School of
Economics and Management

Matematica per Economia Finanza e Management

A86001/02 – a.a. 2016/17
MATEMATICA per ECONOMIA, FINANZA e MANAGEMENT

Correttore	Voto

Esercizio	1			2			3			
Voto										

Sessione Straordinaria
Primo appello

18 gen. 2018 – S1/01

Cognome ____________________

Nome ____________________

Matricola ____________________

Anno di corso ____________________

Classe: S H

A86001
A86002

Le risposte devono essere scritte unicamente sui fogli allegati. Motivare sempre i risultati ottenuti.
Compilare la prima facciata con i propri dati.
E' vietato l'uso di qualsiasi dispositivo elettronico che possa essere connesso con altri apparecchi. Il semplice possesso di tali dispositivi, anche se spenti, comporta l'annullamento della prova e sanzioni disciplinari.
I primi due esercizi sono comuni per tutti gli studenti. Risolvere il terzo esercizio relativo alla propria classe. Non saranno attribuiti punti per esercizi aggiuntivi risolti.

Primo Appello 18 gennaio 2018

1. Risolvere i seguenti esercizi.

a. (5 pt) Enunciare la definizione di funzione continua in un punto x_0 del proprio dominio. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + k & x < 1 \\ 3 + 4x \ln x & x \geq 1 \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}$

1. Determinare per quali valori di k la funzione sia continua in $x = 1$.
2. Verificare inoltre se, per tali valori di k, la funzione sia anche derivabile in $x = 1$.

b. (2 pt) Un'azienda produce un bene i cui costi totali, in funzione della quantità prodotta $0 \leq q \leq 100$, sono

$$C(q) = 100 + 6q$$

Sapendo che il prezzo unitario di vendita è $p(q) = 30 - \frac{1}{2}q$, calcolare il valore massimo del profitto $\pi(q)$.

c. (4 pt) Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Determinarne il rango;
2. Dato il vettore $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ k \\ -6 \end{bmatrix}$, determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ è possibile il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ed indicare il numero di soluzioni di tale sistema.

2. Un autocarro di prezzo $A = 36.000$ Euro viene acquistato da una azienda a rate. Il contratto prevede un anticipo in contanti $B = 2.500$ Euro ed il versamento di 48 rate mensili posticipate. Il tasso annuo nominale del contratto è $j_{12} = 2,65\%$.

a. (3 pt) Calcolare il tasso annuo effettivo del contratto;

b. (6 pt) Determinare l'importo delle rate costanti che dovrebbero essere pagate, scomporre la seconda rata in quota capitale e quota interessi e calcolare il monte interessi del contratto.

c. (2 pt) Calcolare l'importo delle rate nell'ipotesi che, oltre all'anticipo B, l'ultimo pagamento sia una maxirata pari a 10 volte il valore costante delle precedenti (il cliente dovrà quindi pagare l'anticipo B, seguito da 47 rate mensili posticipate costanti e da una 48ma maxirata alla scadenza del contratto).

3. (standard) Risolvere i seguenti quesiti.

   a. (2 pt) Data l'equazione
   $$y^2 = x^2 + \sin(xy)$$
   determinare l'espressione $y'(x)$ della derivata prima della funzione definita implicitamente $y(x)$.

   b. (2 pt) Determinare gli intervalli di convessità della funzione
   $$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2}$$

   c. (4 pt) Un investimento ha montante $M = 1.000$ e capitale iniziale $C = 885,87$.
      1. Calcolarne la durata sapendo che il tasso annuo semplice dell'operazione è $i = 1,80\%$.
      2. Calcolarne la durata sapendo che il tasso annuo di sconto commerciale dell'operazione è $d = 1,80\%$.

   d. (3 pt) Calcolare il tasso interno di rendimento dell'operazione finanziaria che prevede i flussi di cassa

tempo (anni)	0	$0,5$	1
pagamento (Euro)	-1.000	200	950

3. (challenge) Risolvere i seguenti quesiti:

   a. (6 pt) Data la funzione di due variabili

   $$F(x,y) = \frac{1}{x} + xy + \frac{1}{y}$$

      1. Scrivere l'espressione del gradiente in un generico punto (x,y).
      2. Determinare gli eventuali punti stazionari.
      3. Determinare, attraverso la matrice Hessiana, l'esistenza di eventuali estremanti locali.

   b. (5 pt) Data l'operazione finanziaria

tempo (mesi)	3	6	12	15
pagamento (Euro)	1.500	1.500	1.500	1.000

      1. Determinare il valore attuale netto dell'operazione finanziaria al tasso annuo composto effettivo $i = 3,45\%$.
      2. Determinare tra quanti mesi si verifica l'immunizzazione finanziaria al tasso annuo composto effettivo $i = 3,45\%$.

1. Risolvere i seguenti esercizi.

a. (5 pt) Enunciare la definizione di funzione continua in un punto x_0 del proprio dominio. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + k & x < 1 \\ 3 + 4x \ln x & x \geq 1 \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}$

1. Determinare per quali valori di k la funzione sia continua in $x = 1$.
2. Verificare inoltre se, per tali valori di k, la funzione sia anche derivabile in $x = 1$.

b. (2 pt) Un'azienda produce un bene i cui costi totali, in funzione della quantità prodotta $0 \leq q \leq 100$, sono

$$C(q) = 100 + 6q$$

Sapendo che il prezzo unitario di vendita è $p(q) = 30 - \frac{1}{2}q$, calcolare il valore massimo del profitto $\pi(q)$.

c. (4 pt) Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Determinarne il rango;
2. Dato il vettore $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ k \\ -6 \end{bmatrix}$, determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ è possibile il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ed indicare il numero di soluzioni di tale sistema.

Soluzione:

(a)

1. Poichè

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 + k \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$$

la funzione è contiuna in $x = 1$ per $k = 2$.

2. Fissato $k = 0$, la funzione derivata prima per $x \neq 1$ risulta essere

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 & x < 1 \\ 4 \ln x + 4 & x > 1 \end{cases}$$

Poiché risulta

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 4 = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = 4$$

la funzione risulta derivabile in $x = 1$.

(b) La funzione profitto risulta essere

$$\pi(q) = R(q) - C(q) = qp(q) - C(q) = -\frac{1}{2}q^2 + 24q - 100$$

Poiché

$$\pi'(q) = -q + 24 = 0$$

per $q = 24$ e la funzione è concava

$$\pi''(q) = -1 < 0$$

il punto trovato è di massimo globale con $\pi(24) = 188$.

(c)

1. La matrice ha rango compreso tra 2, poiché esiste almeno la sottomatrice quadrata non singolare di ordine 2:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

e 3, pari al minimo tra il numero di righe e di colonne di $\mathbf{A}$.
Le matrici orlate di $\mathbf{B}$ sono

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

entrambe singolari: $\det \mathbf{C}_1 = 0 = \det \mathbf{C}_2 = 0$. Quindi il rango di $\mathbf{A}$ è $r(\mathbf{A}) = 2$.

2. Occorre considerare la matrice completa

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & k \\ 1 & 5 & -3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

che ha rango compreso tra $r(\mathbf{A})$ e 3. Usando la stessa sottomatrice $\mathbf{B}$ del punto precedente, si può considerare l'orlata

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & k \\ 1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

che ha determinante, applicando la regola di Sarrus

$$\det \mathbf{C}_3 = 8(k+5)$$

Pertanto, se $k = -5$, tutte le oralate sono singolari e $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2 = r(\mathbf{A}) < 4 = n$, quindi il sistema ammette infinite soluzioni con due gradi di libertà. Altrimenti il sistema è impossibile: $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3 \neq r(\mathbf{A})$.

2. Un autocarro di prezzo $A = 36.000$ Euro viene acquistato da una azienda a rate. Il contratto prevede un anticipo in contanti $B = 2.500$ Euro ed il versamento di 48 rate mensili posticipate. Il tasso annuo nominale del contratto è $j_{12} = 2,65\%$.

a. (3 pt) Calcolare il tasso annuo effettivo del contratto;

b. (6 pt) Determinare l'importo delle rate costanti che dovrebbero essere pagate, scomporre la seconda rata in quota capitale e quota interessi e calcolare il monte interessi del contratto.

c. (2 pt) Calcolare l'importo delle rate nell'ipotesi che, oltre all'anticipo B, l'ultimo pagamento sia una maxirata pari a 10 volte il valore costante delle precedenti (il cliente dovrà quindi pagare l'anticipo B, seguito da 47 rate mensili posticipate costanti e da una 48ma maxirata alla scadenza del contratto).

Soluzione:

(a) Poiché $i_{12} = \frac{j_{12}}{12} = \frac{2,65\%}{12} = 0,2208\%$, si ottiene

$$i = (1 + 0,2208\%)^{12} - 1 = 2,6824\%$$

(b) L'importo della rata, considerando l'anticipo di 2500, è

$$R = 33.500 \times \frac{0,2208\%}{1 - (1 + 0,2208\%)^{-48}} = 736,3292$$

Il debito residuo dopo il pagamento della prima rata è

$$D_1 = 33.500 \times (1 + 0,2208\%) - 736,3292 = 32.837,65$$

Quindi la quota interessi nella seconda rata sarà

$$I_2 = D_1 \times 0,2208\% = 72,5165 \text{ Euro}$$

e la quota capitale

$$C_2 = R - I_2 = 663,8127 \text{ Euro}$$

Il monte interessi è dato dalla somma delle rate meno il debito iniziale, per cui

$$I = 48 \times R - D_0 = 1843,803$$

(c) Considerando adesso la maxirata finale, la condizione di chiusura iniziale diventa

$$33.500 = R \times \frac{(1 - (1 + 0,2208\%)^{-47})}{0,2208\%} + \frac{10R}{(1 + 2,6824\%)^4}$$

da cui la rata

$$\begin{aligned} R &= \frac{33500}{\frac{(1 - (1 + 0,2208\%)^{-47})}{0,2208\%} + \frac{10}{(1 + 2,6824\%)^4}} = \\ &= 625,0965 \end{aligned}$$

e la maxirata è pari a $R_{48} = 10 \times R = 6.250,965$.

3. (standard) Risolvere i seguenti quesiti.

a. (2 pt) Data l'equazione

$$y^2 = x^2 + \sin(xy)$$

determinare l'espressione $y'(x)$ della derivata prima della funzione definita implicitamente $y(x)$.

b. (2 pt) Determinare gli intervalli di convessità della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2}$$

c. (4 pt) Un investimento ha montante $M = 1.000$ e capitale iniziale $C = 885,87$.

1. Calcolarne la durata sapendo che il tasso annuo semplice dell'operazione è $i = 1,80\%$.
2. Calcolarne la durata sapendo che il tasso annuo di sconto commerciale dell'operazione è $d = 1,80\%$.

d. (3 pt) Calcolare il tasso interno di rendimento dell'operazione finanziaria che prevede i flussi di cassa

tempo (anni)	0	0,5	1
pagamento (Euro)	−1.000	200	950

Soluzione:

(a) Differenziando entrambi i lati dell'equazione

$$y^2(x) = x^2 + \sin(xy(x))$$

si ottiene

$$2y(x)\,y'(x) = 2x + \cos(xy(x))\,[y(x) + xy'(x)]$$

Quindi

$$[2y(x) - x\cos(xy(x))]\,y'(x) = 2x + y(x)\cos(xy(x))$$

e, finalmente,

$$y' = \frac{2x + y\cos(xy)}{2y - x\cos(xy)}$$

(b) La funzione è definita nell'insieme aperto $A = \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$ ed ivi due volte derivabile con

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-2) - (x^2-1)\,2x}{(x^2-2)^2} = \frac{-2x}{(x^2-2)^2}$$

e

$$f''(x) = -\frac{2(x^2-2)^2 - 4x(x^2-2)(2x)}{(x^2-2)^4} = 2\frac{3x^2+2}{(x^2-2)^3}$$

Il numeratore della derivata seconda è sempre positivo, mentre il denominatore è positivo per $x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$. Quindi, in base al segno della derivata seconda, la funzione risulta concava nell'intervallo $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ e convessa negli intervalli $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$ e $\left(\sqrt{2}, +\infty\right)$.

(c)

1. Nel caso di interesse semplice, poiché $M = C \times (1 + i \times T)$, la durata risulta essere
$$T = \frac{M - C}{C \times i} = 7,1574 \text{ anni}$$
2. Nel caso di sconto commerciale, poiché $C = M \times (1 - d \times T)$, la durata risulta essere
$$T = \frac{M - C}{M \times d} = 6,3406 \text{ anni}$$

(d) Dall'equazione
$$-1000 + \frac{200}{(1 + x_2)} + \frac{950}{(1 + x_2)^2} = 0$$
e procedendo alla sostituzione di $(1 + x_2)^{-1} = v$, si ricava un TIR semestrale $x_2 = 7,9796\%$ da cui il TIR è $x = (1 + x_2)^2 - 1 = 16,596\%$.

3. (challenge) Risolvere i seguenti quesiti:

   a. (6 pt) Data la funzione di due variabili

$$F(x,y) = \frac{1}{x} + xy + \frac{1}{y}$$

      1. Scrivere l'espressione del gradiente in un generico punto (x, y).
      2. Determinare gli eventuali punti stazionari.
      3. Determinare, attraverso la matrice Hessiana, l'esistenza di eventuali estremanti locali.

   b. (5 pt) Data l'operazione finanziaria

tempo (mesi)	3	6	12	15
pagamento (Euro)	1.500	1.500	1.500	1.000

      1. Determinare il valore attuale netto dell'operazione finanziaria al tasso annuo composto effettivo $i = 3,45\%$.
      2. Determinare tra quanti mesi si verifica l'immunizzazione finanziaria al tasso annuo composto effettivo $i = 3,45\%$.

Soluzione:

(a)

1. Risulta

$$\nabla F(x,y) = \begin{bmatrix} y - \frac{1}{x^2} \\ x - \frac{1}{y^2} \end{bmatrix}$$

2. I punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ x - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases}$$

   Ricavando dalla prima equazione

$$y = \frac{1}{x^2}$$

   e sostituendolo nella seconda si ottiene

$$x - \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} = x - x^4 = x\left(1 - x^3\right) = 0$$

   ovvero $x = 0$, non ammissibile perché la funzione non è ivi definita, e $x = 1$, da cui $y = 1$. L'unico punto stazionario è, quindi, $P = (1, 1)$.

3. La matrice Hessiana risulta essere

$$\nabla^2 F(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{2}{y^3} \end{bmatrix}$$

quindi, nel punto stazionario

$$\nabla^2 F(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Essendo $H_1 = 2 > 0$ e $H_2 = \det \nabla^2 F(1,1) = 3 > 0$, il punto è di minimo almeno locale.

(b)

1. Il valore attuale netto è

tempo (mesi)	3	6	12	15
pagamento (Euro)	1.500	1.500	1.500	1.000

$$\begin{aligned} NPV(3,45\%) &= \frac{1.500}{(1,0345)^{3/12}} + \frac{1.500}{(1,0345)^{6/12}} + \frac{1.500}{(1,0345)^{12/12}} + \frac{1.000}{(1,0345)^{15/12}} \\ &= 5.370,575 \text{ Euro} \end{aligned}$$

2. L'operazione risulta immunizzata dal rischio di tasso all'epoca

$$D = \frac{\frac{3}{12}\frac{1.500}{(1,0345)^{3/12}} + \frac{6}{12}\frac{1.500}{(1,0345)^{6/12}} + \frac{12}{12}\frac{1.500}{(1,0345)^{12/12}} + \frac{15}{12}\frac{1.000}{(1,0345)^{15/12}}}{5.370,575} = 0,700 \text{ anni}$$