

A86001/02 – a.a. 2017/18
MATEMATICA per ECONOMIA, FINANZA
e MANAGEMENT

Correttore

Voto

Esercizio	1			2	
Voto					

Seconda prova parziale
Modalità A

06 feb. 2018 – S1/spp2

Cognome _____

Nome _____

Matricola _____

Anno di corso _____

Classe:

S

H

A86001
A86002

Le risposte devono essere scritte unicamente sui fogli allegati.
Motivare sempre i risultati ottenuti.

Compilare la prima facciata con i propri dati.

E' vietato l'uso di qualsiasi dispositivo elettronico che possa essere connesso con altri apparecchi. Il semplice possesso di tali dispositivi, anche se spenti, comporta l'annullamento della prova e sanzioni disciplinari.

1. Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (3 pt) Siano

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Verificare quale sia vera tra le uguaglianze

i) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$

ii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{I}$

2. Enunciare poi la definizione di matrice inversa di una matrice quadrata \mathbf{A} di ordine n .

3. Dire se la matrice \mathbf{A} sia invertibile e, in caso di risposta affermativa, scrivere la sua matrice inversa.

b. (2 pt) Scrivere l'equazione della retta tangente nel suo punto di ascissa $x = 0$ al grafico della funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{t^2}}{t^2 + 2} dt$$

c. (3 pt) Determinare il dominio e gli eventuali asintoti verticali ed orizzontale della funzione

$$f(x) = \frac{e^{-x} + 1}{\sqrt{x - 3}}$$

2. Rispondere ai seguenti quesiti.

- a. (4 pt) Sono date la funzione di domanda $f_d(q) = \frac{400}{q+10}$ e la funzione di offerta $f_o(q) = q+10$, con $0 < q \leq 50$. Determinare l'equilibrio del mercato e calcolare il surplus del consumatore e del produttore.
- b. (3 pt) Sia $q(p) = 2e^{-\frac{1}{10}p+2}$, con $0 < p < 30$, la quantità domandata di un bene in funzione del suo prezzo. Dire per quali valori della variabile prezzo tale funzione di domanda è elastica.

A86001/02 – a.a. 2017/18
MATEMATICA per ECONOMIA, FINANZA
e MANAGEMENT

Correttore

Voto

Esercizio	1			2	
Voto					

<p>Seconda prova parziale Modalità B</p>

06 feb. 2018 – S1/spp2

Cognome _____

Nome _____

Matricola _____

Anno di corso _____

Classe:

S

H

A86001
A86002

Le risposte devono essere scritte unicamente sui fogli allegati.
Motivare sempre i risultati ottenuti.

Compilare la prima facciata con i propri dati.

E' vietato l'uso di qualsiasi dispositivo elettronico che possa essere connesso con altri apparecchi. Il semplice possesso di tali dispositivi, anche se spenti, comporta l'annullamento della prova e sanzioni disciplinari.

1. Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (3 pt) Siano

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

1. Verificare quale sia vera tra le uguaglianze

i) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$

ii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{I}$

2. Enunciare poi la definizione di matrice inversa di una matrice quadrata \mathbf{A} di ordine n .

3. Dire se la matrice \mathbf{A} sia invertibile e, in caso di risposta affermativa, scrivere la sua matrice inversa.

b. (2 pt) Scrivere l'equazione della retta tangente nel suo punto di ascissa $x = 1$ al grafico della funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^{t^2-1}}{t^2+2} dt$$

c. (3 pt) Determinare il dominio e gli eventuali asintoti verticali ed orizzontale della funzione

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{\sqrt{4-x}}$$

2. Rispondere ai seguenti quesiti.

- a. (4 pt) Sono date la funzione di domanda $f_d(q) = \frac{256}{q+8}$ e la funzione di offerta $f_o(q) = q+8$, con $0 < q \leq 30$. Determinare l'equilibrio del mercato e calcolare il surplus del consumatore e del produttore.
- b. (3 pt) Sia $q(p) = 4e^{-\frac{1}{8}p+2}$, con $0 < p < 40$, la quantità domandata di un bene in funzione del suo prezzo. Dire per quali valori della variabile prezzo tale funzione di domanda è elastica.

A86001/02 – a.a. 2017/18
MATEMATICA per ECONOMIA, FINANZA
e MANAGEMENT

Correttore

Voto

Esercizio	1			2	
Voto					

Seconda prova parziale
Modalità C

06 feb. 2018 – S1/spp2

Cognome _____

Nome _____

Matricola _____

Anno di corso _____

Classe:

S

H

A86001
A86002

Le risposte devono essere scritte unicamente sui fogli allegati.
Motivare sempre i risultati ottenuti.

Compilare la prima facciata con i propri dati.

E' vietato l'uso di qualsiasi dispositivo elettronico che possa essere connesso con altri apparecchi. Il semplice possesso di tali dispositivi, anche se spenti, comporta l'annullamento della prova e sanzioni disciplinari.

1. Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (3 pt) Siano

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Verificare quale sia vera tra le uguaglianze

i) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$

ii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{I}$

2. Enunciare poi la definizione di matrice inversa di una matrice quadrata \mathbf{A} di ordine n .

3. Dire se la matrice \mathbf{A} sia invertibile e, in caso di risposta affermativa, scrivere la sua matrice inversa.

b. (2 pt) Scrivere l'equazione della retta tangente nel suo punto di ascissa $x = 0$ al grafico della funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^2 + 2}{e^{t^2}} dt$$

c. (3 pt) Determinare il dominio e gli eventuali asintoti verticali ed orizzontale della funzione

$$f(x) = \frac{e^{-x} + 1}{\sqrt{x + 2}}$$

2. Rispondere ai seguenti quesiti.

- a. (4 pt) Sono date la funzione di domanda $f_d(q) = \frac{900}{q+15}$ e la funzione di offerta $f_o(q) = q+15$, con $0 < q \leq 40$. Determinare l'equilibrio del mercato e calcolare il surplus del consumatore e del produttore.
- b. (3 pt) Sia $q(p) = 3e^{-\frac{1}{6}p+3}$, con $0 < p < 20$, la quantità domandata di un bene in funzione del suo prezzo. Dire per quali valori della variabile prezzo tale funzione di domanda è elastica.

A86001/02 – a.a. 2017/18
**MATEMATICA per ECONOMIA, FINANZA
e MANAGEMENT**

Correttore

Voto

Esercizio	1			2	
Voto					

Seconda prova parziale
Modalità D

06 feb. 2018 – S1/spp2

Cognome _____

Nome _____

Matricola _____

Anno di corso _____

Classe:

S

H

A86001
A86002

Le risposte devono essere scritte unicamente sui fogli allegati.
Motivare sempre i risultati ottenuti.

Compilare la prima facciata con i propri dati.

E' vietato l'uso di qualsiasi dispositivo elettronico che possa essere
connesso con altri apparecchi. Il semplice possesso di tali dispositivi,
anche se spenti, comporta l'annullamento della prova e sanzioni
disciplinari.

1. Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (3 pt) Siano

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

1. Verificare quale sia vera tra le uguaglianze

i) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$

ii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{I}$

2. Enunciare poi la definizione di matrice inversa di una matrice quadrata \mathbf{A} di ordine n .

3. Dire se la matrice \mathbf{A} sia invertibile e, in caso di risposta affermativa, scrivere la sua matrice inversa.

b. (2 pt) Scrivere l'equazione della retta tangente nel suo punto di ascissa $x = 1$ al grafico della funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x \frac{t^2 + 2}{e^{t^2-1}} dt$$

c. (3 pt) Determinare il dominio e gli eventuali asintoti verticali ed orizzontale della funzione

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{\sqrt{1-x}}$$

2. Rispondere ai seguenti quesiti.

- a. (4 pt) Sono date la funzione di domanda $f_d(q) = \frac{324}{q+10}$ e la funzione di offerta $f_o(q) = q+10$, con $0 < q \leq 60$. Determinare l'equilibrio del mercato e calcolare il surplus del consumatore e del produttore.
- b. (3 pt) Sia $q(p) = 4e^{-\frac{1}{20}p+4}$, con $0 < p < 30$, la quantità domandata di un bene in funzione del suo prezzo. Dire per quali valori della variabile prezzo tale funzione di domanda è elastica.

1. Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (3 pt) Siano

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Verificare quale sia vera tra le uguaglianze

i) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$

ii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}} = \mathbf{I}$

2. Enunciare poi la definizione di matrice inversa di una matrice quadrata \mathbf{A} di ordine n .

3. Dire se la matrice \mathbf{A} sia invertibile e, in caso di risposta affermativa, scrivere la sua matrice inversa.

b. (2 pt) Scrivere l'equazione della retta tangente nel suo punto di ascissa $x = 0$ al grafico della funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{t^2}}{t^2 + 2} dt$$

c. (3 pt) Determinare il dominio e gli eventuali asintoti verticali ed orizzontale della funzione

$$f(x) = \frac{e^{-x} + 1}{\sqrt{x - 3}}$$

Soluzione:

(a)

1. Si ottiene

$$\text{i) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{I}$$

e

$$\text{ii) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

2. Si veda il libro di testo.

3. Essendo $\det \mathbf{A} = 1 \neq 0$, la matrice \mathbf{A} è invertibile e la sua matrice inversa è evidentemente $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$.

(b) Abbiamo $F(0) = 0$ ed, essendo

$$F'(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2 + 2}$$

$$F'(0) = \frac{1}{2}.$$

Pertanto la retta tangente richiesta ha equazione

$$y = \frac{1}{2}x$$

(c) Per il dominio della funzione, deve essere $x - 3 > 0$, e quindi $D = (3, +\infty)$.

Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$$

la retta $x = 3$ è un asintoto verticale ed essendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

2. Rispondere ai seguenti quesiti.

- a. (4 pt) Sono date la funzione di domanda $f_d(q) = \frac{400}{q+10}$ e la funzione di offerta $f_o(q) = q+10$, con $0 < q \leq 50$. Determinare l'equilibrio del mercato e calcolare il surplus del consumatore e del produttore.
- b. (3 pt) Sia $q(p) = 2e^{-\frac{1}{10}p+2}$, con $0 < p < 30$, la quantità domandata di un bene in funzione del suo prezzo. Dire per quali valori della variabile prezzo tale funzione di domanda è elastica.

Soluzione:

(a) Il punto di equilibrio del mercato è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} p = \frac{400}{q+10} \\ p = q+10 \end{cases}$$

da cui $q^* = 10$ e $p^* = 20$. Il surplus del consumatore è dato da

$$\begin{aligned} S_c &= \int_0^{10} \left(\frac{400}{q+10} - 20 \right) dq = [400 \ln(q+10) - 20q]_0^{10} = \\ &= 400 \ln 20 - 200 - 400 \ln 10 = 77,26 \end{aligned}$$

mentre il surplus del produttore è dato da

$$S_p = \int_0^{10} (20 - q - 10) dq$$

o, più semplicemente da $S_p = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 50,00$.

(b) Poiché

$$q'(p) = -\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{10}p+2}$$

si ottiene

$$|E_q(p)| = \frac{\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{10}p+2}}{2e^{-\frac{1}{10}p+2}}p = \frac{1}{10}p$$

Dovendo essere $|E_q(p)| > 1$, cioè $\frac{1}{10}p > 1$, si ottiene $10 < p < 30$.

1. Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (3 pt) Siano

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

1. Verificare quale sia vera tra le uguaglianze

i) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$

ii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{I}$

2. Enunciare poi la definizione di matrice inversa di una matrice quadrata \mathbf{A} di ordine n .

3. Dire se la matrice \mathbf{A} sia invertibile e, in caso di risposta affermativa, scrivere la sua matrice inversa.

b. (2 pt) Scrivere l'equazione della retta tangente nel suo punto di ascissa $x = 1$ al grafico della funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^{t^2-1}}{t^2+2} dt$$

c. (3 pt) Determinare il dominio e gli eventuali asintoti verticali ed orizzontale della funzione

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{\sqrt{4-x}}$$

Soluzione:

(a)

1. Si ottiene

$$\text{i) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

e

$$\text{ii) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \neq \mathbf{I}.$$

2. Si veda il libro di testo.

3. Essendo $\det \mathbf{A} = 1 \neq 0$, la matrice \mathbf{A} è invertibile e la sua matrice inversa è evidentemente \mathbf{B} .

(b) Abbiamo $F(1) = 0$ ed, essendo

$$F'(x) = \frac{e^{x^2-1}}{x^2+2}$$

$$F'(1) = \frac{1}{3}.$$

Pertanto la retta tangente richiesta ha equazione

$$y = \frac{1}{3}(x - 1)$$

(c) Per il dominio della funzione, deve essere $4 - x > 0$, e quindi $D = (-\infty, 4)$.
Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = +\infty$$

la retta $x = 4$ è un asintoto verticale ed essendo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

2. Rispondere ai seguenti quesiti.

- a. (4 pt) Sono date la funzione di domanda $f_d(q) = \frac{256}{q+8}$ e la funzione di offerta $f_o(q) = q+8$, con $0 < q \leq 30$. Determinare l'equilibrio del mercato e calcolare il surplus del consumatore e del produttore.
- b. (3 pt) Sia $q(p) = 4e^{-\frac{1}{8}p+2}$, con $0 < p < 40$, la quantità domandata di un bene in funzione del suo prezzo. Dire per quali valori della variabile prezzo tale funzione di domanda è elastica.

Soluzione:

(a) Il punto di equilibrio del mercato è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} p = \frac{256}{q+8} \\ p = q+8 \end{cases}$$

da cui $q^* = 8$ e $p^* = 16$. Il surplus del consumatore è dato da

$$\begin{aligned} S_c &= \int_0^8 \left(\frac{256}{q+8} - 16 \right) dq = [256 \ln(q+8) - 16q]_0^8 = \\ &= 256 \ln 16 - 128 - 256 \ln 8 = 49,45 \end{aligned}$$

mentre il surplus del produttore è dato da

$$S_p = \int_0^8 (16 - q - 8) dq$$

o, più semplicemente da $S_p = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32,00$.

(b) Poiché

$$q'(p) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{8}p+2}$$

si ottiene

$$|E_q(p)| = \frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{8}p+2}}{4e^{-\frac{1}{8}p+2}}p = \frac{1}{8}p$$

Dovendo essere $|E_q(p)| > 1$, cioè $\frac{1}{8}p > 1$, si ottiene $8 < p < 40$.

1. Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (3 pt) Siano

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Verificare quale sia vera tra le uguaglianze

i) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$

ii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{I}$

2. Enunciare poi la definizione di matrice inversa di una matrice quadrata \mathbf{A} di ordine n .

3. Dire se la matrice \mathbf{A} sia invertibile e, in caso di risposta affermativa, scrivere la sua matrice inversa.

b. (2 pt) Scrivere l'equazione della retta tangente nel suo punto di ascissa $x = 0$ al grafico della funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^2 + 2}{e^{t^2}} dt$$

c. (3 pt) Determinare il dominio e gli eventuali asintoti verticali ed orizzontale della funzione

$$f(x) = \frac{e^{-x} + 1}{\sqrt{x + 2}}$$

Soluzione:

(a)

1. Si ottiene

$$\text{i) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

e

$$\text{ii) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{I}.$$

2. Si veda il libro di testo.

3. Essendo $\det \mathbf{A} = 1 \neq 0$, la matrice \mathbf{A} è invertibile e la sua matrice inversa è evidentemente \mathbf{B} .

(b) Abbiamo $F(0) = 0$ ed, essendo

$$F'(x) = \frac{x^2 + 2}{e^{x^2}}$$

$$F'(0) = 2.$$

Pertanto la retta tangente richiesta ha equazione

$$y = 2x$$

(c) Per il dominio della funzione, deve essere $x + 2 > 0$, e quindi $D = (-2, +\infty)$.

Essendo

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

la retta $x = -2$ è un asintoto verticale ed essendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

2. Rispondere ai seguenti quesiti.

- a. (4 pt) Sono date la funzione di domanda $f_d(q) = \frac{900}{q+15}$ e la funzione di offerta $f_o(q) = q+15$, con $0 < q \leq 40$. Determinare l'equilibrio del mercato e calcolare il surplus del consumatore e del produttore.
- b. (3 pt) Sia $q(p) = 3e^{-\frac{1}{6}p+3}$, con $0 < p < 20$, la quantità domandata di un bene in funzione del suo prezzo. Dire per quali valori della variabile prezzo tale funzione di domanda è elastica.

Soluzione:

(a) Il punto di equilibrio del mercato è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} p = \frac{900}{q+15} \\ p = q+15 \end{cases}$$

da cui $q^* = 15$ e $p^* = 30$. Il surplus del consumatore è dato da

$$\begin{aligned} S_c &= \int_0^{15} \left(\frac{900}{q+15} - 30 \right) dq = [900 \ln(q+15) - 30q]_0^{15} = \\ &= 900 \ln 30 - 450 - 900 \ln 15 = 173,83 \end{aligned}$$

mentre il surplus del produttore è dato da

$$S_p = \int_0^{15} (30 - q - 15) dq$$

o, più semplicemente da $S_p = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 15 = 125,50$.

(b) Poiché

$$q'(p) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{6}p+3}$$

si ottiene

$$|E_q(p)| = \frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{6}p+3}}{3e^{-\frac{1}{6}p+3}}p = \frac{1}{6}p$$

Dovendo essere $|E_q(p)| > 1$, cioè $\frac{1}{6}p > 1$, si ottiene $6 < p < 20$.

1. Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (3 pt) Siano

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

1. Verificare quale sia vera tra le uguaglianze

i) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$

ii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}} = \mathbf{I}$

2. Enunciare poi la definizione di matrice inversa di una matrice quadrata \mathbf{A} di ordine n .

3. Dire se la matrice \mathbf{A} sia invertibile e, in caso di risposta affermativa, scrivere la sua matrice inversa.

b. (2 pt) Scrivere l'equazione della retta tangente nel suo punto di ascissa $x = 1$ al grafico della funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x \frac{t^2 + 2}{e^{t^2 - 1}} dt$$

c. (3 pt) Determinare il dominio e gli eventuali asintoti verticali ed orizzontale della funzione

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{\sqrt{1 - x}}$$

Soluzione:

(a)

1. Si ottiene

$$\text{i) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{I}$$

e

$$\text{ii) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

2. Si veda il libro di testo.

3. Essendo $\det \mathbf{A} = 1 \neq 0$, la matrice \mathbf{A} è invertibile e la sua matrice inversa è evidentemente $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$.

(b) Abbiamo $F(1) = 0$ ed, essendo

$$F'(x) = \frac{x^2 + 2}{e^{x^2 - 1}}$$

$$F'(1) = 3.$$

Pertanto la retta tangente richiesta ha equazione

$$y = 3(x - 1)$$

(c) Per il dominio della funzione, deve essere $1 - x > 0$, e quindi $D = (-\infty, 1)$.

Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

la retta $x = 1$ è un asintoto verticale ed essendo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

2. Rispondere ai seguenti quesiti.

- a. (4 pt) Sono date la funzione di domanda $f_d(q) = \frac{324}{q+10}$ e la funzione di offerta $f_o(q) = q+10$, con $0 < q \leq 60$. Determinare l'equilibrio del mercato e calcolare il surplus del consumatore e del produttore.
- b. (3 pt) Sia $q(p) = 4e^{-\frac{1}{20}p+4}$, con $0 < p < 30$, la quantità domandata di un bene in funzione del suo prezzo. Dire per quali valori della variabile prezzo tale funzione di domanda è elastica.

Soluzione:

(a) Il punto di equilibrio del mercato è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} p = \frac{324}{q+10} \\ p = q+10 \end{cases}$$

da cui $q^* = 8$ e $p^* = 18$. Il surplus del consumatore è dato da

$$\begin{aligned} S_c &= \int_0^8 \left(\frac{324}{q+10} - 18 \right) dq = [324 \ln(q+10) - 18q]_0^8 = \\ &= 324 \ln 18 - 144 - 324 \ln 10 = 46,44 \end{aligned}$$

mentre il surplus del produttore è dato da

$$S_p = \int_0^8 (18 - q - 10) dq$$

o, più semplicemente da $S_p = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32,00$.

(b) Poiché

$$q'(p) = -\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{20}p+4}$$

si ottiene

$$|E_q(p)| = \frac{\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{20}p+4}}{4e^{-\frac{1}{20}p+4}}p = \frac{1}{20}p$$

Dovendo essere $|E_q(p)| > 1$, cioè $\frac{1}{20}p > 1$, si ottiene $20 < p < 80$.