# Università “Carlo Cattaneo”
# Ingegneria gestionale
# Analisi matematica
# a.a. 2017/2018

## 4° PROVA PARZIALE

1. Data la funzione $f(x, y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$, calcolarne il dominio e descriverne la sua topologia (aperto, chiuso, limitato, illimitato, compatto, convesso). Rappresentare le sue curve di livello.

2. Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+2y} - 1}{3x^2 + 6y}$$

3. Calcolare i punti di massimo e minimo locale della funzione $f(x, y) = 2x^2 - y^2 - x$ sull’insieme $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = (y + 1)^2 e^t \\ y(0) = -3 \end{cases}$$

5. Calcolare l’integrale doppio
$$\iint_D (3x^2 - y)dx\, dy$$
relativamente al dominio $D = \{(x, y): 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq y^4\}$.

6. Risolvere la seguente equazione differenziale:
$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

# ANALISI MATEMATICA

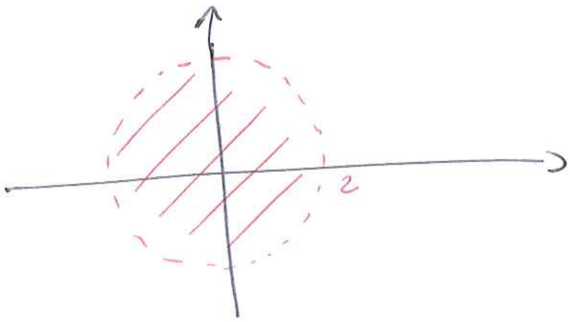
## 4ª PROVA PARZIALE

## 18/6/2018

1. DOMINIO $4 - x^2 - y^2 > 0$

$$x^2 + y^2 < 4$$

PARTE INTERNA DEL CERCHIO DI CENTRO $(0,0)$ E RAGGIO 2




DOMINIO: APERTO, LIMITATO, CONVESSO

CURVE DI LIVELLO: $\ln(4 - x^2 - y^2) = k \quad , k \in \mathbb{R}$

$$4 - x^2 - y^2 = e^k$$

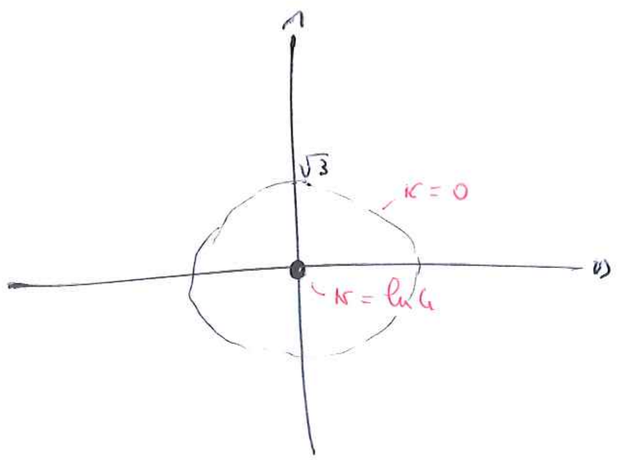
$$x^2 + y^2 = \underbrace{4 - e^k}_{\text{RAGGIO AL QUADRATO}}$$

CIRCONF. DI CENTRO $(0,0)$ E RAGGIO $\sqrt{4 - e^k}$

$$\Rightarrow 4 - e^k \geq 0$$

$$e^k \leq 4$$

$$k \leq \ln 4$$



2. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+2y}-1}{3x^2+6y} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+2y}-1}{3(x^2+2y)}$$ pongo $t = x^2+2y$

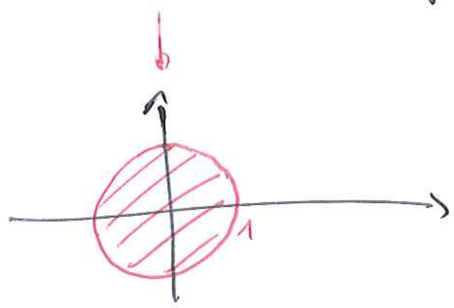
per $(x,y)\to(0,0) \Rightarrow t\to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{3t} = \frac{1}{3}$$ $\Rightarrow$ LIMITE ESISTE FINITO

3. $f(x,y) = 2x^2 - y^2 - x$

$\text{dom} f = \mathbb{R}^2$ INOLTRE, POICHÉ POLINOMIALE, È DIFFERENZIABILE SU $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow f$ DIFFERENZIABILE SU $A = \{(x,y):\ x^2+y^2 \le 1\}$ COMPATTO



- OTTIMIZZO $f$ SU INT A

$f_x = 4x - 1$

$f_y = -2y$ $\Rightarrow \nabla f(x,y) = (0,0)$ $\begin{cases} 4x-1=0 \\ -2y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 0 \end{cases}$

$P\left(\frac{1}{4}, 0\right) \in A$

$f_{xx} = 4$

$f_{yy} = 2 \quad \Longrightarrow \quad H_{\left(\frac{1}{4},0\right)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$f_{xy} = f_{yx} = 0$

$\det H = 8 > 0$

$f_{xx} > 0$

$\Longrightarrow \left(\frac{1}{4}, 0\right)$ P.TO DI MIN. LOC.

- OTTIMIZZO SUL BORDO di A $\quad x^2 + y^2 = 1$

$$L(x, y, \lambda) = 2x^2 - y^2 - x - \lambda\left(1 - x^2 - y^2\right)$$

$$\begin{cases} L_x = 4x - 1 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = -2y + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = 1 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2y(-1 + \lambda) = 0 \\ 1 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} y = 0 \\ \lambda = 1 \end{array}$$

- $y = 0$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 4x - 1 + 2\lambda x = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \\ \lambda = -\frac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \\ \lambda = -\frac{5}{2} \end{cases} \end{array}$$

$\bullet\ \lambda = 1$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ 6x - 1 + 2x = 0 \\ 1 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = 1 \\ x = \frac{1}{6} \\ y^2 = \frac{35}{36} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = 1 \\ x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{\sqrt{35}}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ x = 1/6 \\ y = -\frac{\sqrt{35}}{6} \end{cases}$$

P.TI STAZIONARI

$$\left(1, 0, -\frac{3}{2}\right), \left(-1, 0, -\frac{5}{2}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{35}}{6}, 1\right),$$

$$\left(\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{35}}{6}, 1\right)$$

ANALIZZO AL VARIARE DI $\lambda$:

$\bullet\ \lambda = -\frac{3}{2}$:

$$L\left(x, y, -\frac{3}{2}\right) = 2x^2 - y^2 - x + \frac{3}{2}\left(1 - x^2 - y^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}y^2 - x + \frac{3}{2}$$

$$L_x = x - 1 \qquad L_{xx} = 1$$

$$L_y = -5y \longrightarrow L_{yy} = -5$$

$$L_{xy} = L_{yx} = 0$$

$$H_{(1,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad \det H < 0 \Rightarrow \text{p.to di sella}$$

- $\lambda = -\frac{5}{2}$

$$L\left(x,y,-\frac{5}{2}\right) = 2x^2 - y^2 - x + \frac{5}{2}\left(1 - x^2 - y^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}y^2 - x + \frac{5}{2}$$

$$L_x = -x - 1$$

$$L_y = -7y \longrightarrow \begin{aligned} L_{xx} &= -1 \\ L_{yy} &= -7 \\ L_{xy} &= L_{yx} = 0 \end{aligned}$$

$$H_{(-1,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} &\det H > 0 \\ &L_{xx} = 7 < 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (-1,0)$ p.to di max loc.

- $\lambda = 1$

$$L(x,y,1) = 2x^2 - y^2 - x - 1\left(1 - x^2 - y^2\right) =$$

$$= 3x^2 - x - 1$$

$L'(x) = 6x - 1 \geq 0$ $\quad \frac{1}{6} \quad$ $x = \frac{1}{6}$ p.to di minimo loc.

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{35}}{6}\right) \text{ e } \left(\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{35}}{6}\right)$$ P.TI DI MIN. LOCALI

4.

$$y' = (y+1)^2 \cdot e^t$$ VARIABILI SEPARABILI

$$(y+1)^2 \neq 0 \Rightarrow y \neq -1$$

$$\frac{y'}{(y+1)^2} = e^t$$

$$\int \frac{1}{(y+1)^2}\,dy = \int e^t\,dt$$

$$-\frac{1}{y+1} = e^t + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = -\frac{1}{e^t + c} - 1$$

PASSA PER $(0, -3)$

$$-3 = -\frac{1}{1+c} - 1 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{e^t - \frac{1}{2}} - 1$$ è soluzione unica

5. $D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1 \ , \ y \leq x \leq y^4\}$ x-semplice

$$\iint_D (3x^2 - y)\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{teo. di} \\ \text{FUBINI}}}{=} \int_0^1 \left[ \int_y^{y^4} (3x^2 - y)\,dx \right] dy =$$

$$= \int_0^1 \left[ x^3 - xy \right]_y^{y^4} dy = \int_0^1 \left( y^{12} - y^5 - y^3 + y^2 \right) dy =$$

$$= \left[ \frac{y^{13}}{13} - \frac{y^6}{6} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{13} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

6. $y'' - 2y' + 2y = 0$ eq. diff. 2° ordine omogenea

POLINOMIO ASSOCIATO

$$\alpha^2 - 2\alpha + 2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

soluz. generale:

$$y(t) = e^t \left( c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t \right), \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$