Università "Carlo Cattaneo"

Ingegneria gestionale

Analisi matematica

a.a. 2017/2018

INTEGRALI GENERALIZZATI

ESERCIZI CON SOLUZIONE

1) Discutere la convergenza o meno dei seguenti integrali generalizzati:

a) $\int_0^3 \frac{1}{x^2}\,dx$;

b) $\int_0^1 x\ln x\,dx$;

c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$;

d) $\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}\,dx$;

e) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

a) Si tratta di un integrale di prima specie:

$$\int_0^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_c^3 = \lim_{c\to 0^+}\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{c}\right] = +\infty$$

l'integrale diverge e quindi la funzione non è integrabile in senso generalizzato. (osserviamo che la funzione integranda per $x\to 0$ è un infinito di ordine 2)

b) Si ha:

$$\int_0^1 x\ln x\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 x\ln x\,dx = \lim_{c\to 0^+}\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_c^1 =$$

$$= \lim_{c\to 0}\left(-\frac{1}{4}-\frac{c^2}{2}\ln c+\frac{c^2}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$, la funzione è integrabile in senso generalizzato.

(osserviamo che la funzione integranda per $x\to 0$ tende a zero e quindi è integrabile nell'intervallo $[0,1]$)

c) Si tratta di un integrale di seconda specie:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx=\lim_{c\to+\infty}\int_1^{c}\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx=\lim_{c\to+\infty}\left[2\sqrt{x-1}\right]_1^c=\lim_{c\to+\infty}\left(2\sqrt{c-1}\right)=+\infty$$, l'integrale diverge.

(osserviamo che la funzione integranda per $x\to+\infty$ è un infinitesimo di ordine $1/2$ pertanto l'integrale diverge)

d) Si ha:

$$\int_4^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}dx=\lim_{c\to+\infty}\int_4^{c}\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}dx=\lim_{c\to+\infty}\left[2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|\right]_4^c=\lim_{c\to+\infty}\left(2\ln\left|\sqrt{c}-1\right|\right)=+\infty$$

l'integrale diverge (la funzione integranda per $x\to+\infty$ è infinitesima di ordine 1).

e) Per l'integrale $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ dobbiamo controllare la convergenza sia per $x\to 0$ sia per $x\to+\infty$, quindi: $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int_0^{2}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx+\int_2^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ essendo $x=2$ un punto in cui la funzione è continua.

Procediamo con la definizione:

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^{2}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx+\lim_{c\to+\infty}\int_2^{c}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_\varepsilon^2+\lim_{c\to+\infty}\left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_2^c=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[-2e^{-\sqrt{2}}+2e^{-\sqrt{\varepsilon}}\right]+\lim_{c\to+\infty}\left[-2e^{-\sqrt{c}}+2e^{-\sqrt{2}}\right]=2$$, l'integrale converge.

3) Utilizzando i criteri noti, discutere la convergenza o meno dei seguenti integrali:

a) $\int_0^{+\infty}(x+x^2+5)e^x dx$;

b) $\int_0^{3}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$;

c) $\int_1^{+\infty}\frac{x+e^{-x}}{x^2+2x+\ln x}dx$;

d) $\int_0^{1}\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{1-\cos x}dx$;

a) Per $x\to+\infty$ la funzione integranda è asintotica a x^2e^x che tende a $+\infty$. L'integrale diverge.

b) Il problema si pone per $x\to3$, in tal caso per il criterio del confronto asintotico $\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\sim\frac{1}{\sqrt{6(3-x)}}$, la funzione integranda risulta essere un infinito di ordine $\frac{1}{2}$, pertanto l'integrale converge.

c) Per $x\to+\infty$ $\frac{x+e^{-x}}{x^2+2x+\ln x}\sim\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$. La funzione asintotica non è integrabile in senso generalizzato quindi anche quella di partenza non lo è e l'integrale diverge.

d) Utilizziamo di nuovo il confronto asintotico: per $x \to 0$ $\dfrac{\sin\sqrt[3]{x}}{1-\cos x} \sim \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{2}x^2} = \dfrac{2}{x^{5/3}}$,

quest'ultimo risulta essere un infinito di ordine $\frac{5}{3}$. L'integrale diverge.

4) Calcolare l'area delimitata dall'asse delle x e dalla funzione $y = \dfrac{1}{x^2}$ nel tratto $x \geq 1$.

La funzione nell'intervallo considerato è sempre positiva, dunque per calcolare l'area occorre calcolare il seguente integrale:

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^{c} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^c = \lim_{c\to+\infty}\left(-\frac{1}{c}+1\right) = 1$$

5) Discutere la convergenza per ciascuno dei seguenti integrali:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\,dx$;

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{(x+4)^2}\,dx$;

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}-1}{x^2\left(1+x+x^2\right)}\,dx$.

a) Per $x \to +\infty$ la funzione integranda risulta essere un infinitesimo di ordine maggiore di qualunque potenza di $\frac{1}{x}$, infatti sappiamo che per $x \to +\infty$ $e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$, quindi l'integrale converge.

b) Analogo ragionamento ma per $x \to -\infty$. La funzione integranda tende a zero con ordine maggiore di qualunque potenza di $\frac{1}{x}$. L'integrale converge.

c) Dobbiamo analizzare la convergenza per $x \to +\infty$, per $x \to -\infty$ e per $x \to 0$.

Per $x \to +\infty$ $\dfrac{e^{-x^2}-1}{x^2\left(1+x+x^2\right)} \sim -\dfrac{1}{x^4}$ infinitesimo di ordine 4, l'integrale converge.

Allo stesso modo per $x \to -\infty$ dove l'integrale converge di nuovo.

Infine, per $x \to 0$, $\dfrac{e^{-x^2}-1}{x^2\left(1+x+x^2\right)} \sim \dfrac{-x^2}{x^2} = -1$, l'integrale converge.

Quindi l'integrale dato converge.

5) Motivare se il seguente integrale converge o diverge: $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}dx$.

La funzione integranda non è continua in $x=0$;

per $x \to 0^+$ $\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt[4]{1-\cos x}} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{\frac{1}{2}x^2}} = \sqrt[4]{2}$

quindi la funzione è integrabile in senso generalizzato, l'integrale converge.

6) Motivare se il seguente integrale converge o diverge: $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{3x}-1}{x\sqrt[3]{x}}dx$.

Per $x \to 0$ utilizziamo il criterio del confronto asintotico: $\frac{e^{3x}-1}{x\sqrt[3]{x}} \sim \frac{3x}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$ che è un infinito di ordine $\frac{1}{3}$ e quindi integrabile.

Anche per $x \to -\infty$ utilizziamo il criterio del confronto asintotico: $\frac{e^{3x}-1}{x\sqrt[3]{x}} \sim \frac{-1}{x^{4/3}}$ che è un infinitesimo di ordine $\frac{4}{3}$ e quindi integrabile. L'integrale converge.

7) Discutere la convergenza dell'integrale: $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(e^x)+\sin x}{x(x-1)^{1/2}}dx$.

Per $x \to 1$ applichiamo il criterio del confronto asintotico e otteniamo $\frac{\cos(e^x)+\sin x}{x(x-1)^{1/2}} \sim \frac{\cos(e)+\sin 1}{(x-1)^{1/2}}$ un infinito di ordine $\frac{1}{2}$ che è integrabile in senso generalizzato.
Per $x \to +\infty$ applichiamo il criterio di assoluta convergenza e otteniamo $\left|\frac{\cos(e^x)+\sin x}{x(x-1)^{1/2}}\right| \le \frac{2}{x^{3/2}}$, la funzione maggiorante per $x \to +\infty$ è un infinitesimo di ordine $\frac{3}{2}$ quindi integrabile in senso generalizzato, l'integrale converge. L'integrale dato pertanto converge assolutamente e di conseguenza semplicemente $x \to +\infty$.

8) Discutere la convergenza del seguente integrale: $\int_{-2}^{3} \frac{e^x-2}{(x^2+x)\sqrt[3]{x^3-x}}dx$.

Nell'intervallo $[-2,3]$ la funzione integranda è discontinua nel punti $x=-1$, $x=0$, $x=1$.

Analizziamo per ciascuno di essi l'eventuale convergenza. Per $x \to -1$, la funzione integranda $\frac{e^x - 2}{(x^2 + x)\sqrt[3]{x^3 - x}} \sim \frac{e^{-1} - 2}{-(x+1)\sqrt[3]{2(x+1)}} = \frac{2 - e^{-1}}{\sqrt[3]{2}\,(x+1)^{4/3}}$, risulta dunque un infinito di ordine $\frac{4}{3} > 1$; l'integrale diverge per $x \to -1$.

A questo punto possiamo concludere che l'integrale dato diverge (indipendentemente da eventuali convergenze in altri intorni).

8) Discutere la convergenza o meno dei seguenti integrali descrivendo il ragionamento seguito:

a) $\int_0^{+\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$;

b) $\int_0^{+\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^4}\right) dx$.

a) Per $x \to 0$ la funzione integranda $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$ quindi è integrabile in senso generalizzato; per $x \to +\infty$, invece, $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sim x \cdot \frac{1}{x} = 1$ quindi non è integrabile. L'integrale dato non converge.

b) Per $x \to 0$ la funzione integranda $x^2 \sin\left(\frac{1}{x^4}\right) \to 0$ quindi è integrabile in senso generalizzato; per $x \to +\infty$, invece, $x^2 \sin\left(\frac{1}{x^4}\right) \sim x^2 \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{1}{x^2}$, si tratta di un infinitesimo di ordine 2 e quindi è integrabile in senso generalizzato. L'integrale dato converge.

9) Discutere al variare del parametro reale λ la convergenza dei seguenti integrali:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x+1)^{1+2\lambda} x^{\frac{1}{2}+\lambda}} dx$;

b) $\int_{-2}^{2} \frac{(x^2 + x)^{2\lambda+4}}{\sqrt[3]{x^2 - 4}\,(x^4 + x^2)^{\lambda}} dx$.

a) Nell'intervallo di integrazione dobbiamo controllare la convergenza dell'integrale per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$.

Per $x \to 0$, $\frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x+1)^{1+2\lambda} x^{\frac{1}{2}+\lambda}} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\lambda}}$ che converge se $\frac{1}{2} + \lambda < 1$ da cui $\lambda < \frac{1}{2}$.

Per $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x+1\right)^{1+2\lambda} x^{\frac{1}{2}+\lambda}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot x^{1+2\lambda}\cdot x^{\frac{1}{2}+\lambda}} = \dfrac{1}{x^{2+3\lambda}}$ che converge se

$2+3\lambda > 1$ da cui $\lambda > -\dfrac{1}{3}$.

Dunque l'integrale converge se $-\dfrac{1}{3} < \lambda < \dfrac{1}{2}$.

b) La funzione integranda non è continua nei punti $x = \pm 2$ e $x = 0$, pertanto nell'intervallo di integrazione dobbiamo controllare la convergenza dell'integrale per $x \to -2$, per $x \to 0$ e per $x \to 2$.

Per $x \to -2$, $\dfrac{\left(x^2+x\right)^{2\lambda+4}}{\sqrt[3]{x^2-4}\left(x^4+x^2\right)^{\lambda}} \sim \dfrac{2^{2\lambda+4}}{(20)^{\lambda}\sqrt[3]{-4}\left(x+2\right)^{1/3}}$ che converge per ogni valore di λ.

Per $x \to 0$, $\dfrac{\left(x^2+x\right)^{2\lambda+4}}{\sqrt[3]{x^2-4}\left(x^3+x^2\right)^{\lambda}} \sim \dfrac{x^{2\lambda+4}}{\sqrt[3]{-4}\cdot x^{2\lambda}} = \dfrac{x^4}{\sqrt[3]{-4}}$, che converge per ogni valore di λ in quanto la funzione integranda per $x \to 0$ converge a 0.

Per $x \to 2$, $\dfrac{\left(x^2+x\right)^{2\lambda+4}}{\sqrt[3]{x^2-4}\left(x^4+x^2\right)^{\lambda}} \sim \dfrac{6^{2\lambda+4}}{(20)^{\lambda}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{x-2}}$ che converge per ogni valore di λ essendo un infinitesimo di ordine $\dfrac{1}{3}$.

Deduciamo che l'integrale converge per ogni valore di λ.