Quarta prova parziale (Mod. A) 05 giugno 2018

1. Un contratto di finanziamento per un importo $S = 450.000$ Euro prevede il rimborso in 15 anni mediante il pagamento di rate mensili posticipate costanti. Il tasso annuo nominale convertibile mensilmente del contratto è $j_{12} = 3,60\%$.

a. (2 pt) Calcolare l'importo delle rate.

b. (3 pt) Scomporre la terza rata in quota di capitale e quota di interesse.

c. (3 pt) Dopo il pagamento della 85-esima rata, a seguito di rinegoziazione, il tasso annuo nominale convertibile mensilmente viene ridotto a $\hat{j}_{12} = 2,80\%$. Determinare l'importo della nuova rata mensile di ammortamento francese.

(a)

(b) Il contratto prevede $n = 180$ rate ed il tasso mensile è

$$i_{12} = \frac{j_{12}}{12} = 0,300\%$$

L'importo della rata è quindi

$$R = S \times \frac{i_{12}}{1 - (1 + i_{12})^{-n}} = 3.239,115 \text{ Euro}$$

(c) Per scomporre la terza rata occorre il debito residuo dopo il pagamento della seconda rata. Poiché

$$\begin{aligned} D_0 &= S \\ D_1 &= S \times (1 + i_{12}) - R = 448.110,885 \\ D_2 &= D_1 \times (1 + i_{12}) - R = 446.216,102 \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} I_3 &= D_2 \times i_{12} = 1.338,648 \\ C_3 &= R - I_2 = 1.900,467 \end{aligned}$$

(d) Residuano da pagare $k = n - 85 = 95$ rate, pertanto, il debito residuo dopo il pagamento della 85-esima rata è

$$D_{85} = R \times \frac{1 - (1 + i_{12})^{-k}}{i_{12}} = 267.404,982$$

Questo importo deve essere ammortizzato con k rate costanti mensili al tasso

$$x_{12} = \frac{\hat{j}_{12}}{12} = 0,233\%$$

e l'importo della nuova rata è

$$\hat{R} = D_{85} \times \frac{x_{12}}{1 - (1 + x_{12})^{-k}} = 3.141,547 \text{ Euro}$$

2. (standard) Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (4 pt) Data una legge finanziaria $f(t)$ con intensità istantanea di interesse $\rho(t) = \dfrac{0,01}{1+0,01t}$, determinare

1. l'espressione analitica del fattore di montante $f(t)$;
2. il montante di 10.000 Euro impiegati per 2 anni e 2 mesi;
3. il tasso annuo d'interesse composto effettivo finanziariamente equivalente all'impiego descritto al punto precedente.

b. (3 pt) Determinare nel punto $(0,0)$ la pendenza della curva di livello $k=1$ della funzione

$$F(x,y) = e^{y+3x^2} + 5y$$

Soluzione:

(a) .

1. Il fattore di montante risulta essere

$$f(t) = \exp\left\{\int_0^t \frac{0,01}{1+0,01s} ds\right\} = \exp\{\ln 1 + 0,01t\} = 1 + 0,01t$$

2. Il montante richiesto è quindi

$$M = 10.000 \times f\left(2 + \frac{2}{12}\right) = 10.216,67$$

3. Il tasso annuo composto finanziariamente equivalente risulta tale che

$$10.216,67 = 10.000 \times (1+i)^{26/12}$$

da cui $i = 0,009943 = 0,9943\%$ circa.

(b) Indicando con $g(x,y) = F(x,y) - 1$, si ottiene

$$f'(x) = -\frac{6xe^{y+3x^2}}{e^{y+3x^2} + 5}$$

la pendenza richiesta è $f'(0) = 0$.

2. (challenge) Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (4 pt) Sono disponibili due investimenti che promettono i pagamenti

(A)

epoca (anni)	1	2	3
flusso di cassa (Euro)	200	240	400

(B)

epoca (anni)	1
flusso di cassa (Euro)	200

1. Calcolare la Duration di (A) e di (B) al tasso annuo composto effettivo $i = 3\%$
2. Determinare la quota α da investire nell'operazione (A) affinché il portafoglio composto da α quote di (A) e $1-\alpha$ quote di (B) sia immunizzato dal rischio di tasso all'epoca $D = 2$

b. (3 pt) Determinare gli eventuali estremanti liberi della funzione

$$F(x, y, z) = x + yz + 2z - x^2 - y^2 - z^2$$

Soluzione:

(a) .

1. Risulta

$$D_A = \frac{1 \times \frac{200}{1{,}03} + 2 \times \frac{240}{1{,}03^2} + 3 \times \frac{400}{1{,}03^3}}{\frac{200}{1{,}03} + \frac{240}{1{,}03^2} + \frac{400}{1{,}03^3}} = 2,21856$$

e

$$D_B = 1$$

2. Poiché la duration del portafogli è la media ponderata delle duration degli investimenti in esso contenuti, deve essere

$$\alpha D_A + (1-\alpha) D_B = 2$$

da cui $\alpha = 0,82064$.

(b) La condizione necessaria è risolta quando

$$\begin{cases} 1 - 2x = 0 \\ z - 2y = 0 \\ y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

ovvero nel punto $P = \left[x = \frac{1}{2}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{4}{3}\right]$. La condizione sufficiente richiede lo studio dei minori principali di NW della matrice Hessiana

$$\nabla^2 F(x, y, z) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

essendo costante, non è necessario sostituire i valori trovati per il punto stazionario e si ottiene

$$\begin{aligned} H_1 &= -2 < 0 \\ H_2 &= \det \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 4 > 0 \\ H_3 &= \det \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = -6 < 0 \end{aligned}$$

ovvero un punto di massimo almeno locale.

1. Un contratto di finanziamento per un importo $S = 350.000$ Euro prevede il rimborso in 20 anni mediante il pagamento di rate mensili posticipate costanti. Il tasso annuo nominale convertibile mensilmente del contratto è $j_{12} = 3,60\%$.

a. (2 pt) Calcolare l'importo delle rate.

b. (3 pt) Scomporre la terza rata in quota di capitale e quota di interesse.

c. (3 pt) Dopo il pagamento della 90-esima rata, a seguito di rinegoziazione, il tasso annuo nominale convertibile mensilmente viene ridotto a $\hat{j}_{12} = 2,80\%$. Determinare l'importo della nuova rata di ammortamento francese.

Soluzione:

(a) Il contratto prevede $n = 240$ rate ed il tasso mensile è

$$i_{12} = \frac{j_{12}}{12} = 0,300\%$$

L'importo della rata è quindi

$$R = S \times \frac{i_{12}}{1-(1+i_{12})^{-n}} = 2.047,890 \text{ Euro}$$

(b) Per scomporre la terza rata occorre il debito residuo dopo il pagamento della seconda rata. Poiché

$$\begin{aligned} D_0 &= S \\ D_1 &= S \times (1+i_{12}) - R = 349.002,110 \\ D_2 &= D_1 \times (1+i_{12}) - R = 348.001,226 \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} I_3 &= D_2 \times i_{12} = 1.044,004 \\ C_3 &= R - I_2 = 1.003,886 \end{aligned}$$

(c) Residuano da pagare $k = n - 90 = 150$ rate, pertanto, il debito residuo dopo il pagamento della 90-esima rata è

$$D_{90} = R \times \frac{1-(1+i_{12})^{-k}}{i_{12}} = 247.072,595$$

Questo importo deve essere ammortizzato con k rate costanti mensili al tasso

$$x_{12} = \frac{\hat{j}_{12}}{12} = 0,233\%$$

e l'importo della nuova rata è

$$\hat{R} = D_{85} \times \frac{x_{12}}{1-(1+x_{12})^{-k}} = 1.954,084 \text{ Euro}$$

2. (standard) Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (4 pt) Data una legge finanziaria $f(t)$ con intensità istantanea di interesse $\rho(t) = \dfrac{0,02}{1+0,02t}$, determinare

1. l'espressione analitica del fattore di montante $f(t)$;
2. il montante di 20.000 Euro impiegati per 2 anni e 2 mesi;
3. il tasso annuo d'interesse composto effettivo finanziariamente equivalente all'impiego descritto al punto precedente.

b. (3 pt) Determinare nel punto $(0,0)$ la pendenza della curva di livello $k = -3$ della funzione

$$F(x,y) = -3e^{y+3x^2} - 15y$$

Soluzione:

(a) .

1. Il fattore di montante risulta essere

$$f(t) = \exp\left\{\int_0^t \frac{0,02}{1+0,02s}ds\right\} = \exp\left\{\ln 1 + 0,02t\right\} = 1 + 0,02t$$

2. Il montante richiesto è quindi

$$M = 20.000 \times f\left(2 + \frac{2}{12}\right) = 20.866,67$$

3. Il tasso annuo composto finanziariamente equivalente risulta tale che

$$20.866,67 = 20.000 \times (1+i)^{26/12}$$

da cui $i = 0,0197717 = 1,977\%$ circa.

(b) Indicando con $g(x,y) = F(x,y) - 3$, si ottiene

$$f'(x) = \frac{18xe^{y+3x^2}}{3e^{y+3x^2} + 15}$$

la pendenza richiesta è $f'(0) = 0$.

2. (challenge) Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (4 pt) Sono disponibili due investimenti che prometto i pagamenti

(A)

epoca (anni)	1	2	3
flusso di cassa (Euro)	250	300	500

(B)

epoca (anni)	1
flusso di cassa (Euro)	250

1. Calcolare la Duration di (A) e di (B) al tasso annuo composto effettivo $i = 3\%$
2. Determinare la quota α da investire nell'operazione (A) affinché il portafoglio composto da α quote di (A) e $1-\alpha$ quote di (B) sia immunizzato dal rischio di tasso all'epoca $D = 2$

b. (3 pt) Determinare gli eventuali estremanti liberi della funzione

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - x - yz - 2z$$

Soluzione:

(a) .

1. Risulta

$$D_A = \frac{1 \times \frac{250}{1{,}03} + 2 \times \frac{300}{1{,}03^2} + 3 \times \frac{500}{1{,}03^3}}{\frac{250}{1{,}03} + \frac{300}{1{,}03^2} + \frac{500}{1{,}03^3}} = 2,21856$$

e

$$D_B = 1$$

2. Poiché la duration del portafogli è la media ponderata delle duration degli investimenti in esso contenuti, deve essere

$$\alpha D_A + (1-\alpha) D_B = 2$$

da cui $\alpha = 0,82064$.

(b) La condizione necessaria è risolta quando

$$\begin{cases} -1 + 2x = 0 \\ -z + 2y = 0 \\ -y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

ovvero nel punto $P = \left[x = \frac{1}{2}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{4}{3}\right]$. La condizione sufficiente richiede lo studio dei minori principali di NW della matrice Hessiana

$$\nabla^2 F(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

essendo costante, non è necessario sostituire i valori trovati per il punto stazionario e si ottiene

$$\begin{aligned} H_1 &= 2 > 0 \\ H_2 &= \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 4 > 0 \\ H_3 &= \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 6 > 0 \end{aligned}$$

ovvero un punto di minimo almeno locale.

Quarta prova parziale (Mod. C) 05 giugno 2018

1. Un contratto di finanziamento per un importo $S = 540.000$ Euro prevede il rimborso in 15 anni mediante il pagamento di rate mensili posticipate costanti. Il tasso annuo nominale convertibile mensilmente del contratto è $j_{12} = 6,30\%$.

a. (2 pt) Calcolare l'importo delle rate.

b. (3 pt) Scomporre la terza rata in quota di capitale e quota di interesse.

c. (3 pt) Dopo il pagamento della 85-esima rata, a seguito di rinegoziazione, il tasso annuo nominale convertibile mensilmente viene ridotto a $\hat{j}_{12} = 5,80\%$. Determinare l'importo della nuova rata mensile di ammortamento francese.

Soluzione:

(a) Il contratto prevede $n = 180$ rate ed il tasso mensile è

$$i_{12} = \frac{j_{12}}{12} = 0,525\%$$

L'importo della rata è quindi

$$R = S \times \frac{i_{12}}{1 - (1 + i_{12})^{-n}} = 4.644,812 \text{ Euro}$$

(b) Per scomporre la terza rata occorre il debito residuo dopo il pagamento della seconda rata. Poiché

$$\begin{aligned} D_0 &= S \\ D_1 &= S \times (1 + i_{12}) - R = 538.190,188 \\ D_2 &= D_1 \times (1 + i_{12}) - R = 536.370,875 \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} I_3 &= D_2 \times i_{12} = 2.815,947 \\ C_3 &= R - I_2 = 1.828,865 \end{aligned}$$

(c) Residuano da pagare $k = n - 85 = 95$ rate, pertanto, il debito residuo dopo il pagamento della 85-esima rata è

$$D_{85} = R \times \frac{1 - (1 + i_{12})^{-k}}{i_{12}} = 346.739,957$$

Questo importo deve essere ammortizzato con k rate costanti mensili al tasso

$$x_{12} = \frac{\hat{j}_{12}}{12} = 0,483\%$$

e l'importo della nuova rata è

$$\hat{R} = D_{85} \times \frac{x_{12}}{1 - (1 + x_{12})^{-k}} = 4.560,412 \text{ Euro}$$

2. (standard) Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (4 pt) Data una legge finanziaria $f(t)$ con intensità istantanea di interesse $\rho(t) = \dfrac{0,03}{1+0,03t}$, determinare

1. l'espressione analitica del fattore di montante $f(t)$;
2. il montante di 15.000 Euro impiegati per 4 anni e 4 mesi;
3. il tasso annuo d'interesse composto effettivo finanziariamente equivalente all'impiego descritto al punto precedente.

b. (3 pt) Determinare nel punto $(0,0)$ la pendenza della curva di livello $k = 2$ della funzione

$$F(x,y) = 2e^{y+3x^2} + 10y$$

Soluzione:

(a) .

1. Il fattore di montante risulta essere

$$f(t) = \exp\left\{\int_0^t \frac{0,03}{1+0,03s} ds\right\} = \exp\{\ln 1 + 0,03t\} = 1 + 0,03t$$

2. Il montante richiesto è quindi

$$M = 15.000 \times f\left(4 + \frac{4}{12}\right) = 16.950$$

3. Il tasso annuo composto finanziariamente equivalente risulta tale che

$$16.950 = 15.000 \times (1+i)^{52/12}$$

da cui $i = 0,02860656 = 2,861\%$ circa.

(b) Indicando con $g(x,y) = F(x,y) - 2$, si ottiene

$$f'(x) = -\frac{12xe^{y+3x^2}}{2e^{y+3x^2} + 10}$$

la pendenza richiesta è $f'(0) = 0$.

2. (challenge) Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (4 pt) Sono disponibili due investimenti che prometto i pagamenti

(A)

epoca (anni)	1	2	3
flusso di cassa (Euro)	300	360	600

(B)

epoca (anni)	1
flusso di cassa (Euro)	300

1. Calcolare la Duration di (A) e di (B) al tasso annuo composto effettivo $i = 3\%$
2. Determinare la quota α da investire nell'operazione (A) affinché il portafoglio composto da α quote di (A) e $1 - \alpha$ quote di (B) sia immunizzato dal rischio di tasso all'epoca $D = 2$

b. (3 pt) Determinare gli eventuali estremanti liberi della funzione

$$F(x, y, z) = 4x + 4yz + 8z - 4x^2 - 4y^2 - 4z^2$$

Soluzione:

(a) .

1. Risulta

$$D_A = \frac{1 \times \frac{300}{1{,}03} + 2 \times \frac{360}{1{,}03^2} + 3 \times \frac{600}{1{,}03^3}}{\frac{300}{1{,}03} + \frac{360}{1{,}03^2} + \frac{600}{1{,}03^3}} = 2,21856$$

e

$$D_B = 1$$

2. Poiché la duration del portafogli è la media ponderata delle duration degli investimenti in esso contenuti, deve essere

$$\alpha D_A + (1 - \alpha)\, D_B = 2$$

da cui $\alpha = 0,82064$.

(b) La condizione necessaria è risolta quando

$$\begin{cases} 4 - 8x = 0 \\ 4z - 8y = 0 \\ 4y - 8z + 8 = 0 \end{cases}$$

ovvero nel punto $P = \left[x = \frac{1}{2}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{4}{3}\right]$. La condizione sufficiente richiede lo studio dei minori principali di NW della matrice Hessiana

$$\nabla^2 F\,(x, y, z) = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

essendo costante, non è necessario sostituire i valori trovati per il punto stazionario e si ottiene

$$\begin{aligned} H_1 &= -8 < 0 \\ H_2 &= \det \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} = +64 > 0 \\ H_3 &= \det \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} = -384 < 0 \end{aligned}$$

ovvero un punto di massimo almeno locale.

1. Un contratto di finanziamento per un importo $S = 530.000$ Euro prevede il rimborso in 20 anni mediante il pagamento di rate mensili posticipate costanti. Il tasso annuo nominale convertibile mensilmente del contratto è $j_{12} = 6,30\%$.

a. (2 pt) Calcolare l'importo delle rate.

b. (3 pt) Scomporre la terza rata in quota di capitale e quota di interesse.

c. (3 pt) Dopo il pagamento della 90-esima rata, a seguito di rinegoziazione, il tasso annuo nominale convertibile mensilmente viene ridotto a $\hat{j}_{12} = 5,80\%$. Determinare l'importo della nuova rata mensile di ammortamento francese.

Soluzione:

(a) Il contratto prevede $n = 240$ rate ed il tasso mensile è

$$i_{12} = \frac{j_{12}}{12} = 0,525\%$$

L'importo della rata è quindi

$$R = S \times \frac{i_{12}}{1-(1+i_{12})^{-n}} = 3.889,381 \text{ Euro}$$

(b) Per scomporre la terza rata occorre il debito residuo dopo il pagamento della seconda rata. Poiché

$$\begin{aligned} D_0 &= S \\ D_1 &= S \times (1+i_{12}) - R = 528.893,119 \\ D_2 &= D_1 \times (1+i_{12}) - R = 527.780,427 \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} I_3 &= D_2 \times i_{12} = 2.770,847 \\ C_3 &= R - I_2 = 1.118,534 \end{aligned}$$

(c) Residuano da pagare $k = n - 90 = 150$ rate, pertanto, il debito residuo dopo il pagamento della 90-esima rata è

$$D_{90} = R \times \frac{1-(1+i_{12})^{-k}}{i_{12}} = 403.073,904$$

Questo importo deve essere ammortizzato con k rate costanti mensili al tasso

$$x_{12} = \frac{\hat{j}_{12}}{12} = 0,483\%$$

e l'importo della nuova rata è

$$\hat{R} = D_{85} \times \frac{x_{12}}{1-(1+x_{12})^{-k}} = 3.784,152 \text{ Euro}$$

2. (standard) Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (4 pt) Data una legge finanziaria $f(t)$ con intensità istantanea di interesse $\rho(t) = \dfrac{0,04}{1+0,04t}$, determinare

1. l'espressione analitica del fattore di montante $f(t)$;
2. il montante di 25.000 Euro impiegati per 3 anni e 3 mesi;
3. il tasso annuo d'interesse composto effettivo finanziariamente equivalente all'impiego descritto al punto precedente.

b. (3 pt) Determinare nel punto $(0,0)$ la pendenza della curva di livello $k = -1$ della funzione

$$F(x,y) = -e^{y+3x^2} - 5y$$

Soluzione:

(a) .

1. Il fattore di montante risulta essere

$$f(t) = \exp\left\{\int_0^t \frac{0,04}{1+0,04s} ds\right\} = \exp\left\{\ln 1 + 0,04t\right\} = 1 + 0,04t$$

2. Il montante richiesto è quindi

$$M = 25.000 \times f\left(3 + \frac{3}{12}\right) = 28.250$$

3. Il tasso annuo composto finanziariamente equivalente risulta tale che

$$28.250 = 25.000 \times (1+i)^{39/12}$$

da cui $i = 0,0383215 = 3,832\%$ circa.

(b) Indicando con $g(x,y) = F(x,y) - 2$, si ottiene

$$f'(x) = -\frac{6xe^{y+3x^2}}{e^{y+3x^2} + 5}$$

la pendenza richiesta è $f'(0) = 0$.

2. (challenge) Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (4 pt) Sono disponibili due investimenti che prometto i pagamenti

(A)

epoca (anni)	1	2	3
flusso di cassa (Euro)	400	480	800

(B)

epoca (anni)	1
flusso di cassa (Euro)	400

1. Calcolare la Duration di (A) e di (B) al tasso annuo composto effettivo $i = 3\%$
2. Determinare la quota α da investire nell'operazione (A) affinché il portafoglio composto da α quote di (A) e $1-\alpha$ quote di (B) sia immunizzato dal rischio di tasso all'epoca $D = 2$

b. (3 pt) Determinare gli eventuali estremanti liberi della funzione

$$F(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3x - 3yz - 6z$$

Soluzione:

(a) .

1. Risulta

$$D_A = \frac{1 \times \frac{400}{1{,}03} + 2 \times \frac{480}{1{,}03^2} + 3 \times \frac{800}{1{,}03^3}}{\frac{400}{1{,}03} + \frac{480}{1{,}03^2} + \frac{800}{1{,}03^3}} = 2,21856$$

e

$$D_B = 1$$

2. Poiché la duration del portafogli è la media ponderata delle duration degli investimenti in esso contenuti, deve essere

$$\alpha D_A + (1-\alpha) D_B = 2$$

da cui $\alpha = 0,82064$.

(b) La condizione necessaria è risolta quando

$$\begin{cases} 6x - 3 = 0 \\ 6y - 3z = 0 \\ 6z - 3y - 6 = 0 \end{cases}$$

ovvero nel punto $P = \left[x = \frac{1}{2}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{4}{3}\right]$. La condizione sufficiente richiede lo studio dei minori principali di NW della matrice Hessiana

$$\nabla^2 F(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

essendo costante, non è necessario sostituire i valori trovati per il punto stazionario e si ottiene

$$\begin{aligned} H_1 &= 6 > 0 \\ H_2 &= \det \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 36 > 0 \\ H_3 &= \det \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} = 162 > 0 \end{aligned}$$

ovvero un punto di minimo almeno locale.