac{1\cdot x - (y-x)\cdot 0}{x^2} = \frac{1}{y-x}$$

$$\nabla f(x,y) = \left[-\frac{y}{x(y-x)} , \frac{1}{y-x} \right]$$

OSSERVIAMO CHE LA FUNZIONE RISULTA DIFFERENZIABILE IN UN INTORNO DI $(1,3)$ [LE DERIVATE PARZIALI SONO CONTINUE]. QUINDI, DETTO $\underline{v} = (-1,-4)$

$$D_{\underline{v}} f(x,y) = \nabla f(1,3) \times \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} =$$

$$= \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{17}}$$

3. ~~ENUNCIATO~~ Teo. zeri: Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CON A INSIEME CONNESSO e f CONTINUA SU A, SE ESISTONO $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in A$ t.c. $f(\underline{x}_1) < 0 < f(\underline{x}_2)$

$$\Rightarrow \exists \ \underline{x}_0 \in A \text{ t.c. } f(\underline{x}_0) = 0$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{3(x^2+y^4)^3 - \operatorname{sen}(x^2+y^4)}{2(x^2+y^4)} = \frac{0}{0}$$

pongo $x^2+y^4 = t$; $(x,y) \to (0,0) \Rightarrow t \to 0+0=0$

$\lim_{t \to 0} \frac{3t^3 - \operatorname{sen} t}{2t}$; poichè $\operatorname{sen} t \sim t$ per $t \to 0$

$\lim_{t \to 0} \frac{3t^3 - t}{2t}$, poichè $3t^3 - t \sim -t$ per $t \to 0$

$\lim_{t \to 0} \frac{-t}{2t} = -\frac{1}{2} \neq f(0,0) \Rightarrow$ NON è CONTINUA

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1-3xy)+\sqrt{x}\,y^2}{e^{x^2+y^4}-1}$$

calcoliamo lungo $y=x$: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-3x^2)+\sqrt{x}\cdot x^2}{e^{x^2+x^4}-1}$

poichè $\ln(1-3x^2) \sim -3x^2$ per $x\to 0$

$$e^{x^2+x^4}-1 \sim x^2+x^4 \sim x^2 \text{ per } x\to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-3x^2+\sqrt{x}\cdot x^2}{x^2}$$

poichè $-3x^2+\sqrt{x}\cdot x^2 \sim -3x^2$ per $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-3x^2}{x^2} = -3$$

calcoliamo lungo $y=-x$: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x^2)+\sqrt{x}\cdot x^2}{e^{x^2+x^4}-1}$

analogamente a quanto fatto sopra, il limite dato equivale a:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

Lungo due diversi percorsi il limite fornisce due risultati distinti $\Rightarrow \nexists$ limite $\Rightarrow g$ NON È CONTINUA

4. DOMINIO $f = \mathbb{R}^2$

$$f_x = 7y^2(y-x) + 7xy^2 \cdot (-1)$$

$$f_y = 14xy(y-x) + 7xy^2 \cdot (1)$$

RICERCHIAMO I PUNTI STAZIONARI:

$$\begin{cases} 7y^2(y-x) - 7xy^2 = 0 \\ 14xy(y-x) + 7xy^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7y^2(y-8x) = 0 & \text{I} \\ 7xy(3y-x) = 0 & \text{II} \end{cases}$$

da I : $y = 0$ o $y = 8x$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ INFINITI PUNTI STAZIONARI DEL TIPO $(a, 0)$ $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y = 8x \\ 56x^2(23x) = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$$

da II $x = 0$ o $y = 0$ o $x = 3y$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 7y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ INFINITI PUNTI DEL TIPO $(a, 0)$ $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 3y \\ 7y^2 \cdot (-23y) = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$$

$f_{xx} = -14y^2$

$f_{yy} = 42xy - 14x^2$

$f_{xy} \underset{\uparrow}{=} f_{yx} = 21y^2 - 28xy$

poiché funzione polinomiale $\Rightarrow$ SICURAMENTE $C^2(\mathbb{R}^2)$

in $(a,0)$ con $a \neq 0$

$$H_{(a,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -14a^2 \end{bmatrix} \quad \det H = 0$$

in $(0,0)$ $\quad H_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \det H = 0$

INTRODUCIAMO UNA FUNZIONE AUSILIARIA PER $(a,0)$

$$g(x,y) = f(x,y) - \underbrace{f(a,0)}_{=3} = 7xy^2(y-x)$$

se $a>0$: $\quad g(x,y) \geq 0$? su $I(0,a)$

$$\underbrace{7xy^2}_{\geq 0}\underbrace{(y-x)}_{\geq 0} \geq 0 \quad \Rightarrow \text{sella}$$

sia positivo che negativo

analoghi ragionamenti per $a<0$ e $a=0$.

5. TEOREMA WEIERSTRASS

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA A COMPATTO

$$\Rightarrow \exists \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in A \text{ t.c. } \quad f(\underline{x}_1) \geq f(\underline{x}) \ \forall \underline{x} \in A$$

$$f(\underline{x}_2) \leq f(\underline{x}) \ \forall \underline{x} \in A$$

PROCEDIAMO CON IL METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

$$L(x,y,\lambda) = 2x - y^2 - \lambda(x^2+3y^2-6)$$

$$L_x = 2 - 2\lambda x$$

$$L_y = -2y - 6\lambda y$$

$$L_\lambda = -x^2 - 3y^2 + 6$$

Cerchiamo i pti stazionari:

$$\begin{cases} 2-2\lambda x = 0 \\ 2y+6\lambda y = 0 \\ x^2+3y^2=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda x = 1 \\ 2y(1+3\lambda) = 0 \quad (*) \\ x^2+3y^2=6 \end{cases}$$

da $(*)$ $\quad y=0 \quad \lambda = -\frac{1}{3}$

$$\begin{cases} y=0 \\ x^2=6 \\ \lambda = \frac{1}{x} \end{cases} \quad \begin{matrix} \left(\sqrt{6}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ \left(-\sqrt{6}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \lambda = -\frac{1}{3} \\ x = -3 \\ 3y^2 = -3 \to y^2 = -1 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

$L_{xx} = -2\lambda$

$L_{yy} = -2-6\lambda$

$L_{xy} = L_{yx} = 0$

$$H\left(\sqrt{6}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \det H > 0 \\ H_{11} < 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow (\sqrt{6}, 0)$ è pto di max locale vincolato

$$H\left(-\sqrt{6}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & -2+\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$\det H > 0$

$H_{11} > 0 \qquad \Rightarrow (-\sqrt{6}, 0)$ pto di min. loc. vincolato

OSSERVIAMO CHE POICHÈ IL VINCOLO $x^2+3y^2=6$ È COMPATTO (ELLISSE $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$) i pti di max e min. sono anche globali.

$$2t \ln t \, y' = (y-1)^{\frac{2}{3}} \qquad \boxed{t>0}$$

Se $y \neq 1 \qquad (y-1)^{-\frac{2}{3}} y' = \frac{1}{2t\ln t}$

$$\int (y-1)^{-\frac{2}{3}}\,dy = \int \frac{1}{2t\ln t}\,dt$$

$$3\sqrt[3]{y-1} = \frac{1}{2}\ln|\ln t| + c$$

$$\sqrt[3]{y-1} = \frac{1}{6}\ln|\ln t| + \frac{c}{3}$$

$$y(t) = \left(\frac{1}{6}\ln|\ln t| + \frac{c}{3}\right)^3 + 1$$

anche $y = 1$ è integr. particolare

Data la condizione di passaggio per $(e, 2)$, osserviamo che $f(t,x) = (y-1)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2t\ln t}$ è CONTINUA e la f_y è CONTINUA SU $I(e,2) \Rightarrow \exists!$ soluz.

IMPONIAMO IL PASSAGGIO

$$2 = \left(\frac{1}{6}\ln|\ln e| + \frac{c}{3}\right)^3 + 1$$

$$2 = \frac{c^3}{27} + 1 \Rightarrow c^3 = 27 \Rightarrow c = 3$$

la soluzione risulta:

$$y(t) = \left(\frac{1}{6}\ln|\ln t| + 1\right)^3 - 1$$

7. RISOLVIAMO PRIMA L'EQ. OMOGENEA ASSOCIATA

$$3y''+5y'-2y=0$$

$$3\lambda^2+5\lambda-2=0 \rightarrow \lambda_1=\frac{1}{3}\ ,\ \lambda_2=-2$$

$$y_0(t)=c_1e^{\frac{1}{3}t}+c_2e^{-2t}$$

TROVIAMO LA SOLUZ. PARTICOLARE DELLA FORMA $y_p(t)=ate^{-2t}$

[poiché $\lambda=-2$ è autovalore semplice]

$$y_p'=ae^{-2t}-2ate^{-2t}$$

$$y''=-2ae^{-2t}-2ae^{-2t}+4ate^{-2t}=$$

$$=-4ae^{-2t}+4ate^{-2t}$$

INSERISCO NELL'EQ. DIFF. NON OMOGENEA

$$-12ae^{-2t}+12ate^{-2t}+5ae^{-2t}-10ate^{-2t}-2ate^{-2t}=2e^{-2t}$$

$$-7ae^{-2t}=2e^{-2t}$$

$$-7a=2 \Rightarrow a=-\frac{2}{7}$$

$$y_p(t)=-\frac{2}{7}te^{-2t}$$

$$\Rightarrow y(t)=y_0(t)+y_p(t)=c_1e^{\frac{1}{3}t}+c_2e^{-2t}-\frac{2}{7}te^{-2t}$$

PASSA PER $(0,1)$: $1=c_1+c_2$

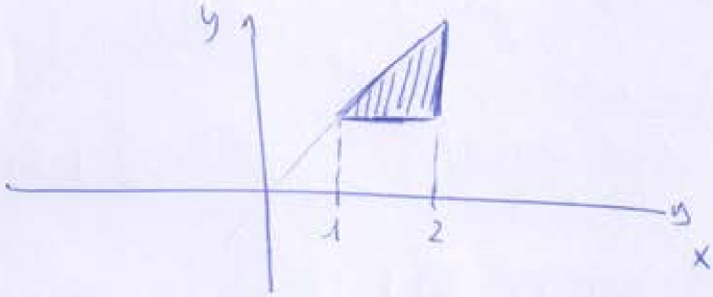
$$y'(t)=\frac{1}{3}c_1e^{\frac{1}{3}t}-2c_2e^{-2t}-\frac{2}{7}e^{-2t}+\frac{4}{7}te^{-2t}$$

$$2 = \frac{1}{3}c_1 - 2c_2 - \frac{2}{7}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \frac{1}{3}c_1 - 2c_2 = \frac{16}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = \frac{90}{49} \\ c_2 = -\frac{41}{49} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{90}{49}e^{\frac{1}{3}t} - \frac{41}{49}e^{-2t} - \frac{2}{7}t\,e^{-2t}$$

8. D rappresentato graficamente risulta:



è un dominio y-semplice. Quindi

$$\iint_D \left(\frac{1}{y^2} - e^{2x}\right) dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_1^x \left(\frac{1}{y^2} - e^{2x}\right) dy \right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left[-\frac{1}{y} - y e^{2x} \right]_1^x dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x} - x e^{2x} + 1 + e^{2x} \right) dx =$$

$$= \left[-\ln|x| - \frac{1}{2}x e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + x + \frac{1}{2}e^{2x} \right]_1^2 = 1 - \ln 2 - \frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{4}$$