Università "Carlo Cattaneo"
Ingegneria gestionale
Analisi matematica
a.a. 2017/2018

EQUAZIONI DIFFERENZIALI 1

ESERCIZI CON SOLUZIONE

1. Trovare l'integrale generale dell'equazione $y' = 2y - 3$.

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti. Si applica la formula risolutiva con $a(t) = -2$ e $b(t) = -3$:

$$y(t) = e^{-\int -2dt} \cdot \left[\int -3e^{\int -2dt} dt + C \right] = e^{2t} \cdot \left[-3\int e^{-2t} dt + C \right] = Ce^{2t} + \frac{3}{2}.$$

2. Trovare l'integrale generale dell'equazione $y' = 4te^{-y}$.

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili con $a(t) = 4t$ e $b(y) = e^{-y}$. Poiché $b(y) = e^{-y} \neq 0 \ \forall y$, separiamo le variabili e le uniche soluzioni si ricavano dalla risoluzione di:

$$\frac{y'}{e^{-y}} = 4t \ \text{ con } \ y' = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{e^{-y}} = 4tdt$$

Quindi integrando si ha:

$$\int \frac{1}{e^{-y}} dy = \int 4tdt$$

$$e^{y} = 2t^2 + C \ \text{ con } \ 2t^2 + C > 0$$

si ottiene:

$$y(t) = \ln\left(2t^2 + C\right) \ \text{ con } \ 2t^2 + C > 0.$$

3. Dopo aver calcolato l'integrale generale dell'equazione differenziale, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{t^3}{(y+1)^2} \\ y(-2) = -2 \end{cases}$$

L'equazione differenziale associata al problema di Cauchy è a variabili separabili

$$y' = -\frac{t^3}{(y+1)^2}.$$

Poniamo la condizione di esistenza $y \neq -1$. Separando le variabili otteniamo:

$$\int (y+1)^2 dy = \int -t^3 dx$$

$$\frac{(y+1)^3}{3} = -\frac{t^4}{4} + C$$

l'integrale generale risulta:

$$y = -1 + \sqrt[3]{-\frac{3}{4}t^4 + 3C}\ .$$

Imponiamo che soddisfi la condizione iniziale $y(-2) = -2$:

$-2 = -1 + \sqrt[3]{-\frac{3}{4} \cdot 16 + 3C}$, da cui $C = \frac{11}{3}$.

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è l'integrale particolare:

$$y(t) = -1 + \sqrt[3]{-\frac{3}{4}t^4 + 11}\ .$$

4. Dopo aver calcolato l'integrale generale, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 4t^3 y - t^3 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

L'equazione differenziale data è lineare del primo ordine $y' = 4t^3 y - t^3$ e applicando la formula risolutiva:

$$y(t) = e^{-\int -4x^3 dx} \cdot \left[\int -t^3 e^{\int -4x^3 dx} dt + C \right] = e^{t^4} \cdot \left[\int -t^3 e^{-t^4} dt + C \right] = e^{t^4} \cdot \left[\frac{1}{4} e^{-t^4} + C \right] = \frac{1}{4} + Ce^{t^4}$$

Risolviamo il problema di Cauchy, che sappiamo ammettere una e una sola soluzione (poiché si tratta di un'equazione lineare), ponendo la condizione $y(0) = 2$:

$2 = \frac{1}{4} + C$, da cui $C = \frac{7}{4}$.

Quindi l'integrale particolare che risolve il problema di Cauchy risulta: $y(t) = \frac{1}{4} + \frac{7}{4} e^{t^4}$.

5. Trovare l'integrale generale dell'equazione $y' = y\sqrt{t-1}$.

Poniamo le condizioni di esistenza: $t \geq 1$.Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili con $a(t) = \sqrt{t-1}$ e $b(y) = y$.

Se $y = 0$ l'equazione differenziale risulta identicamente verificata, quindi $y = 0$ è una soluzione particolare dell'equazione data.

Poniamo $y \neq 0$ e dividiamo ambo i membri dell'equazione per y.

$$\frac{dy}{y} = \sqrt{t-1}\, dt\ .$$

Integrando si ottiene:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \sqrt{t-1} dt$$

$$\ln|y| = \frac{2}{3}\sqrt{(t-1)^3} + C$$

$|y| = e^{\frac{2}{3}\sqrt{(t-1)^3} + C}$, ovvero $y(t) = \pm\, e^{\frac{2}{3}\sqrt{(t-1)^3} + C}$.

L'integrale generale è dunque:

$$\begin{cases} y(t) = \pm\, e^{\frac{2}{3}\sqrt{(t-1)^3}+C} \\ y = 0 \end{cases}$$

6. Dopo aver calcolato l'integrale generale, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{t} y + 2t \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

L'equazione differenziale è lineare del primo ordine. Dopo aver posto le condizioni di esistenza $t \neq 0$ (quindi ci saranno soluzioni per $t > 0$ e separatamente per $t < 0$), applicando la formula risolutiva si ricava l'integrale generale:

$$y(t) = e^{-\int -\frac{1}{t}dt} \cdot \left[\int 2te^{\int -\frac{1}{t}dx} dt + C \right]$$

$$y(t) = e^{\ln|t|} \cdot \left[\int 2te^{-\ln|t|} dt + C \right]$$

$$y(t) = e^{\ln|t|} \cdot \left[\int 2te^{\ln\frac{1}{|t|}} dt + C \right]$$

$$y(t) = |t| \cdot \left[\int 2t \frac{1}{|t|} dt + C \right]$$

Ci concentriamo sul caso $t > 0$ (poiché la soluzione esiste in un intorno di $t = 1$):

$$y(t) = t \cdot \left[\int 2t \frac{1}{t} dt + C_1 \right]$$

$$y(t) = t \cdot [2t + C_1]$$

$$y(t) = 2t^2 + C_1 t .$$

A questo punto, applicando la condizione $y(1) = 0$ all'integrale generale, si ottiene la soluzione al problema di Cauchy:

$0 = 2 + C_1$, da cui $C_1 = -2$, quindi l'integrale particolare è $y(t) = 2t^2 - 2t$, ricordiamo che esiste per $t > 0$.

7 Calcolare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$ty' = y - 1$.

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili. Un integrale particolare si ottiene ponendo $y - 1 = 0$, cioè $y = 1$.

Poniamo $y \neq 1$ e notiamo che dobbiamo porre anche $t \neq 0$ per separare le variabili:

$$\frac{dy}{y-1} = \frac{dt}{t}$$

integrando

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dt}{t}$$

si ottiene

$$\ln|y-1| = \ln|t| + C .$$

Ricordando le proprietà dei logaritmi, possiamo scrivere il risultato nel seguente modo:

$\ln|y-1| = \ln(K|t|)$ con $K = e^C$
quindi
$|y-1| = K|t|$
$y-1 = \pm K|t|$
$y = 1 \pm K|t|$
ovvero una famiglia di funzioni costituita da equazioni di semirette.
Insomma, l'integrale generale è il seguente:
$$\begin{cases} y(x) = 1 \pm K|t| \\ y = 1 \end{cases}$$

8. Calcolare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:
$y' = \frac{-4}{t+3}\left(y^2-1\right)$.

Notiamo che dev'essere $t \neq -3$.
Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili. Due integrali particolari si ottengono ponendo $y^2 - 1 = 0$, cioè $y = \pm 1$.
Poniamo $y \neq \pm 1$ e separiamo le variabili:
$$\frac{1}{y^2-1}dy = -\frac{4}{t+3}dt$$
Integrando
$$\int \frac{1}{y^2-1}dy = \int -\frac{4}{t+3}dt .$$
Scomponendo la funzione razionale presente nel primo integrale, si ottiene:
$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy = \int -\frac{4}{t+3}dt$$
da cui
$$\frac{1}{2}\left(\ln|y-1| - \ln|y+1|\right) = -4\ln|t+3| + C .$$
Dalle proprietà dei logaritmi, riscriviamo:
$$\frac{1}{2}\ln\frac{|y-1|}{|y+1|} = -4\ln|t+3| + C$$
l'integrale generale è il seguente:
$$\begin{cases} \ln\frac{|y-1|}{|y+1|} = -8\ln|t+3| + 2C \\ y = \pm 1 \end{cases}$$
Osserviamo che non sempre è semplice esplicitare l'integrale generale dell'equazione differenziale.

9. Dopo aver calcolato l'integrale generale, risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' + (\cos t)y = 2e^{-\sin t} \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \end{cases}$$

L'equazione differenziale del problema di Cauchy è $y'=-(\cos t)y+2e^{-\sin t}$. Integriamola applicando direttamente la formula risolutiva e otteniamo:

$$y(t)=e^{-\int \cos t dt}\cdot\left[\int 2e^{-\sin t}e^{\int \cos t dt}dt+C\right]=e^{-\sin t}\cdot\left[\int 2e^{-\sin t}\cdot e^{\sin t}dt+C\right]=$$

$$=e^{-\sin t}\cdot\left[\int 2dt+C\right]=e^{-\sin t}\cdot(2t+C).$$

Imponiamo la condizione di Cauchy $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ e si ottiene:

$3=e^{-1}\cdot(\pi+C)$, da cui $C=3e-\pi$.

Quindi la soluzione del problema di Cauchy, che sappiamo essere unica, è:

$y(t)=e^{-\sin t}\cdot(2t+3e-\pi)$.

10. Data la seguente equazione differenziale: $y'-\frac{2t}{t^2+3}y=0$:

a) calcolare l'integrale generale;
b) individuare l'integrale particolare che verifica la seguente condizione iniziale: $y(2)=-1$;
c) individuare l'integrale particolare che verifica la seguente condizione iniziale: $y(1)=0$.

a) Consideriamo l'equazione differenziale a variabili separabili (può essere letta e risolta anche come una lineare).
Un integrale particolare è $y=0$.
Se $y\neq 0$, separiamo le variabili e otteniamo:

$$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{2t}{t^2+3}dt$$

$$\ln|y|=\ln|t^2+3|+C.$$

Quindi:

$|y|=K(t^2+3)$ con $K>0$.

Infine

$y=\pm K(t^2+3)$

Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale risulta:

$$\begin{cases} y(t)=\pm K(t^2+3) & K>0 \\ y=0 \end{cases}.$$

b) Imponiamo la condizione iniziale richiesta e otteniamo: $-1=-K(4+3)$ da cui $K=\frac{1}{7}$.

Quindi l'integrale particolare richiesto è: $y=-\frac{1}{7}|t^2+3|$.

c) In questo secondo problema una soluzione è l'integrale particolare è $y=0$ e poiché in questo caso la soluzione al problema di Cauchy esiste ed è unica (in quanto la funzione $b(y)=y$ è sempre derivabile con continuità) è l'unico integrale particolare; infatti se poniamo la condizione $y(1)=0$ nella soluzione $y=\pm K\left(t^2+3\right)$ si ottiene $K=0$ e di nuovo $y=0$.

11. Dopo aver calcolato l'integrale generale, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2t^2 y' + \sqrt{y+4} = 0 \\ y(1) = -4 \end{cases}$$

L'equazione differenziale è a variabili separabili.
Poniamo la condizione di esistenza $y \geq -4$.
Notiamo che $y=-4$ è una soluzione dell'equazione differenziale.
Dopo aver posto $t \neq 0$ e $y \neq -4$, separiamo le variabili e otteniamo:

$$\int \frac{2}{\sqrt{y+4}}\,dy = \int -\frac{1}{t^2}\,dt$$

$$4\sqrt{y+4} = \frac{1}{t} + C.$$

Da cui:

$$\sqrt{y+4} = \frac{1}{4t} + D$$

Possiamo esplicitare la y ponendo la condizione $\frac{1}{4t} + D \geq 0$, quindi si ottiene:

$$y(t) = -4 + \left(\frac{1}{4t} + D\right)^2.$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale risulta:

$$\begin{cases} y(t) = -4 + \left(\frac{1}{4t} + D\right)^2, \quad \frac{1}{4t} + D \geq 0 \\ y = -4 \end{cases}.$$

Nel risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2x^2 y' + \sqrt{y+4} = 0 \\ y(1) = -4 \end{cases}$$

notiamo che una soluzione è l'integrale già trovato $y=-4$, ma non è l'unica perché in questo caso infatti la funzione $b(y)=\sqrt{y+4}$ non è derivabile rispetto a y nell'intorno di $y=-4$ e quindi non vale di unicità della soluzione.
Calcoliamo un'altra soluzione sostituendo la condizione iniziale $y(1)=-4$ nell'integrale generale, otteniamo:

$$-4 = -4 + \left(\frac{1}{4} + D\right)^2, \text{ cioè } D = -\frac{1}{4}.$$

Quindi un'altra soluzione è:

$$y(t) = -4 + \left(\frac{1}{4t} - \frac{1}{4}\right)^2.$$

12. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y'' - 3y' + y = 0 \\ y'(1) = 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

L'equazione differenziale è del secondo ordine omogenea a coefficienti costanti:

$$2y'' - 3y' + y = 0$$

il polinomio associato risulta

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

che ammette soluzioni $\lambda = 1$ e $\lambda = \frac{1}{2}$.

Dunque l'integrale generale è dato da:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{\frac{1}{2}t}$$

Imponendo le due condizioni si ottiene:

$$2 = c_1 e + c_2 e^{\frac{1}{2}}$$

e, poiché $y'(t) = c_1 e^t + \frac{1}{2} c_2 e^{\frac{1}{2}t}$, si ha

$$1 = c_1 e + \frac{1}{2} c_2 e^{\frac{1}{2}}$$

da cui

$$\begin{cases} 2 = c_1 e + c_2 e^{\frac{1}{2}} \\ 1 = c_1 e + \frac{1}{2} c_2 e^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 2e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Quindi la soluzione è data da:

$$y(t) = 2e^{\frac{t-1}{2}}$$

13. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' + 2y = 0$ passante per $(0,1)$ e con un punto stazionario in $x = 0$.

Il problema di Cauchy descritto risulta:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Per prima cosa si trovano le soluzioni dell'equazione omogenea associata:

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

il polinomio associato risulta

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

che ammette soluzioni complesse coniugate $\lambda = 1 + i$ e $\lambda = 1 - i$.

Dunque l'integrale generale è dato da:
$$y(t) = e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$
Imponendo le due condizioni si ottiene:
$$1 = c_1 \text{ ovvero } c_1 = 1$$
e, poiché $y'(t) = e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + e^t(-c_1 \sin t + c_2 \cos t)$, si ha
$$0 = c_1 + c_2$$
da cui
$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$
La soluzione del problema di Cauchy risulta dunque:
$$y(t) = e^t(\cos t - \sin t)$$

14. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 4y' = 0$ tangente nell'origine alla retta $y = x$.

Il problema di Cauchy descritto risulta:
$$\begin{cases} y'' + 4y' = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Per prima cosa si trovano le soluzioni dell'equazione omogenea associata:
$$y'' + 4y' = 0$$
il polinomio associato risulta
$$\lambda^2 + 4\lambda = 0$$
che ammette soluzioni $\lambda = 0$ e $\lambda = -4$.
Dunque l'integrale generale è dato da:
$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-4t}$$
Imponendo le due condizioni si ottiene:
$$0 = c_1 + c_2$$

e, poiché $y'(t) = -4c_2 e^{-4t}$, si ha
$$1 = -4c_2$$
da cui
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -4c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{4} \\ c_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$
La soluzione del problema di Cauchy risulta dunque:

$$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-4t}$$