VETTORI

Si dice <u>vettore</u> **x** una ennupla ordinata di numeri reali. Un vettore si rappresenta come colonna o come riga:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

L'insieme di tutti i vettori con n componenti reali si indica con $\mathbf{R}^n$. Nell'insieme $\mathbf{R}^n$ si possono definire le seguenti operazioni.

<u>Prodotto di un vettore per un numero reale</u>. Dati il numero reale λ e il vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, il prodotto $\lambda\mathbf{x}$ è definito ponendo:

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots\ldots, \lambda x_n) \ .$$

(Quindi il vettore $\lambda\mathbf{x}$ si ottiene da $\mathbf{x}$ moltiplicandone tutte le componenti per λ.)

<u>Somma tra vettori</u>. Dati i vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$,

il vettore somma è:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots\ldots\ldots, x_n + y_n) \ .$$

(Quindi la somma tra due vettori aventi lo stesso numero di componenti si esegue sommando tra di loro le componenti che occupano la stessa posizione.)

Proprietà della somma.

1. Proprietà commutativa

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

2. Proprietà associativa

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}).$$

3. Esiste un elemento di $\mathbf{R}^n$, indicato con $\mathbf{0}$ e detto <u>vettore nullo</u>, tale che:

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} \quad \forall \, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n.$$

4. Per ogni vettore **x** esiste un vettore **y**, detto <u>vettore opposto</u> di **x** e indicato con **–x**, tale che:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0} \ .$$

Per quanto riguarda il prodotto per uno scalare, valgono le seguenti le proprietà (β indica uno scalare):

1. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

2. $(\alpha \beta)\, \mathbf{x} = \alpha\, (\beta \mathbf{x})$.

3. $(\alpha + \beta)\, \mathbf{x} = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{x}$.

4. $\lambda\, (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}$.

Si definisce spazio vettoriale (sul campo numerico **R**) un insieme di elementi per i quali sono definite due operazioni interne: il prodotto tra un numero reale ed un vettore e la somma tra due vettori. Avendo definito tali operazioni con le rispettive proprietà sul nostro insieme di vettori $\mathbf{R}^n$, possiamo concludere che $\mathbf{R}^n$ è uno spazio vettoriale.

Si dice combinazione lineare dei vettori $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$,....., $\mathbf{x}^m \in \mathbf{R}^n$, $m \geq 1$, con coefficienti $c_1,\ c_2, \ldots\ldots,\ c_m \in \mathbf{R}$, il vettore:

$$c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x}^2 + \ldots\ldots + c_m\mathbf{x}^m \, .$$

I vettori $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^m \in \mathbf{R}^n$ si dicono linearmente dipendenti se è possibile esprimerne uno, per esempio $\mathbf{x}^m$, come combinazione lineare degli altri $(m - 1)$:

$$\mathbf{x}^m = \sum_{i=1}^{m-1} c_i \mathbf{x}^i \, .$$

ossia:

$$\sum_{i=1}^{m-1} c_i \mathbf{x}^i - \mathbf{x}^m = \mathbf{0} \, ,$$

equivalente a:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \mathbf{x}^i = \mathbf{0} \, ,$$

dove, in particolare, si osserva che il coefficiente c_m del vettore $\mathbf{x}^m$ è uguale a -1.

Si può, quindi, formulare la definizione anche nella seguente forma equivalente: i vettori $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^m \in \mathbf{R}^n$ si dicono linearmente dipendenti quando esiste una loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli uguale al vettore nullo .

Per contro, i vettori $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^m \in \mathbf{R}^n$ si dicono linearmente indipendenti quando l'unica combinazione lineare uguale al vettore nullo ha i coefficienti tutti nulli:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \mathbf{x}^i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad c_i = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots\ldots\ldots, m \, .$$

Si dicono vettori fondamentali di $\mathbf{R}^n$ gli n vettori:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e}^1 = (1,0,\dots\dots\dots,0),\\
&\mathbf{e}^2 = (0,1,\dots\dots\dots,0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\mathbf{e}^n = (0,0,\dots\dots\dots,1)\ .
\end{aligned}
$$

Il vettore generico vettore $\mathbf{e}^k$ ha tutte le componenti nulle, tranne la *k*-esima uguale a 1.

E' facile verificare che per ogni vettore **x** di $\mathbf{R}^n$ vale:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots\dots, x_n) =\\
&= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots\dots + (0, 0, \dots, x_n) =\\
&= x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots\dots + x_n(0, 0, \dots, 1) =\\
&= x_1\mathbf{e}^1 + x_2\mathbf{e}^2 + \dots\dots\dots + x_n\mathbf{e}^n\ .
\end{aligned}
$$

L'uguaglianza ottenuta mostra che ogni vettore **x** di $\mathbf{R}^n$ si può scrivere in uno e un solo modo come combinazione lineare dei vettori:fondamentali $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots\dots, \mathbf{e}^n$, e i coefficienti della combinazione lineare non sono altro che le componenti di **x** stesso.
Pertanto, si dice che:gli *n* vettori fondamentali, tra loro linearmente indipendenti, costituiscono una <u>base</u> di $\mathbf{R}^n$ e che $\mathbf{R}^n$ ha <u>dimensione</u> *n*.

Dati i due vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots\dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots\dots, y_n)$, si chiama <u>prodotto scalare (o interno)</u> di **x** <u>per</u> **y** il numero:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots\dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\ .$$

Proprietà del prodotto scalare.
1) Il prodotto scalare del vettore nullo per qualsiasi altro vettore dà come risultato 0:

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad , \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n\ .$$

2) Il prodotto scalare non gode della proprietà di annullamento del prodotto:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ non implica } (\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ oppure } \mathbf{y} = \mathbf{0})\ .$$

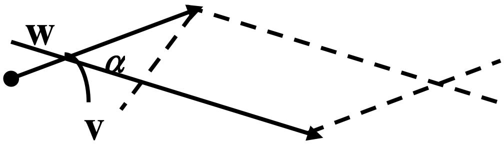
Esempio. $(1, -3, 0) \cdot (3, 1, 0) = 0$.
I vettori **x** e **y** si dicono <u>ortogonali</u> se:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0.$$

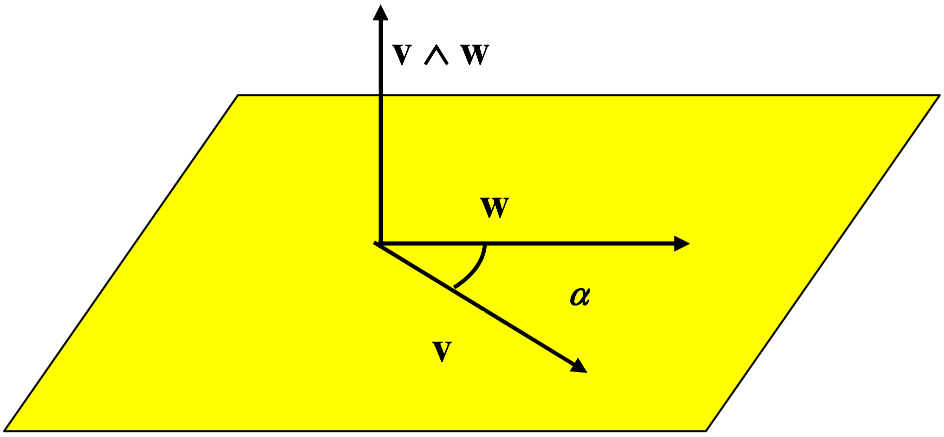
Dati due vettori di $\mathbf{R}^3$, **v** e **w**, si dice <u>prodotto vettoriale</u> di **v** e **w** il vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ così definito.
1) Il modulo di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è dato da:

$$|\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \sin\alpha$$

dove α è l'angolo formato dai due vettori **v** e **w** (con $0 \leq \alpha \leq \pi$); geometricamente, il modulo di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è l'area del parallelogramma costruito sui vettori **v** e **w**;



2) $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è perpendicolare al piano di **v** e **w**;
3) **v**, **w** e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$, nell'ordine, formano una terna destrorsa di vettori.



Proprietà del prodotto vettoriale.
a) Il prodotto vettoriale è anticommutativo, ossia:

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\,\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}\,.$$

b) Il prodotto vettoriale è distributivo rispetto alla somma, ossia:

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}.$$

c) Il prodotto $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$, essendo $\alpha = 0$. Da questa proprietà si deduce che :

v è parallelo a **w** se e solo se $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Riscrittii i vettori **v** e **w** in termini dei vettori fondamentali **i**, **j**, **k**:

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \;\;,\;\; \mathbf{w} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}$$

il <u>prodotto vettoriale in termini delle componenti dei vettori</u> è dato da:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2)\mathbf{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\mathbf{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\mathbf{k} = \\ &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}\;. \end{aligned}$$

ossia può essere espresso come sviluppo simbolico, lungo la prima riga, del seguente determinante:

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} .$$

Se $x_3 = y_3 = 0$, si ottiene:

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

da cui:

$$|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right| .$$

Ricordando il significato geometrico del modulo del prodotto vettoriale, si deduce che il modulo del determinante $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ coincide con l'area del parallelogramma costruito sui vettori piani:

$$\mathbf{v} = (x_1, x_2), \mathbf{w} = (y_1, y_2) .$$

Se **u** ,**v** e **w** sono tre vettori nello spazio tridimensionale, si definisce <u>prodotto misto</u> il numero reale:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) .$$

La parentesi è in realtà superflua, in quanto

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$$

non ha significato e, quindi, si può scrivere semplicemente:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} .$$

Si verifica che il modulo del prodotto misto rappresenta il volume del parallelepipedo costruito sui vettori **v**, **w** e **u** .
Vale:

$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w}$ sono complanari, ossia se **u**, **v**, **w** sono linearmente dipendenti.

Considerati i vettori:

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \ ,$$
$$\mathbf{w} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k} \ ,$$
$$\mathbf{u} = z_1\mathbf{i} + z_2\mathbf{j} + z_3\mathbf{k} \ ,$$

vale la formula:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \ .$$

Ricordando il significato geometrico del prodotto misto, si ricava che il modulo del determinante indicato rappresenta il volume del parallelepipedo costruito sui vettori **u**, **v** e w.

MATRICI

Si dice <u>matrice</u> di tipo (m,n) sull'insieme numerico **R** un insieme di mn numeri appartenenti ad **R**, disposti in una tabella di m righe (orizzontali) ed n colonne (verticali). Una generica matrice di tipo (m,n) può essere scritta usando la notazione a doppio indice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1} \ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right] \ , \ \begin{cases} i = 1,2,\ldots,m \\ j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

Una matrice si dice <u>quadrata</u> (di ordine n) se il numero delle righe n uguaglia il numero delle colonne:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1} \ a_{m2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right] \ , \ \begin{cases} i = 1,2,\ldots,n \\ j = 1,2,\ldots,n \end{cases} .$$

In una matrice quadrata gli elementi $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ costituiscono la <u>diagonale principale</u>, gli elementi $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \ldots, a_{n1}$ la <u>diagonale secondaria</u>.

Una matrice quadrata si dice <u>triangolare alta (o bassa)</u> se al di sotto (o al di sopra) della diagonale principale ha solo elementi nulli; una matrice quadrata si dice <u>diagonale</u> se al di fuori della diagonale principale ha solo elementi nulli.

Una matrice quadrata si dice <u>matrice identità</u> se è diagonale ed, inoltre, gli elementi della diagonale principale sono tutti uguali a uno; la matrice identità è indicata con $\mathbf{I}_n$, dove n indica l'ordine. Per esempio:

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\mathbf{e^1 e^2 e^3}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{e^1} \\ \mathbf{e^2} \\ \mathbf{e^3} \end{bmatrix}$$

Una matrice si dice <u>simmetrica</u> se per ogni coppia di indici i,j, risulta $a_{i,j} = a_{j,i}$ e, quindi,la matrice è una tabella simmetrica rispetto alla diagonale principale.
Si chiama <u>matrice trasposta</u> $\mathbf{A}^T$ di una matrice **A** di tipo (*m*,*n*) la matrice di tipo (*n*,*m*) che si ottiene da **A** scambiando le righe con le colonne.

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} \;\; a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \;\; a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \;\; a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \left[a_{ji}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} \;\; a_{21} \ldots a_{m1} \\ a_{12} \;\; a_{22} \ldots a_{m2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} \;\; a_{2n} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Due matrici si dicono <u>simili</u> se sono dello stesso tipo:

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] \text{ e } \mathbf{B} = \left[b_{ij}\right] \;, \begin{cases} i = 1,2,\ldots,m \\ j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

Date due matrici simili **A** e **B**, sono <u>uguali</u> se $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\, i, j$.

Date due matrici simili **A** e **B**, la loro <u>somma</u> è una matrice simile **C** tale che $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall\, i, j$

Il prodotto di una matrice **A** per uno scalare *k* è dato da:

$$k \cdot \mathbf{A} = \left(k \cdot a_{ij}\right) \quad \forall \; i, j\,.$$

Scriviamo la matrice **A** di tipo (*m*, *n*) come accostamento di vettori riga:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ . \\ . \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix}$$

e la matrice **B** di tipo (*n*, *p*) come accostamento di vettori colonna:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots. & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots. & b_{2p} \\ . & . & \ldots. & . \\ . & . & \ldots.. & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots. & b_{np} \end{bmatrix} = \left[\mathbf{b}^1 \quad \mathbf{b}^2 \quad \ldots. \quad \mathbf{b}^p\right].$$

Se il numero di colonne della matrice **A** coincida col numero di righe della matrice **B**, le matrici **A** e **B** sono <u>conformabili (per il prodotto)</u>. Si può allora definire il <u>prodotto</u> tra le matrici **A** e **B**: è la matrice **C** con *m* righe (come **A**) e *p* colonne (come **B**) il cui generico elemento c_{ij} si ottiene eseguendo il prodotto scalare del vettore riga $\mathbf{a}^{\mathrm{i}}$ con il vettore colonna $\mathbf{b}^{\mathrm{j}}$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1\mathbf{b}^1 & \mathbf{a}^1\mathbf{b}^2 & .... & \mathbf{a}^1\mathbf{b}^p \\ \mathbf{a}^2\mathbf{b}^1 & \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 & .... & \mathbf{a}^2\mathbf{b}^p \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ \mathbf{a}^m\mathbf{b}^1 & \mathbf{a}^m\mathbf{b}^2 & .... & \mathbf{a}^m\mathbf{b}^p \end{bmatrix}$$

ossia:

$$c_{ij} = \mathbf{a}^i\mathbf{b}^j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots\cdot + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Il prodotto di matrici presenta alcune diversità rispetto al prodotto tra numeri reali; in particolare:

- non è commutativo, ossia in generale $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$;
- non si conserva la legge di annullamento del prodotto: AB = 0 $\not\Rightarrow$ A = 0 $\vee$ B = 0.

A ogni matrice <u>quadrata</u> **A** è possibile associare un unico numero, detto <u>determinante</u> e indicato con det **A** oppure con $|\mathbf{A}|$.
Per n = 1, cioè per una matrice costituita dal solo elemento a_{11}, il determinante è per definizione l'elemento stesso.
Per n = 2 , cioè per una matrice quadrata di ordine 2:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

vale:

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

ossia det **A** è il prodotto degli elementi della diagonale principale meno il prodotto degli elementi della diagonale secondaria.
Per il determinante nel caso generale con n qualsiasi, è opportuno introdurre due definizioni. Si dice <u>minore complementare</u> $\mathbf{M}_{ij}$ dell'elemento a_{ij} di una matrice **A** il determinante della matrice ottenuta cancellando la riga i e la colonna j dalla matrice **A**. Per esempio, data:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \text{ vale } \mathbf{M}_{23} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Inoltre, si dice <u>complemento algebrico</u> dell'elemento a_{ij} il numero $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.
Osserviamo che:

$$(-1)^{i+j} = 1 \qquad \text{se } i+j \text{ è pari,}$$

$$(-1)^{i+j} = -1 \qquad \text{se } i+j \text{ è dispari.}$$

Nel precedente esempio:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Possiamo ora dare la definizione di determinante della matrice quadrata **A** nel caso generale (teorema di Laplace): il determinante di **A** si ottiene sommando i prodotti degli elementi di una qualunque linea (riga o colonna) per i loro complementi algebrici.
In formule, assegnata la matrice **A** e individuata la riga *k*, con $1 \le k \le n$ (oppure la colonna *i*, $1 \le i \le n$):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \;\; a_{12} \; \ldots. a_{1i} \ldots.. \; a_{1n} \\ a_{21} \;\; a_{22} \; \ldots. a_{2i} \ldots.. \; a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1} \;\; a_{k2} \; \ldots. a_{ki} \ldots.. \; a_{kn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \;\; a_{n2} \; \ldots. a_{ni} \cdot \ldots. \; a_{nn} \end{bmatrix}$$

vale (lungo la riga *k*):

$$\det \mathbf{A} = a_{k1} \cdot \mathbf{A}_{k1} + \ldots. + a_{ki} \cdot \mathbf{A}_{ki} + \ldots + a_{kn} \cdot \mathbf{A}_{kn}$$

oppure (lungo la riga *i*):

$$\det \mathbf{A} = a_{1i} \cdot \mathbf{A}_{1i} + \ldots. + a_{ki} \cdot \mathbf{A}_{ki} + \ldots + a_{ni} \cdot \mathbf{A}_{ni}$$

Proprieta' del determinante

1) Vale det **A** = 0 nei seguenti casi:

- **A** ha una riga o una colonna di zeri;
- **A** ha due righe o due colonne uguali;
- **A** ha due righe o due colonne proporzionali;
- **A** ha una riga (colonna) combinazione lineare di altre righe (colonne).

Da questa proprietà si deduce che gli *n* vettori riga (o colonna) della matrice **A** sono:

linearmente dipendenti ⇔ det **A** = 0

linearmente indipendenti ⇔ det **A** ≠ 0.

2) Se **A** è triangolare (diagonale) vale:

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$$

3) Vale det $\mathbf{I}_n$ **=** 1.

4) Scambiando due righe (colonne), il determinante cambia segno.

5) Moltiplicando per $c \in \Re$ gli elementi di una riga (colonna), il determinante viene moltiplicato per *c*.

6) Moltiplicando per $c \in \Re$ gli elementi di ogni riga (colonna), il determinante viene moltiplicato per c^n.

7) Se a una riga (o colonna) si aggiunge una qualunque combinazione lineare delle altre righe (o colonne), il determinante rimane invariato.

8) Teorema di Binet. Date **A** e **B** matrici quadrate di ordine n, vale $\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}$.

> Esempio. Date due matrici di ordine n, **A** e **B** tali che det **A** = 15, det **B** = 10, calcoliamo i determinanti delle matrici $\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ e $\mathbf{D} = \mathbf{A}^2$.
> Per il teorema di Binet si ha che:
> $$\det\mathbf{C} = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B} = 15\cdot 10 = 150,\ \det\mathbf{D} = (\det\mathbf{A})^2 = 15^2 = 225.$$

Una matrice quadrata **A** si dice <u>non singolare</u> se il suo determinante è non nullo.

Si dice <u>matrice</u> <u>inversa</u> di una matrice non singolare **A** la matrice $\mathbf{A}^{-1}$, anch'essa quadrata e simile ad **A**, tale che:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}_n.$$

Proprietà della matrice inversa.

1) Se esiste, è unica.

2) $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$.

3) $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}$ se **A**, **B** invertibili.

4) $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\right) = \det\mathbf{I_n} \Rightarrow \det\mathbf{A^{-1}}\cdot\det\mathbf{A} = 1 \Rightarrow \det\mathbf{A^{-1}} = \dfrac{1}{\det\mathbf{A}}$.

Il seguente teorema fornisce un metodo di calcolo della matrice inversa. Condizione necessaria e sufficiente affinché esista la matrice inversa $\mathbf{A}^{-1}$ è che **A** non sia singolare, ossia det **A** ≠ 0. Sotto tale condizione vale la formula:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

dove gli A_{ij}, con $i, j = 1,2,...,n$, sono i complementi algebrici degli elementi a_{ij} di **A**.

SISTEMI LINEARI

Consideriamo un <u>sistema lineare</u> di m equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Si dice <u>matrice dei coefficienti</u> la matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \ a_{12} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ a_{m2} \ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Introducendo i vettori colonna (rispettivamente <u>vettore delle incognite</u> e <u>vettore dei termini noti</u>):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{bmatrix}$$

il sistema dato può essere scritto nella forma matriciale:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Teorema di Cramer. Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione se e solo se det $\mathbf{A} \neq 0$.

Dimostrazione. Se det $\mathbf{A} \neq 0$, esiste $\mathbf{A}^{-1}$. Moltiplicando a sinistra entrambi i lati di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ si ha:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

da cui, grazie alla proprietà associativa del prodotto fra matrici:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1})\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

ottenendo infine, poiché $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$ e $\mathbf{I}_n \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

Dati una matrice $\mathbf{A}$ di tipo (m, n) e un intero $k \leq \min\{m,n\}$, si dice <u>minore di ordine</u> k estratto dalla matrice $\mathbf{A}$ il determinante di una qualsiasi sottomatrice quadrata di ordine k estratta da $\mathbf{A}$.

Si dice <u>rango</u> di $\mathbf{A}$ il massimo ordine dei minori non nulli che si possono estrarre da $\mathbf{A}$. Pertanto $rango(\mathbf{A}) = r$ se e solo se esiste almeno un minore di ordine r non nullo, mentre tutti i minori di ordine $(r + 1)$ sono nulli.

Esempio. La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

ha $r = 2$, poiché ogni matrice del terzo ordine estratta da **A** ha determinante nullo; infatti, date:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

vale det $\mathbf{A}_1$ = det $\mathbf{A}_2$ = det $\mathbf{A}_3$ = det $\mathbf{A}_4$ = 0, essendo in tutte la prima e la terza riga proporzionali. Inoltre esiste almeno una matrice del secondo ordine estratta da **A** con determinante non nullo, per esempio:

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ con det } \overline{\mathbf{A}} = -5 \neq 0 .$$

Il rango di una matrice rappresenta il <u>massimo numero di righe o di colonne linearmente indipendenti</u>.

Per semplificare il calcolo del rango, è spesso utile il seguente teorema (di Kronecker**).** Se la matrice **A** di tipo (m, n)

i) possiede un minore di ordine r ($r < \min\{m,n\}$) non nullo

e

ii) tutti i minori di ordine $(r + 1)$ che si ottengono "orlando" tale minore con una qualunque riga o colonna di **A** sono nulli

allora il rango della matrice **A** è r.

Esempio. Consideriamo di nuovo la precedente matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

i) è possibile estrarre un minore non nullo di ordine 2, $\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$;

ii) i minori di ordine 3 ottenuti orlando il minore di ordine 2 non nullo con le rimanenti righe o colonne sono nulli:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

quindi $r(\mathbf{2}) = 2$.

Dato il sistema lineare:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad \text{con } \mathbf{A} \text{ matrice di tipo } (m,n), \mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$$

si dice matrice completa del sistema la matrice ottenuta "orlando" la matrice **A** col vettore **b**:

$$[\mathbf{A}|\ \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} \ a_{12} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \ \ b_1 \\ a_{21} \ a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \ \ b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ a_{m2} \ldots\ldots\ldots a_{mn} \ \ b_m \end{bmatrix}.$$

Se si rappresenta la matrice **A** come allineamento di n vettori colonna:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2 \quad \ldots. \quad \mathbf{a}^n],$$

la matrice completa (con m righe ed n+1 colonne) si ottiene accostando ad **A** la colonna dei termini noti **b**:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2 \quad \ldots. \quad \mathbf{a}^n \quad \mathbf{b}].$$

Teorema di Rouche'- Capelli**.** Il sistema **Ax = b** è possibile se e solo se:

$$\text{rango di } \mathbf{A} = \text{rango di } \mathbf{A}|\ \mathbf{b}$$

ossia se il rango r della matrice **A** dei coefficienti uguaglia il rango r' della matrice completa $\mathbf{A}|\ \mathbf{b}$.

Dimostrazione. Mettendo in evidenza le colonne di **A**, al posto di **Ax = b** si può scrivere:

$$\mathbf{a}^1 x_1 + \mathbf{a}^2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}^n x_n = \mathbf{b}$$

che rappresenta il vettore **b** come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$ con coefficienti dati dalle componenti del vettore **x.** Il sistema, quindi, ammette soluzioni se e solo se **b** è combinazione lineare delle colonne della matrice **A**.
Ora il vettore **b** è combinazione lineare delle colonne di **A** se e solo se gli insiemi di vettori $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots\ldots, \mathbf{a}^n\}$ e $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots\ldots, \mathbf{a}^n, \mathbf{b}\}$ contengono lo stesso numero di vettori linearmente indipendenti. Tale circostanza è equivalente all'uguaglianza dei ranghi r ed r'.

DISCUSSIONE DI UN SISTEMA

Assegnato un sistema lineare di *m* equazioni in *n* incognite:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}\ ,$$

se:
i) $rango(\mathbf{A}) < rango(\mathbf{A}|\,\mathbf{b})$, il sistema è <u>impossibile</u>, ossia non ha alcuna soluzione;
ii) $rango(\mathbf{A}) = rango(\mathbf{A}|\,\mathbf{b}) = n$, il sistema è <u>possibile e determinato</u>, ossia ammette un'unica soluzione;
iii) $rango(\mathbf{A}) = rango(\mathbf{A}|\,\mathbf{b}) = r < n$, il sistema è <u>possibile e indeterminato</u>, ossia ammette infinite soluzioni dipendenti da (n - r) parametri.

Il <u>sistema omogeneo</u> **Ax = 0** è sempre possibile. In particolare, se:
i) $rango(\mathbf{A}) = n$, il sistema è <u>possibile e determinato</u> e l'unica soluzione è data da $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
ii) $rango(\mathbf{A}) = rango(\mathbf{A}|\,\mathbf{b}) = r < n$, il sistema è <u>possibile e indeterminato</u>.

PROCEDIMENTO PER LA SOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE

Dato il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con **A** matrice (m, n), siano i ranghi *r* ed *r'* delle matrici $\mathbf{A}$ e $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ uguali ($r = r'$).
1) Si <u>estrae</u> dalla matrice **A** un minore $\mathbf{M}_r$ di ordine *r* non nullo;
2) del sistema si <u>considerano</u> soltanto le *r* equazioni corrispondenti alle *r* righe del minore $\mathbf{M}_r$; le altre $m - r$ equazioni vengono eliminate, perché non significative (sono automaticamente soddisfatte quando lo sono le prime *r*);
3) al primo membro di ogni equazione del sistema si <u>mantengono</u> le *r* incognite i cui coefficienti costituiscono le *r* colonne del minore $\mathbf{M}_r$, mentre i termini contenenti le altre $n - r$ incognite si portano al secondo membro e si trattano come parametri;
4) si <u>ottiene</u> così un sistema di *r* equazioni in *r* incognite, risolubile applicando il teorema di Cramer: se $r = n$ il sistema ammette un'unica soluzione, mentre se $r < n$ le infinite soluzioni dipendono da $n - r$ parametri che possono assumere valori arbitrari (le incognite portate al secondo membro).

TRASFORMAZIONI LINEARI

Si dice <u>trasformazione (o funzione)</u> da $\mathbf{R}^n$ ad $\mathbf{R}^m$ una corrispondenza *L* che associa a ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ un unico vettore $\mathbf{y} = L(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^m$; **y** è detta **immagine** di **x** tramite *L*.In particolare. la trasformazione *L* si dice <u>lineare</u> se $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ e $\forall\ \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ valgono le proprietà:
i) $L(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}) = L(\mathbf{x_1}) + L(\mathbf{x_2})$ (additività);
ii) $L(\alpha\mathbf{x}) = \alpha L(\mathbf{x})$ (omogeneità).

Osservazione. Le proprietà *i*), *ii*) si possono unificare nella formula:

$$L\,(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2) = \alpha_1 L(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 L(\mathbf{x}_2) \quad \forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$$

Consideriamo ora una matrice quadrata di ordine n **A**. Essa trasforma, mediante il prodotto, un vettore di $\mathbf{R}^n$ in un altro vettore di $\mathbf{R}^n$; infatti:

$$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \xrightarrow{\mathbf{A}(n,n)} \mathbf{Ax} = \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$$

ossia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ è trasformato nel vettore $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \in \mathbf{R}^n$.
D'altra parte, una matrice rettangolare di ordine $(m,\ n)$ **A** trasforma mediante il prodotto un vettore di $\mathbf{R}^n$ in un vettore di $\mathbf{R}^m$; infatti:

$$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \xrightarrow{\mathbf{A}(m,n)} \mathbf{Ax} = \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m .$$

ossia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ è trasformato nel vettore $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \in \mathbf{R}^m$.

La trasformazione da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^n$, data da $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ è lineare. Infatti, utilizzando le proprietà delle matrici, si ha: $\mathbf{A}\ (\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2) = \mathbf{A}(\alpha_1\mathbf{x}_1) + \mathbf{A}(\alpha_2\mathbf{x}_2) = \alpha_1\mathbf{A}(\mathbf{x}_1) + \alpha_2\mathbf{A}(\mathbf{x}_2)$.

Per esempio, in $\mathbf{R}^2$: date $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$, si ha

Teorema di rappresentazione. Ogni trasformazione lineare $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ è individuata da una matrice **A** di tipo $(m,\ n)$, essendo $\mathbf{y} = L(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax},\ \forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Inoltre la matrice **A** è unica, una volta fissate le basi in $\mathbf{R}^n$ ed $\mathbf{R}^m$.
Viceversa, ogni funzione del tipo $\mathbf{y} = L(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ individua una trasformazione lineare .

AUTOVALORI E AUTOVETTORI DI UNA MATRICE

Ci si pone la seguente domanda: data una matrice **A** di dimensione n, un vettore $\mathbf{v} \in \mathrm{R}^n$ non nullo può essere trasformato in un vettore $\lambda\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ parallelo a **v**? A tal fine deve essere soddisfatta l'equazione:

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$$

dove λ è in genere un numero reale. Poiché $\mathbf{I}_n\mathbf{v} = \mathbf{v}$, si ottiene:

$$\mathbf{Av} = \lambda\ \mathbf{I}_n\mathbf{v} \quad \Rightarrow \mathbf{Av} - \lambda\ \mathbf{I}_n\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

da cui infine:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite, con **v** vettore incognito, λ numero reale incognito. Affinché esistano vettori soluzione **v** non nulli deve essere soddisfatta la condizione:

$$\det[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n] = 0$$

detta equazione caratteristica della matrice **A** e indicata anche con:

$$D(\lambda) = 0.$$

Nel caso particolare $n = 2$, si ha:

det[$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2$] = 0,

dove [$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2$] = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}$, da cui:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 .$$

equazione di secondo grado nell'incognita λ.

Tornando al caso generale: si dicono <u>autovalori della matrice</u> **A** i numeri λ che soddisfano l'equazione caratteristica $D(\lambda) = 0$. Si dicono <u>autovettori della matrice</u> **A** i vettori **v** che, in corrispondenza di un certo autovalore λ, soddisfano l'equazione $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$.