

Università "Carlo Cattaneo"

Ingegneria gestionale

Analisi matematica

a.a. 2017/2018

**FUNZIONI IN DUE VARIABILI**

**ESERCIZI CON SOLUZIONE**

1. Determinare il dominio delle seguenti funzioni e rappresentarlo sul piano cartesiano:

a)  $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

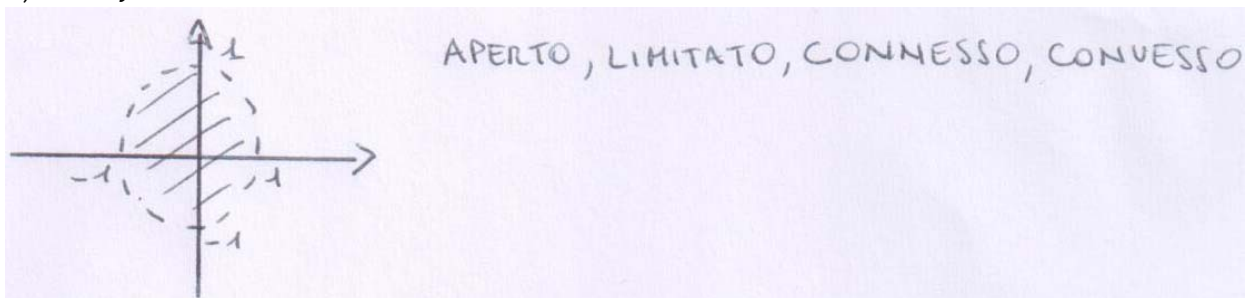
b)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^4)$

c)  $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^4}$

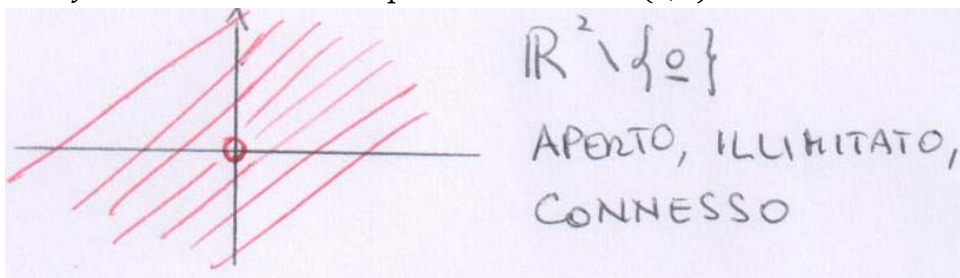
d)  $f(x, y) = \sqrt{\ln(x^2 + y^2)}$

e)  $f(x, y) = \ln(xy^2 + x^2y)$

a)  $x^2 + y^2 < 1$

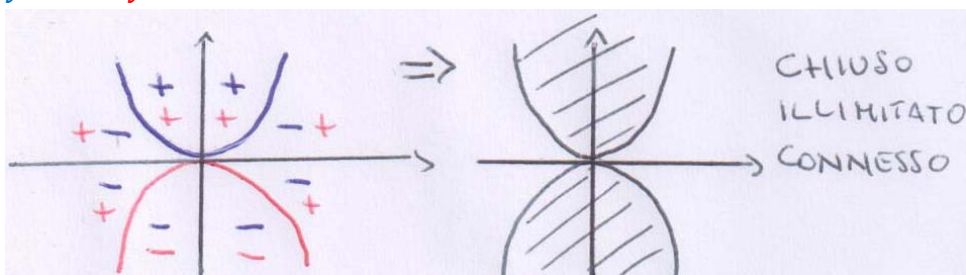


b)  $x^2 + y^4 > 0$  verificata ovunque tranne che in  $(0, 0)$

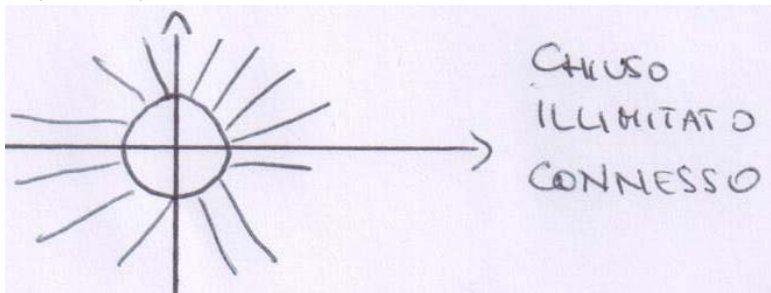


c)  $y^2 - x^4 \geq 0, (y - x^2)(y + x^2) \geq 0$

$y \geq x^2$  o  $y \geq -x^2$

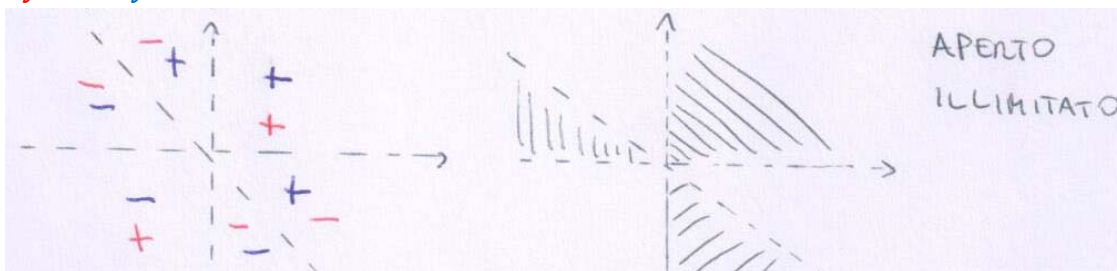


d)  $\ln(x^2 + y^2) \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1$



e)  $xy^2 + x^2y > 0, xy(y + x) > 0$

$xy > 0$  o  $y > -x$



2. Determinare le curve di livello  $k$  delle seguenti funzioni:

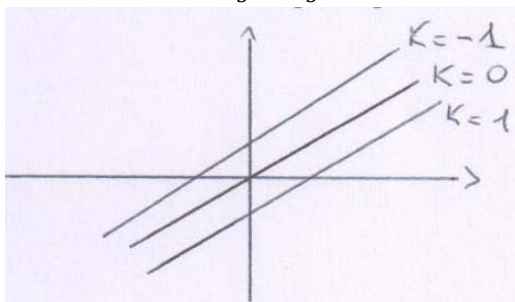
a)  $f(x, y) = 2x - 5y$

b)  $f(x, y) = x^2y$

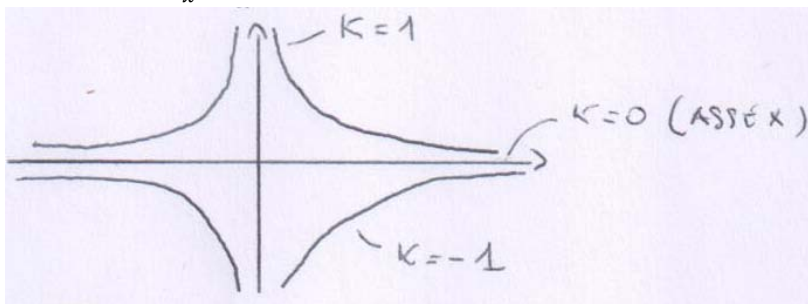
c)  $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2}{y+1}}$

d)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

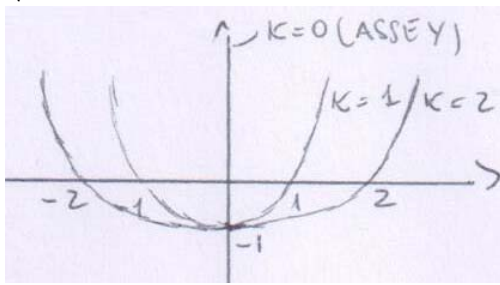
a)  $2x - 5y = k, y = \frac{2}{5}x - \frac{k}{5}$



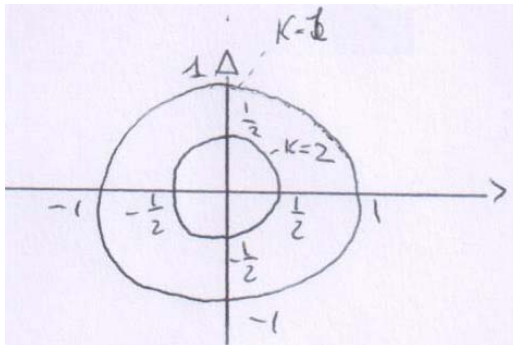
b)  $x^2y = k, y = \frac{k}{x^2}$  per  $x \neq 0$



c)  $\sqrt{\frac{x^2}{y+1}} = k \ (k \geq 0), \frac{x^2}{y+1} = k^2, y = \frac{x^2}{k^2} - 1$  se  $k \neq 0, x = 0$  se  $k = 0$



d)  $\frac{1}{x^2+y^2} = k, x^2 + y^2 = \frac{1}{k} \ (k \neq 0)$



3. Calcolare i seguenti limiti in due variabili:

a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2+1}{x^2+y^2}$

b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\ln(x^2y^2+1)}{xy}$

c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3-2xy+y^2}{x^2+y^2}$

d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^4}$

e)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2+1}{x^2+y^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\ln(x^2y^2+1)}{xy} = \frac{0}{0}$

ponendo  $xy = t$ , si ha  $xy \rightarrow 0 \cdot 1, t \rightarrow 0$  e si ottiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t^2 + 1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t} = 0$$

c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3-2xy+y^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$

calcolandolo lungo la direzione  $y = x$  si ha  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$

calcolandolo lungo la direzione  $y = 2x$  si ha  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{5x^2} = 0$

dunque il limite dato non esiste.

d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^2 + y^4} = \frac{0}{0}$

calcolandolo lungo la direzione  $y = 0$  si ha  $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$

calcolandolo lungo la direzione  $x = 0$  si ha  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^4} = 1$

dunque il limite dato non esiste.

e)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0}$

calcolandolo lungo la direzione  $y = x$  si ha  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{2x^2} = \frac{0}{0}$ , poiché  $\sin x^2$  è

asintotico a  $x^2$  per  $x \rightarrow 0$ , si ha:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

calcolandolo lungo la direzione  $y = x^2$  si ha  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x^2 + x^4} = \frac{0}{0}$ , poiché  $\sin x^3$  è

asintotico a  $x^3$  per  $x \rightarrow 0$  e  $x^2 + x^4$  è asintotico a  $x^2$  per  $x \rightarrow 0$ , si ha:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$

dunque il limite dato non esiste.

#### 4. Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni:

a)  $f(x, y) = x^2 + 2xy - xy^2$

b)  $f(x, y) = ye^{2x^2}$

c)  $f(x, y) = y^2 e^{-x}$

d)  $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$

e)  $f(x, y) = \sqrt{e^x + x^2 e^y}$

f)  $f(x, y) = \frac{x^2 + 3y}{xy}$

g)  $f(x, y) = x^3 y e^{xy}$

a)  $\nabla f(x, y) = [2x + 2y - y^2, 2x - 2xy]$

b)  $\nabla f(x, y) = [4xye^{2x^2}, e^{2x^2}]$

c)  $\nabla f(x, y) = [-y^2 e^{-x}, 2ye^{-x}]$

d)  $\nabla f(x, y) = \left[ \frac{x}{y}, \frac{-xe^{\frac{x}{y}}}{y^2} \right]$

e)  $\nabla f(x, y) = \left[ \frac{e^x + 2xe^y}{2\sqrt{e^x + x^2 e^y}}, \frac{x^2 e^y}{2\sqrt{e^x + x^2 e^y}} \right]$

f)  $\nabla f(x, y) = \left[ \frac{x^2 y - 3y^2}{x^2 y^2}, -\frac{x}{y^2} \right]$

g)  $\nabla f(x, y) = [3x^2 y e^{xy} + x^3 y^2 e^{xy}, x^3 e^{xy} + x^4 y e^{xy}]$

#### 5. Calcolare le derivate parziali seconde delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } f(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{7x+4y-2}}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$$

$$\text{c) } f(x, y) = \frac{\sqrt{1-x}}{y}$$

$$\text{a) } f_{xx} = -\frac{147}{4}(7x+4y-2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f_{yy} = -12(7x+4y-2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -21(7x+4y-2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\text{b) } f_{xx} = -2 \frac{1+x^2-y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

$$f_{yy} = -2 \frac{1-x^2+y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{-4xy}{(1-x^2-y^2)^2}$$

$$\text{c) } f_{xx} = -\frac{1}{4y}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f_{yy} = \frac{2\sqrt{1-x}}{y^3}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{1}{2y^2\sqrt{1-x}}$$

- 6.** Determinare la direzione di massima e minima crescita della seguente funzione:  
 $f(x, y) = \ln(x^2 + 3y^3)$  in  $(2, 1)$ .

Le derivate parziali della funzione risultano:

$$f_x = \frac{2x}{x^2+3y^3}$$

$$f_y = \frac{9y^2}{x^2+3y^3}$$

Il vettore gradiente nel punto dato risulta:  $\nabla f(2, 1) = \left(\frac{4}{7}, \frac{9}{7}\right)$ .

Dunque la direzione di massima crescita è data dal vettore gradiente normalizzato

$$\mathbf{d}_{max} = \frac{\left(\frac{4}{7}, \frac{9}{7}\right)}{\sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{9}{7}\right)^2}} = \frac{\left(\frac{4}{7}, \frac{9}{7}\right)}{\frac{\sqrt{97}}{7}} = \left(\frac{4}{\sqrt{97}}, \frac{9}{\sqrt{97}}\right)$$

la direzione di minima crescita è data dall'opposto vettore gradiente normalizzato

$$\mathbf{d}_{min} = \left(-\frac{4}{\sqrt{97}}, -\frac{9}{\sqrt{97}}\right)$$

- 7.** Determinare le derivate direzionali delle seguenti funzioni lungo le direzioni assegnate nei punti indicati:

$$\text{a) } f(x, y) = x^2 + xy - 2 \text{ in } (1, 0) \text{ lungo la direzione di } x - 2y = 0$$

$$\text{b) } f(x, y) = e^x \cos y \text{ in } (0, 0) \text{ lungo la direzione di } y = 2x$$

$$\text{c) } f(x, y) = \sqrt{|x^2 - xy|} \text{ in } (0, 0) \text{ lungo la direzione data da } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- a) Si tratta di una funzione polinomiale dunque sicuramente differenziabile, possiamo dunque calcolare la derivata direzionale con il gradiente:  
 $\nabla f(1, 0) = (2, 1)$

la direzione è quella di  $y = \frac{1}{2}x$ , quindi  $\mathbf{v} = (2, 1)$ . Dunque:

$$D_{\mathbf{v}}f = (2, 1) \cdot \frac{(2, 1)}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

- b) Si tratta di una funzione le cui derivate parziali risultano continue nel dominio e quindi differenziabile, possiamo dunque calcolare la derivata direzionale con il gradiente:

$$\nabla f(0, 0) = (1, 0)$$

la direzione è quella di  $\mathbf{v} = (1, 2)$ . Dunque:

$$D_{\mathbf{v}}f = (1, 0) \cdot \frac{(1, 2)}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

- c) Le derivate parziali hanno dei problemi di esistenza nel punto  $(0, 0)$ , dunque procediamo al calcolo della derivata direzionale applicando la definizione:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(0 + \frac{\sqrt{2}}{2}h, 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}h\right) - f(0, 0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\left|\frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h^2\right|} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

**8.** Scrivere l'equazione del piano tangente a:

a)  $f(x, y) = x^3 - y^3$  in  $(0, 1, -1)$

b)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  in  $(2, 0, 2)$

a)  $z = f(0, 1) + \nabla f(0, 1) \cdot (x, y - 1) = 2 - 3y$

b)  $z = f(2, 0) + \nabla f(2, 0) \cdot (x - 2, y) = x$

**9.** Scrivere l'equazione del polinomio di Taylor del secondo ordine della funzione  $f(x, y) = x^3 + x + 5y + 1$  centrato in  $(1, 2)$ .

L'equazione del polinomio è data da:

$$P_2(x, y) = f(1, 2) + \nabla f(1, 2) \cdot (x - 1, y - 2) + \frac{1}{2} [H_{(1, 2)}(x - 1, y - 2) \cdot (x - 1, y - 2)]$$

dove

$$f(1, 2) = 13$$

$$\nabla f(1, 2) = (4, 5)$$

$$H_{(1, 2)} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ha quindi:

$$P_2(x, y) = 13 + 4(x - 1) + 5(y - 2) + 3(x - 1)^2$$

**10.** Determinare i punti stazionari delle seguenti funzioni:

a)  $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 4xy + x^3$

b)  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$

c)  $f(x, y) = \ln x - 3x + 2xy - y^2$

d)  $f(x, y) = 2x^2y(3x - 3y)$

e)  $f(x, y) = 5xy^2 - 20xy - 3y^2$

- a)  $(\frac{2}{9}, \frac{4}{27}), (0, 0)$
- b)  $(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$
- c)  $(1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- d)  $(0, 0)$
- e)  $(0, 0), (\frac{6}{5}, 4)$