ES. 1

a) $P(X>1) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) =$
$= 0.2 + 0.1 + 0.1 = 0.4$

b) La mediana è 1 (Infatti $P(X \leq 1) = 0.6$ e $P(X \leq 0) = 0.4$)

c) $Var(X) = [1 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.2 + 9 \cdot 0.1 + 16 \cdot 0.1] - E(X)^2 =$
$= 3.5 - [1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.1]^2 =$
$= 3.5 - 1.3^2 = 3.5 - 1.69 = 1.81$

d) T = spesa ~~cliente~~ ; $T = 10X$
$E(T) = 10 \cdot E(X) = 10 \cdot (1.3) = 13$

e) distribuzione di T

t	$p_T(t)$
0	0.4
10	0.2
20	0.2
30	0.1
40	0.1

ES. 2 X = tempo necessario per la produzione di un'unità

$E(X) = 10$, $\sigma(X) = 2$

T = costo produzione una unità

$T = 20 + 2X$

a) $E(T) = 20 + 2E(X) = 20 + 2 \cdot 10 = 40$

b) $\sigma(T) = \sqrt{Var(T)} = \sqrt{4 \cdot Var(X)} = \sqrt{4 \cdot 4} = 4$

ES. 3

a) X ha distribuzione simmetrica rispetto a 1; infatti sia i valori, sia le corrispondenti probabilità sono simmetriche rispetto a 1.

b) Valore atteso e mediana di X sono uguali a 1; infatti, se la distribuzione è simmetrica, valore atteso e mediana coincidono col centro di simmetria.

c) $S_Y = \{-3, -1, 5, 29\}$

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0.1 & y=-3; \\ 0.4 & y=-1; \\ 0.3 & y=5; \\ 0.2 & y=29; \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

ES. 4 X = numero auto, tra le 20 in divieto, che vengono multate

$X \sim Bin(20, 0.3)$

a) $P(X \geq 5) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4) =$
$= 1 - 0.001 - 0.007 - 0.028 - 0.072 - 0.130 = 0.762$

b) $P(X=7) = \frac{20!}{7!\,13!}(0.3)^7(0.7)^{13} = 0.164$

c) $P(6 \leq X \leq 8) = P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) =$
$= 0.192 + 0.164 + 0.114 = 0.47$

d) T = ammontare multe ; $T = 50X$

$E(T) = 50\,E(X) = 50 \cdot 20 \cdot 0.3 = 300$

$\sigma(T) = \sqrt{Var(T)} = \sqrt{2500 \cdot 20 \cdot (0.3)(0.7)} = \sqrt{10500} = 102.47$

ES. 5 X = numero volte, sulle 5, in cui il pendolare trova posto

$X \sim Bin(5, 0.6)$

a) $P(X=0) = \frac{5!}{0!\,5!}(0.6)^0(0.4)^5 = (0.4)^5 = 0.0102$

b) $P(X=5) = \frac{5!}{5!\,0!}(0.6)^5(0.4)^0 = (0.6)^5 = 0.0778$

c) $P(X<4) = 1 - P(X=4) - P(X=5) =$
$= 1 - 0.259 - 0.078 = 0.663$

Es. 6

X = numero fatture, sulle 12, con errori formali

$X \sim Bin(12, 0.08)$

a) $P(X>3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) =$
$= 1 - 0.368 - 0.384 - 0.183 - 0.053 = 0.012$

b) Costo $= T = 10X$

$E(T) = 10 \cdot E(X) = 10 \cdot 12 \cdot 0.08 = 9.6$

$Var(T) = 100 \cdot Var(X) = 100 \cdot 12 \cdot (0.08)(0.92) = 88.32$

Es. 7

X = numero telefonate indesiderate in un giorno

$X \sim Poisson(2.6)$

a) $P(X>3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.736 = 0.264$

b) $P(2 < X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 2) = 0.951 - 0.518 = 0.433$

c) Y = numero telef. inder. in 4 giorni

$Y \sim Poisson(10.4)$

$P(Y=10) = (10.4)^{10} e^{-10.4} / 10! = 0.124$

d) Z = numero telef. in 3 giorni

$Z \sim Poisson(7.8)$

$E(Z) = 7.8$; $\sigma(Z) = \sqrt{Var(Z)} = \sqrt{7.8} = 2.793$

Es. 8

X = numero contratti stipulati in una settimana

$X \sim Poisson(1.8)$

a) $P(X \leq 4) = 0.964$

b) $P(X=3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = 0.891 - 0.731 = 0.16$

c) $T = 100 \cdot X$ = benefit

$E(T) = 100 \cdot E(X) = 100 \cdot 1.8 = 180$

$\sigma(T) = \sqrt{Var(T)} = \sqrt{10000 \cdot 1.8} = \sqrt{18000} = 134.164$

ES.9

a) X = numero arrivi in 5 minuti

$X \sim \text{Poisson}(1.5)$

$P(X>2) = 1-P(X\leq 2) = 1-0.809 = 0.191$

b) Y = numero arrivi in 20 minuti

$Y \sim \text{Poisson}(6)$

$P(Y \geq 5) = 1-P(Y\leq 4) = 1-0.285 = 0.715$

c) $P(Y=4) = P(Y\leq 4) - P(Y \leq 3) = 0.285 - 0.151 = 0.134$

d) Z = numero arrivi in 30 minuti; $Z \sim \text{Poisson}(9)$

$E(Z) = 9$

e) $\sigma(Z) = \sqrt{Var(Z)} = \sqrt{9} = 3$

ES.10 X, Y indip., $X \sim Bin(2, 0.2)$, $Y \sim Bern(0.4)$

a) $P(X=0, Y=0) = P(X=0)\cdot P(Y=0) = \left[\frac{2!}{0!\,2!}(0.2)^0(0.8)^2\right](0.6) = 0.384$

b) $P(X=3, Y=1) = P(X=3)P(Y=1) = 0$

c) $P(X<2) = 1-P(X=2) = 1 - \frac{2!}{2!\,0!}(0.2)^2(0.8)^0 = 0.96$

d) $P(X+Y=3) = P(X=2)P(Y=1) = (0.04)(0.4) = 0.016$

e) $\rho(X,Y) = 0$ perché X e Y sono indipendenti

f) $P(X=1/Y=0) = P(X=1) = \frac{2!}{1!\,1!}(0.2)^1(0.8)^1 = 0.32$

ES.11 a) No; ad esempio, $P(X=0, Y=0) = 0 \neq P(X=0)\cdot P(Y=0)$

b) $cov(X,Y) = [(0.2)+(0.2)+(0.4)+(0.6)+(0.6)] - [0.3+0.6+0.9][0.6+0.4+0.3] =$

$= 2 - (1.8)\cdot(1.3) = -0.34$

$Var(X) = [(0.3)+1.2+2.7] - 1.8^2 = (4.2) - 1.8^2 = 0.96$

$Var(Y) = [0.6+0.8+0.9] - 1.3^2 = (2.3) - 1.69 = 0.61$

$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} = \frac{-0.34}{\sqrt{0.96}\sqrt{0.61}} = -0.4443$

Esiste una relazione lineare "inversa", ovvero "negativa", ovvero "discordante", di media intensità tra X e Y.

c) $S_T = \{2, 3, 4, 5\}$

t	$P(T=t)$
2	0.3
3	0.4
4	0.2
5	0.1

d) $P(Y=2 \mid X=0) = 1$

La distribuzione di Y dato $X=0$ è degenere in 2.