Università "Carlo Cattaneo"
Ingegneria gestionale
Analisi matematica
a.a. 2017/2018

4° PROVA PARZIALE

1. Data la funzione $f(x,y) = \sqrt{y + x^2} + 2$, calcolarne il dominio e descriverne la sua topologia (aperto, chiuso, limitato, illimitato, compatto, convesso). Rappresentare le sue curve di livello.

2. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy) + xy^2}{x^2 + y^8}$$

3. Calcolare, con il metodo ritenuto più opportuno, i punti di massimo e minimo locale della funzione $f(x,y) = 3y^2 - 2x$ con vincolo $x^2 + y^2 = 4$.
Motivare se esistono punti di massimo o minimo globali.

4. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 + 1}{2y} t^3 \\ \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

5. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D (x^2 y) dx\, dy$$

relativamente al dominio $D = \{(x,y): 0 \le x \le 1,\ x^3 \le y \le x\}$.

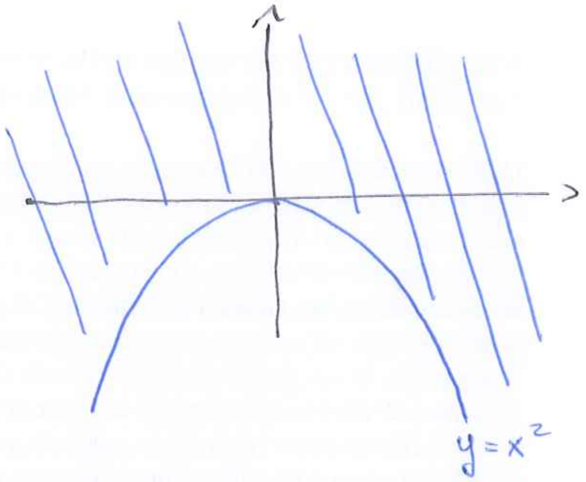
6. Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$4y'' - 12y' + 9y = 0$$

4^a PROVA PARZIALE 4/6/2018

SOLUZIONE

(1) DOMINIO: $y+x^2 \geq 0$, $y \geq -x^2$



È UN INSIEME ILLIMITATO.

LA SUA FRONTIERA È $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $y=x^2\}$ CHE APPARTIENE ALL'INSIEME DOMINIO $\Rightarrow$ È CHIUSO.

NON È COMPATTO.

NON È CONVESSO.

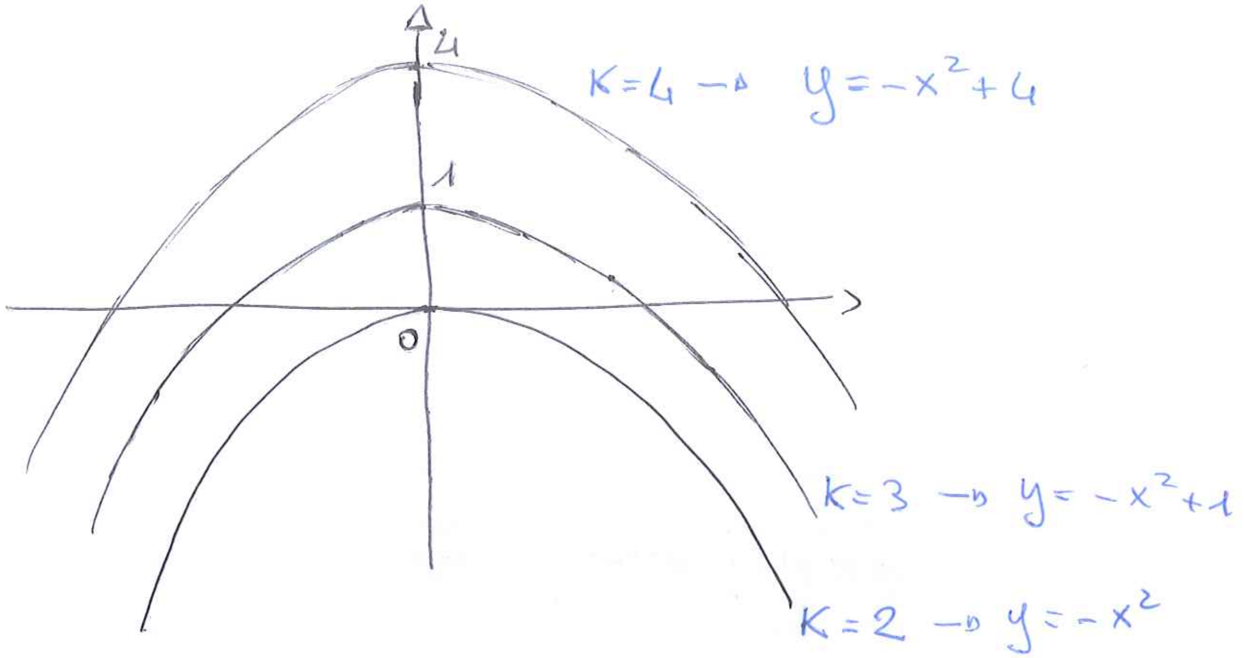
CURVE DI LIVELLO DI $f(x,y)$: $f(x,y)=k$ CON $k \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{y+x^2}+2=k$$

$\sqrt{y+x^2}=k-2$, quindi $k-2 \geq 0$, $k \geq 2$

$$y+x^2=(k-2)^2$$

$y=-x^2+(k-2)^2$, SONO PARABOLE CONCAVE DI VERTICE $\left(0,(k-2)^2\right)$



---

(2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)+xy^2}{x^2+y^8} = \frac{0}{0}$$

PROVO A CALCOLARLO LUNGO IL PERCORSO $y=x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2+x^3}{x^2+x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^3}{x^2+x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$\operatorname{sen} x^2 \sim x^2$ per $x\to 0$

$x^2+x^3 \sim x^2$ per $x\to 0$

$x^2+x^8 \sim x^2$ per $x\to 0$

PROVO A CALCOLARLO LUNGO IL PERCORSO $y=-x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(-x^2)+x^3}{x^2+x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2+x^3}{x^2+x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$\operatorname{sen}(-x^2) \sim -x^2$ per $x\to 0$

$-x^2+x^3 \sim -x^2$ per $x\to 0$

$x^2+x^8 \sim x^2$ per $x\to 0$

LUNGO DUE PERCORSI DISTINTI CHE PORTANO A (0,0) HO OTTENUTO DUE RISULTATI DIVERSI $\Rightarrow$ IL LIMITE <u>NON</u> ESISTE

③ max / min $f(x,y)$

SUB $g(x,y)=b$

CON $f(x,y)=3y^2-2x$

$g(x,y)=x^2+y^2$

$b=4$

PROVIAMO CON IL METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

- f e g SONO DIFFERENZIABILI SU $\mathbb{R}^2$
- $\nabla g(x,y)=(2x,\ 2y)$ SI ANNULLA in $(0,0)$, PUNTO CHE NON SODDISFA IL VINCOLO $x^2+y^2=4$

$\Rightarrow$ POSSIAMO APPLICARE IL METODO DI LAGRANGE "SENZA PROBLEMI".

$$L(x,y,\lambda)=3y^2-2x-\lambda(4-x^2-y^2)$$

$$L_x=-2+2\lambda x$$

$$L_y=6y+2\lambda y$$

$$L_\lambda=x^2+y^2-4$$

CERCO I PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases}-2+2\lambda x=0\\ 6y+2\lambda y=0\\ x^2+y^2-4=0\end{cases} \qquad \begin{cases}2y(3+\lambda)=0\\ -2+2\lambda x=0\\ x^2+y^2-4=0\end{cases}$$

$\to y=0$

$\to \lambda=-3$

• Se $y=0$:

$$\begin{cases} y=0 \\ -2+2dx=0 \\ x^2=4 \end{cases} \quad x^2=4 \;\begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=2 \\ -2+4d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ d=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=-2 \\ -2-4d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \\ d=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

• Se $d=-3$:

$$\begin{cases} d=-3 \\ -2-6x=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} d=-3 \\ x=-\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9}+y^2=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} d=-3 \\ x=-\frac{1}{3} \\ y^2=\frac{35}{9} \end{cases} \quad y^2=\frac{35}{9} \;\begin{cases} y=\frac{\sqrt{35}}{3} \\ y=-\frac{\sqrt{35}}{3} \end{cases}$$

HO RICAVATO 4 PUNTI STAZIONARI:

$$\left(2,0,\frac{1}{2}\right);\left(-2,0,-\frac{1}{2}\right);\left(-\frac{1}{3},\frac{\sqrt{35}}{3},-3\right);$$

$$\left(-\frac{1}{3},-\frac{\sqrt{35}}{3},-3\right)$$

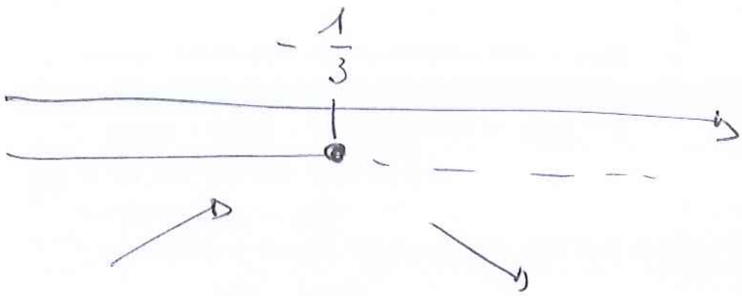
STUDIAMO LA LORO NATURA CONSIDERANDO LA LAGRANGIANA AL VARIARE DEI VALORI DI d OTTENUTI.

se $\lambda = -3$

$$L(x,y,-3) = 3y^2 - 2x + 12 - 3x^2 - 3y^2 = \underbrace{-3x^2 - 2x + 12}_{= L(x)}$$

$L(x)$ DIPENDE SOLO da x

$$L'(x) = -6x - 2 \geq 0 \qquad x \leq -\frac{1}{3}$$



in corrispondenza di $x = -\frac{1}{3}$ ho un P.TO di MAX LOC.

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{35}}{3}\right) \text{ e } \left(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{35}}{3}\right)$$ SONO PUNTI DI MAX LOC.

se $\lambda = \frac{1}{2}$

$$L\left(x,y,\frac{1}{2}\right) = 3y^2 - 2x - 2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{7}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$$

$L_x = -2 + x$

$L_y = 6y + y$

$L_{xx} = 1$

$L_{yy} = 7$

$L_{xy} = L_{yx} = 0$

$$H_{(2,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad \det H = 7 > 0 \qquad L_{xx} > 0$$

$\Rightarrow (2,0)$ P.TO MIN. LOC.

se $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$L\left(x,y,-\frac{1}{2}\right) = 3y^2 - 2x + 2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = \frac{5}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$$

$$L_x = -2 - x$$

$$L_y = 6y - y$$

$$L_{xx} = -1 \qquad H_{(-2,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \det H = -5 < 0$$

$$L_{yy} = 5$$

$$L_{xy} = L_{yx} = 0$$

$\Rightarrow (-2,0)$ P.TO DI SELLA

POICHÈ IL VINCOLO $x^2+y^2=4$ È UN COMPATTO, IL PROBLEMA AMMETTE P.TI DI MAX E MIN GLOBALI.

$(2,0)$ È P.TO di MIN GLOB.

PER STABILIRE IL PUNTO DI MAX GLOBALE CONSIDERO:

$$f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{35}}{3}\right) = \frac{37}{3}$$

$$f\left(-\frac{1}{3}, +\frac{\sqrt{35}}{3}\right) = \frac{37}{3}$$

$\Rightarrow \left(-\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{35}}{3}\right)$ e $\left(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{35}}{3}\right)$

SONO P.TI DI MAX GLOBALE

(4) $y' = \frac{y^2+1}{2y} t^3$ EQ. DIFF. ORDINARIA DEL 1° ORDINE

A VARIABILI SEPARABILI

C.E. $2y \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$

$$q(y) = \frac{y^2+1}{2y} \neq 0 \quad \forall y \neq 0$$

$$\frac{2y}{y^2+1} y' = t^3$$

$$\int \frac{2y}{y^2+1} dy = \int t^3 dt$$

$$\ln(y^2+1) = \frac{t^4}{4} + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$y^2 + 1 = e^{\frac{t^4}{4}+c}$$

$$y^2 = e^{\frac{t^4}{4}+c} - 1$$

$$y(t) = \sqrt{e^{\frac{t^4}{4}+c} - 1} \quad \text{se } y > 0$$

$$y(t) = -\sqrt{e^{\frac{t^4}{4}+c} - 1} \quad \text{se } y < 0$$

IMPONGO LA CONDIZIONE DI PASSAGGIO PER $(0,2)$:

$$2 = \sqrt{e^{\frac{0}{4}+c} - 1}$$

$$2 = \sqrt{e^{c} - 1}$$

$$4 = e^{c} - 1$$

$$e^{c} = 5$$

$$c = \ln 5$$

$\Rightarrow$ SOLUZIONE UNICA DEL PB. DI CAUCHY È:

$$y(t) = \sqrt{e^{\frac{t^4}{4} + \ln 5} - 1} = \sqrt{5\, e^{\frac{t^4}{4}} - 1}$$

---

(5) $\iint_D x^2 y \, dx\, dy$ su $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 ,\ x^3 \le y \le x\}$

D è un dominio y-semplice, per il teo. di Fubini:

$$\iint_D x^2 y \, dx\, dy = \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{x} x^2 y \, dy \right] dx = \int_0^1 \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{x^3}^{x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 \cdot \frac{x^2}{2} - x^2 \cdot \frac{x^6}{2} \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{2} \right] dx = \left[\frac{x^5}{10} - \frac{x^9}{18} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{18} - 0 + 0 = \frac{2}{45}$$

(6) SI TRATTA DI UN'EQ. DIFF. DEL 2° ORDINE A COEFF. COSTANTI

CONSIDERO IL POLINOMIO ASSOCIATO:

$$4a^2 - 12a + 9 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$a = \frac{3}{2} \quad \text{UNICA SOLUZIONE}$$

QUINDI LA SOLUZIONE GENERALE DELL'EQ. DIFF. RISULTA:

$$y(t) = c_1 e^{\frac{3}{2}t} + c_2 t e^{\frac{3}{2}t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$