Università "Carlo Cattaneo"

Ingegneria gestionale

Analisi matematica

a.a. 2017/2018

FUNZIONI INTEGRALI

ESERCIZI CON SOLUZIONE

1) Data la funzione $F(x)=\int_2^x \frac{e^{t-3}}{16+t^2}dt$

a) calcolare $F(2)$, $F'(2)$, $F''(2)$;
b) scrivere l'equazione della retta tangente nel punto $x=2$;
c) scrivere il polinomio di Taylor al secondo ordine in $x=2$ e rappresentare la funzione nell'intorno considerato.

a) $F(2)=\int_2^2 \frac{e^{t-3}}{16+t^2}dt=0$.

La funzione integranda è continua su R, per il teorema di Torricelli-Barrow:

$F'(x)=\frac{e^{x-3}}{16+x^2}$ e $F'(2)=\frac{e^{2-3}}{16+4}=\frac{1}{20e}$

$F''(x)=\frac{e^{x-3}(x^2-2x+16)}{(16+x^2)^2}$ e $F''(2)=\frac{1}{25e}$.

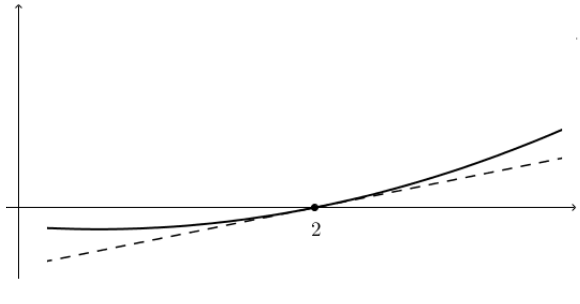
b) L'equazione della retta tangente è:
$y-F(2)=F'(2)(x-2)$
sostituendo i valori ottenuti si ottiene:
$y=\frac{x}{20e}-\frac{1}{10e}$.

c) Il polinomio di Taylor arrestato al secondo ordine in $x=2$ è:

$P_{2,2}(x)=F(2)+F'(2)(x-2)+\frac{F''(2)}{2}(x-2)^2$

$P_{2,2}(x)=\frac{1}{20e}(x-2)+\frac{1}{50e}(x-2)^2$.

Deduciamo il seguente grafico nell'intorno di $x=2$ tenendo conto del fatto che la derivata prima nel punto è positiva ma è minore di uno e la derivata seconda è maggiore di zero:



2) Data la funzione $F(x)=\int_1^x \frac{t^3-4t}{\ln(1+t^2)}dt$

a) calcolare e studiare la derivata prima individuando eventuali punti di massimo e/o minimo;

b) calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to 1}\frac{F(x)}{\ln x}$.

a) Il dominio della funzione è tutto l'insieme dei numeri reali (la funzione integranda è prolungabile con continuità in $x=0$). Calcoliamo la derivata:

$$F'(x)=\frac{x^3-4x}{\ln(1+x^2)}.$$

Il denominatore è sempre positivo, quindi il segno della derivata prima dipende dal numeratore x^3-4x; studiamo il segno di x^3-4x:

	-2		0		2	
$+$		$-$		$-$		$+$
$-$		$-$		$+$		$+$
$-$		$+$		$-$		$+$

Quindi $x=-2$ è un punto di minimo locale, $x=0$ è un punto di massimo locale e infine $x=2$ è un punto di minimo locale.

b) Il limite dato si presenta come forma di indecisione $\frac{0}{0}$, applichiamo il teorema di de l'Hospital (sono verificate tutte le ipotesi):

$$\lim_{x\to 1}\frac{F(x)}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x^3-4x}{\ln(1+x^2)}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^4-4x^2}{\ln(1+x^2)}=-\frac{3}{\ln 2}.$$

3) Calcolare la derivata prima per ciascuna delle seguenti funzioni integrali:

a) $F(x)=\int_2^{4x^2}\frac{\ln(1+t^2)}{\sqrt[3]{t^3-1}}dt$;

b) $G(x)=\int_{x^2+1}^{\sin x}\frac{2^{-t}}{\sqrt[5]{3-t}}dt$.

a) $F'(x)=\frac{\ln(1+16x^4)}{\sqrt[3]{(4x^2)^3-1}}\cdot 8x$.

b) $G'(x)=\dfrac{2^{-\sin x}}{\sqrt[5]{3-\sin x}}\cdot\cos x-\dfrac{2^{-(x^2+1)}}{\sqrt[5]{3-(x^2+1)}}\cdot 2x$.

4) Individuare il dominio delle seguenti funzioni integrali, motivando la scelta effettuata:

a) $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt[3]{t-1}}$;

b) $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{2-t}$.

a) La $f(t)$ è continua nell'insieme $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$; per $x\to 1$ la funzione integranda risulta un infinito di ordine $1/3$ quindi è integrabile in senso generalizzato. Possiamo concludere affermando che il dominio della funzione F coincide con tutto l'insieme dei numeri reali.

b) La $f(t)$ è continua nell'insieme $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$; per $x\to 2$ la funzione integranda risulta un infinito di ordine 1 quindi non è integrabile in senso generalizzato. Possiamo concludere affermando che il dominio della funzione F, che deve essere continua in esso, coincide con l'insieme $(-\infty,2)$.

5) Data la funzione $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{2^t}{t+3}dt$

a) determinare il dominio;
b) calcolare la derivata prima;
c) scrivere il polinomio di MacLaurin di secondo grado e disegnare il grafico nell'intorno di $x=0$;
d) calcolare il limite della funzione per $x\to+\infty$.

a) La $f(t)$ è continua nell'insieme $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$; per $x\to 3$ la funzione integranda risulta un infinito di ordine 1 quindi non è integrabile in senso generalizzato. Possiamo concludere affermando che il dominio della funzione F, che come abbiamo già affermato nell'esercizio precedente, deve essere continua nel suo dominio, coincide con l'insieme $(-\infty,3)$;

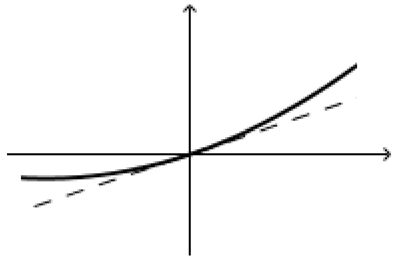
b) Per calcolare la derivata prima basta ricordare il teorema di Torricelli Barrow:

$F'(x)=\dfrac{2^x}{x+3}$;

c) Il polinomio di MacLaurin è il seguente: $P_2(x)=F(0)+F'(0)\cdot x+\dfrac{F''(0)}{2!}\cdot x^2$,

calcoliamo: $F(0)=0$, $F'(0)=\dfrac{1}{3}$, $F''(x)=\dfrac{2^x\ln 2\cdot(x+3)-2^x}{(x+3)^2}$ da cui $F''(0)=\dfrac{3\ln 2-1}{9}$.

Possiamo scrivere il polinomio richiesto: $P_2(x)=\frac{1}{3}x+\frac{3\ln 2-1}{18}x^2$. Dai risultati ottenuti il grafico della funzione nell'intorno del punto $x=0$ è il seguente:



d) Per $x \to +\infty$ la funzione integranda è un infinito di ordine maggiore di qualunque potenza di x, quindi non è integrabile in senso generalizzato;
risulta $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ (notiamo che la funzione integranda per $x \to +\infty$, è positiva e l'intervallo di integrazione è crescente).

6) Data $F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{e^t}{\sqrt[3]{t-1}}dt$, studiarla e tracciare un grafico qualitativo.

La funzione integranda $f(t)$ è continua nell'insieme $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, ma per $x \to 1$ è integrabile in senso generalizzato (poiché risulta essere un infinito di ordine 1/3), quindi il dominio di F è tutto l'insieme dei numeri reali.
Calcoliamo i limiti alla frontiera del dominio:

$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\lim_{x\to+\infty}\int_{-1}^{x}\frac{e^t}{\sqrt[3]{t-1}}dt = +\infty$ poiché l'integranda per $x \to +\infty$ tende a $+\infty$ e l'intervallo di integrazione è crescente.

Per quanto riguarda $\lim_{x\to-\infty} F(x)=\lim_{x\to-\infty}\int_{-1}^{x}\frac{e^t}{\sqrt[3]{t-1}}dt = l > 0$ poiché per $x \to -\infty$ la funzione integranda tende a 0 con ordine maggiore di qualunque potenza di $\frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha > 1$ quindi il limite risulta un valore finito; inoltre, poiché la funzione integranda è negativa e l'intervallo di integrazione è decrescente, il valore del limite risulta positivo.
La retta di equazione $y = l > 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.
Calcoliamo la derivata prima:

$F'(x)=\frac{e^x}{\sqrt[3]{x-1}}$, il dominio della derivata prima è l'insieme $R-\{1\}$; analizziamo il punto $x=1$ calcolando i limiti alla frontiera della derivata prima:

$$\lim_{x\to1^+} F'(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{e^x}{\sqrt[3]{x-1}} = +\infty$$

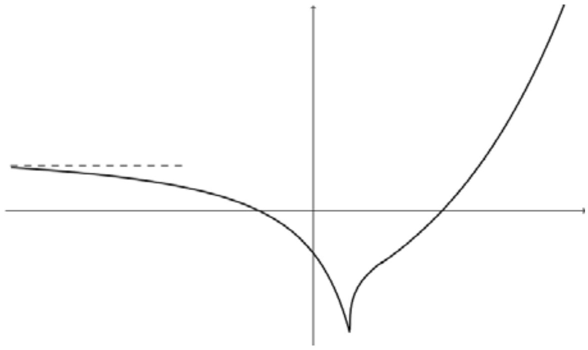
$$\lim_{x\to1^-} F'(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{e^x}{\sqrt[3]{x-1}} = -\infty$$

concludiamo che il punto $x=1$ è un punto di cuspide.
Inoltre il segno della derivata prima è positivo per $x>1$ quindi la F è crescente, negativo per $x<1$ quindi la F è decrescente.

Calcoliamo la derivata seconda:

$F''(x)=\dfrac{e^x\left(x-\dfrac{4}{3}\right)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$, il segno di F'' dipende dal segno del fattore $x-\dfrac{4}{3}$; F è convessa per $x>\dfrac{4}{3}$, F è concava per $x<\dfrac{4}{3}$ e in $x=\dfrac{4}{3}$ ha un flesso a tangente obliqua.

Alla luce dei risultati ottenuti il grafico qualitativo della funzione risulta:



ESERCIZI SENZA SOLUZIONE

1. Calcolare la derivata prima per ciascuna delle seguenti funzioni integrali:

a) $F(x)=\int_{3x^3}^{1}\frac{2t}{e^{t^2}+1}dt$;

b) $G(x)=\int_{-x^3+x}^{\ln x}\frac{\sqrt[7]{3+2t}}{\ln|t+1|}dt$.

2. Data $F(x)=\int_{2}^{x}\frac{e^t}{t^2+1}dt$

a) determinare il dominio;
b) calcolare la derivata prima e la derivata seconda;
c) scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado centrato nel punto $x=2$ e disegnare il grafico nell'intorno di $x=2$.

3. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{\ln(1+x^4)}.$$

4. Data $F(x)=\int_{0}^{x}\frac{1}{\ln_2(2-t^2)}dt$:

a) determinare il dominio;
b) calcolare i limiti alla frontiera del dominio;
c) calcolare e studiare la derivata prima e la derivata seconda;
d) disegnare un grafico qualitativo compatibile con i risultati ottenuti.

5. Data $F(x)=\int_{-2}^{x}\frac{3t}{\sqrt[3]{t^2-1}}dt$:

a) calcolare il dominio;
b) calcolare i limiti alla frontiera del dominio;
c) calcolare eventuali punti di massimo e/o di minimo;
d) indicare eventuali punti di non derivabilità e classificarli;
e) rappresentare un grafico qualitativo compatibile con i risultati ottenuti.