Università "Carlo Cattaneo"

Ingegneria gestionale

Analisi matematica

a.a. 2017/2018

PRIMITIVE E INTEGRALI DEFINITI

ESERCIZI CON SOLUZIONE

1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\int\left(x^2+\frac{1}{x^4}-2\right)dx$;

2) $\int\left(\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{1}{x}-e^x\right)dx$;

3) $\int\frac{x^5-4x^2+1}{x^4}dx$;

4) $\int\left(2\cos x-\frac{3}{5}\sin x\right)dx$;

5) $\int\left(-\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+1\right)dx$.

SOLUZIONI

1) La funzione di cui vogliamo calcolare l'integrale è somma algebrica di funzioni elementari. Ricordiamo che una delle proprietà dell'integrale è la linearità, dunque calcoliamo gli integrali come somma degli integrali delle singole funzioni.

La prime due sono funzioni potenza (usiamo quindi la regola: $\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+c$ $\forall a\neq -1$) mentre la terza è una costante (ricordiamo che $\int kdx=kx+c$), quindi:

$$\int\left(x^2+\frac{1}{x^4}-2\right)dx=\int x^2dx+\int\frac{1}{x^4}dx-\int 2dx=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3x^3}-2x+c.$$

2) Come prima si tratta della somma di funzioni elementari, di cui la prima una funzione potenza. Ricordando che $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$ e $\int e^x dx=e^x+c$, risolviamo l'integrale indefinito:

$$\int\left(\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{1}{x}-e^x\right)dx=\frac{1}{3}\int\sqrt{x}dx+\int\frac{1}{x}dx-\int e^x dx=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}+\ln|x|-e^x+c=\frac{2}{9}\sqrt{x^3}+\ln|x|-e^x+c.$$

3) Osserviamo che la funzione da integrare è una funzione razionale, prima di procedere con la soluzione possiamo dividere ogni singolo termine del numeratore per il denominatore:

$$\int \frac{x^5 - 4x^2 + 1}{x^4} dx = \int \left(\frac{x^5}{x^4} - \frac{4x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4} \right) dx .$$

A questo punto si tratta di una somma di funzioni elementari, quindi risulta:

$$\int \left(\frac{x^5}{x^4} - \frac{4x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4} \right) dx = \int x dx - 4\int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^4} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x} - \frac{1}{3x^3} + c .$$

4) Procediamo come fatto precedentemente ricordando che $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$ e $\int \cos x \, dx = \sin x + c$:

$$\int \left(2\cos x - \frac{3}{5}\sin x \right) dx = 2\int \cos x \, dx - \frac{3}{5}\int \sin x \, dx = 2\sin x + \frac{3}{5}\cos x + c .$$

5) Si tratta anche qui di una somma di funzioni elementari e quindi:

$$\int \left(-\frac{6}{\sqrt[3]{x}} + 1 \right) dx = -6\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx + \int dx - 6\int x^{-\frac{1}{3}} dx + x =$$

$$= -6 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} + x + c = -9\sqrt[3]{x^2} + x + c .$$

2. Calcolare i seguenti integrali indefiniti, spiegando il procedimento seguito:

1) $\int (2x-4)^7 dx$;

2) $\int x(x^2+2)^5 dx$;

3) $\int \frac{1}{x^2 - 6x + 9} dx$;

4) $\int \frac{10}{5x+6} dx$;

5) $\int \frac{4x+1}{2x^2 + x - 2} dx$;

6) $\int \sin x \sqrt{\cos x} dx$;

7) $\int \frac{e^x}{4 + 2e^x} dx$;

8) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$;

9) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x^2 + 1}} dx$;

10) $\int x^2 e^{2x^3} dx$;

11) $\int \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$.

SOLUZIONI

Gli integrali di questo esempio sono tutti riconducibili a integrali immediati, eventualmente utilizzando piccoli accorgimenti, e in quanto tali facilmente risolubili.

1) La funzione di cui vogliamo calcolare l'integrale si presenta come potenza di una funzione elementare, quindi, ricordando la generalizzazione dell'integrale indefinito per le funzioni potenza $\int [f(x)]^a \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{a+1}}{a+1} + c \quad \forall a \neq -1$, si ha:

$$\int (2x-4)^7 dx = \frac{1}{2}\int 2\cdot(2x-4)^7 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-4)^8}{8} + c = \frac{(2x-4)^8}{16} + c .$$

2) Come prima si tratta di un polinomio elevato a potenza con $f(x) = x^2 + 2$ e $f'(x) = 2x$; risolviamo l'integrale indefinito:

$$\int x\left(x^2+2\right)^5 dx = \frac{1}{2}\int 2x\left(x^2+2\right)^5 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+2\right)^6}{6} + c = \frac{\left(x^2+2\right)^6}{12} + c .$$

3) Osserviamo che il trinomio al denominatore non è altro che lo sviluppo del quadrato di binomio quindi possiamo riscrivere l'integrale nella seguente maniera:

$$\int \frac{1}{x^2-6x+9}dx = \int \frac{1}{(x-3)^2}dx = \int (x-3)^{-2} dx .$$

Come prima si tratta di una funzione potenza:

$$\int (x-3)^{-2} dx = \frac{(x-3)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{(x-3)} + c .$$

4) Ricordiamo che $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left|f(x)\right| + c$:

$$\int \frac{10}{5x+6}dx = 2\int \frac{5}{5x+6}dx = 2\ln\left|5x+6\right| + c .$$

5) Si tratta di un integrale come quello fatto al punto precedente con al numeratore la derivata del denominatore:

$f(x) = 2x^2 + x - 2$ e $f'(x) = 4x+1$, quindi

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+x-2}dx = \ln\left|2x^2+x-2\right| + c .$$

6) Riscriviamo la funzione nel seguente modo:

$$\int \sin x\sqrt{\cos x}dx = \int \sin x(\cos x)^{\frac{1}{2}} dx$$

si tratta nuovamente di una funzione potenza con $f(x) = \cos x$ e $f'(x) = -\sin x$, quindi

$$-\int -\sin x(\cos x)^{\frac{1}{2}}dx = -\frac{(\cos x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = -\frac{2}{3}\sqrt{(\cos x)^3} + c .$$

7) Osserviamo che al numeratore abbiamo, a meno di una costante, la derivata del denominatore ($f(x) = 4 + 2e^x$ e $f'(x) = 2e^x$) e quindi:

$$\int \frac{e^x}{4+2e^x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^x}{4+2e^x}dx = \frac{1}{2}\ln\left|4+2e^x\right| + c .$$

Poiché l'argomento del logaritmo è sempre positivo, possiamo riscrivere il risultato nel seguente modo: $\frac{1}{2}\ln\left(4+2e^x\right) + c$.

8) Riscriviamo l'integranda come segue:

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}dx .$$

Osserviamo che si tratta dell'integrale di una funzione del tipo $\frac{f'(x)}{f(x)}$, quindi:

$$\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}dx = \ln\left|\ln x\right| + c .$$

9) L'integrale può essere riscritto nel seguente modo:

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x^2+1}}dx = \int x\left(2x^2+1\right)^{-\frac{1}{3}}dx$$

si tratta ancora una volta di una funzione potenza con $f(x) = 2x^2 + 1$ e $f'(x) = 4x$.

$$\frac{1}{4}\int 4x\left(2x^2+1\right)^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{4}\frac{\left(2x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(2x^2+1\right)^2} + c .$$

10) Ricordando che $\int e^{f(x)}\cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + c$, in questo caso $f(x) = 2x^3$ e $f'(x) = 6x^2$, quindi:

$$\int x^2 e^{2x^3}dx = \frac{1}{6}\int 6x^2 e^{2x^3}dx = \frac{1}{6}e^{2x^3} + c .$$

11) Poiché $\int \sin\left[f(x)\right]\cdot f'(x)dx = -\cos\left[f(x)\right] + c$ (e analogamente $\int \cos\left[f(x)\right]\cdot f'(x)dx = \sin\left[f(x)\right] + c$), in questo caso $f(x) = \sqrt{x}$ e $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$\int \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx = \int \sin\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\int \sin\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = -2\cos\left(\sqrt{x}\right) + c .$$

3. Calcolare i seguenti integrale indefiniti:

1) $\int (x+1)\ln x\, dx$;

2) $\int x^2(\sin x)dx$;

3) $\int (\cos x)e^{-x}dx$.

SOLUZIONI

Per il calcolo dei tre integrali ricordiamo il metodo di integrazione per parti, che stabilisce: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$.

1) In questo caso $f'(x) = x+1$, da cui si ricava che $f(x) = \frac{x^2}{2} + x$; dunque:

$$\int (x+1)\ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \cdot \frac{1}{x} dx =$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \int \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \left(\frac{x^2}{4} + x\right) + c.$$

2) Per calcolare l'integrale $\int x^2(\sin x)dx$, pensiamo $\sin x$ come fattore differenziale cioè come la derivata della funzione $-\cos x$, applicando il metodo di integrazione per parti otteniamo:

$$\int x^2(\sin x)dx = -x^2 \cos x + \int 2x(\cos x)dx$$

Dobbiamo applicare ancora una volta il metodo per parti:

$$\int x^2(\sin x)dx = -x^2 \cos x + \int 2x(\cos x)dx =$$
$$= -x^2 \cos x + 2x\sin x - \int 2\sin x\, dx =$$
$$= -x^2 \cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c.$$

3) In questo caso consideriamo e^{-x} come fattore differenziale, otteniamo:

$$\int (\cos x)e^{-x}dx = -(\cos x)e^{-x} - \int (\sin x)e^{-x}dx$$

Di nuovo:

$$\int (\cos x)e^{-x}dx = -(\cos x)e^{-x} - \int (\sin x)e^{-x}dx =$$
$$= -(\cos x)e^{-x} + (\sin x)e^{-x} - \int (\cos x)e^{-x}dx\ .$$

Di conseguenza:

$$2\int (\cos x)e^{-x}dx = -(\cos x)e^{-x} + (\sin x)e^{-x} + k\ .$$

Infine:

$$\int (\cos x)e^{-x}dx = \frac{-(\cos x)e^{-x} + (\sin x)e^{-x}}{2} + c\ .$$

4. Calcolare il seguente integrale definito: $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$.

Iniziamo con la ricerca di una primitiva della funzione. L'integrale si risolve con il metodo di sostituzione.

Poniamo $\sqrt{x-1}=t$, da cui $x=t^2+1$ e quindi $dx=2tdt$, sostituendo i valori ottenuti ricaviamo:

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx=\int \frac{t}{t^2+1}2tdt=2\int \frac{t^2}{t^2+1}dt=$$

$$=2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=2\int dt-2\int \frac{1}{t^2+1}dt=$$

$$=2t-2\arctan(t)+c=2\sqrt{x-1}-2\arctan(\sqrt{x-1})+c\,.$$

Quindi:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx=\left[2\sqrt{x-1}-2\arctan(\sqrt{x-1})\right]_1^2=$$

$$=2-2\arctan(1)-0+2\arctan(0)=2-\frac{\pi}{2}\,.$$

5. Data la funzione $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-3x-4}$, trovare una sua primitiva passante per il punto $(5,-1)$.

Cerchiamo prima l'insieme delle primitive della funzione, calcolando il seguente integrale:

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x-4}dx\,.$$

Osserviamo che si tratta di una funzione razionale con al denominatore un trinomio di secondo grado avente radici reali distinte e sappiamo già che le primitive sono funzioni logaritmiche.

Possiamo riscrivere la funzione integranda nel seguente modo:

$$\frac{2x-3}{x^2-3x-4}=\frac{2x-3}{(x-4)(x+1)}$$

che vogliamo scomporre come somma di due frazioni più facilmente integrabili:

$$\frac{2x-3}{(x-4)(x+1)}\equiv\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+1}\,.$$

Da cui:

$$\frac{2x-3}{(x-4)(x+1)}\equiv\frac{A(x+1)+B(x-4)}{(x-4)(x+1)}=\frac{(A+B)x+A-4B}{(x-4)(x+1)}$$

affinché si verifichi l'identità, è necessario imporre che:

$\begin{cases}A+B=2\\A-4B=-3\end{cases}$ e risolvendo il sistema otteniamo i seguenti valori $\begin{cases}A=1\\B=1\end{cases}$.

Possiamo riscrivere l'integrale di partenza nel seguente modo:

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x-4}dx = \int\left(\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x+1}\right)dx = \int \frac{1}{x-4}dx + \int \frac{1}{x+1}dx =$$

$$= \ln|x-4| + \ln|x+1| + c\ .$$

Dunque l'insieme delle primitive è $G(x) = \ln|x-4| + \ln|x+1| + c$.

Imponiamo il passaggio per il punto $(5, -1)$ e otteniamo:

$-1 = \ln|5-4| + \ln|5+1| + c$, da cui $c = -1 - \ln 6$.

La primitiva cercata è infine: $G(x) = \ln|x-4| + \ln|x+1| - 1 - \ln 6$.

6. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{-x}{4x^2+4x+1}dx\ .$$

Osserviamo che si tratta di una funzione razionale con al denominatore un trinomio di secondo grado con due radici reali coincidenti e nella primitiva comparirà una funzione razionale oltre a quella logaritmica. In questo caso è possibile riscrivere la funzione integranda attraverso la seguente scomposizione:

$$\frac{-x}{4x^2+4x+1} = \frac{-x}{(2x+1)^2} \equiv \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{(2x+1)^2}\ .$$

Da cui:

$$\frac{-x}{(2x+1)^2} \equiv \frac{A(2x+1)+B}{(2x+1)^2} = \frac{2Ax+A+B}{(2x+1)^2}\ .$$

Affinché si verifichi l'identità, è necessario imporre che:

$$\begin{cases} 2A = -1 \\ A+B = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Infine calcoliamo l'integrale:

$$\int \frac{-x}{4x^2+4x+1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x+1)^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|2x+1| - \frac{1}{4(2x+1)} + c\ .$$

7. Trovare una primitiva della funzione: $f(x) = \dfrac{1}{2+4x^2}$.

Si nota che si tratta di una funzione razionale con al denominatore un trinomio di secondo grado con radici complesse coniugate e qui la primitiva sarà definita da un'arcotangente. Quindi è necessario ricondurci alla forma:

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = \arctan[f(x)]+c .$$

Procediamo:

$$\int \frac{1}{2+4x^2}dx = \int \frac{1}{2(1+2x^2)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}x)^2}dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x)+c .$$

Dunque una primitiva della funzione data si ottiene dando a c un qualsiasi valore, ad esempio $c=2$ e si ottiene: $G(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x)+2$.

8. Calcolare $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x+3\cos x}dx$;

SOLUZIONI

Le funzioni integrande di tutti gli integrali proposti si presentano come funzioni razionali di funzioni trigonometriche; queste prevedono, caso per caso, sostituzioni adeguate.

In questo caso basta eseguire la sostituzione $\cos x = t$ per ottenere l'integrale di una funzione razionale, procediamo:

$\cos x = t$, $-\sin x\,dx = dt$, si ha $\int \frac{-1}{t^2+3t}dt$.

$$\int \frac{-1}{t^2+3t}dt = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t+3}-\frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{3}(\ln|t+3|-\ln|t|)+c .$$

Concludendo si ha:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x+3\cos x}dx = \frac{1}{3}(\ln|\cos x+3|-\ln|\cos x|)+c .$$

10. Data la funzione $f(x)=2x+e^{3x}$, calcolare l'area compresa tra $f(x)$ e l'asse delle x nell'intervallo $[1,3]$.

La funzione è positiva nell'intervallo considerato, quindi per calcolare l'area è sufficiente risolvere l'integrale definito:

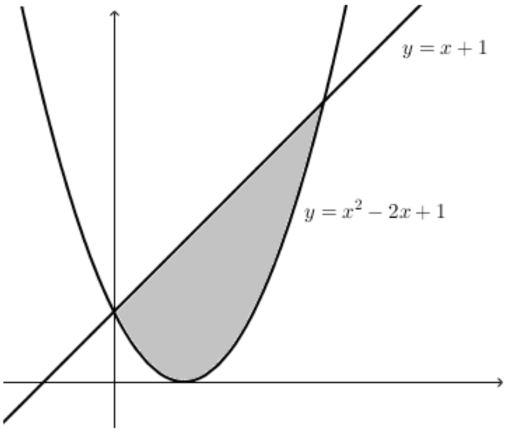
$$\int_1^3 (2x+e^{3x})dx = \int_1^3 2x\,dx + \int_1^3 e^{3x}dx = 2\int_1^3 x\,dx + \frac{1}{3}\int_1^3 3e^{3x}dx =$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 + \frac{1}{3}\left[e^{3x}\right]_1^3 = [9-1]+\frac{1}{3}\left[e^9-e^3\right] = 8+\frac{e^9-e^3}{3} .$$

Notiamo che il risultato è positivo.

11. Calcolare l'area della regione di piano finita compresa tra i grafici delle due funzioni $y=x^2-2x+1$ e $y=x+1$.

L'area della regione di piano da calcolare è la seguente:



Calcoliamo le intersezioni tra le due funzioni:

$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$, da cui $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$.

Osservando il grafico notiamo che la retta è tutta al di sopra della parabola nell'intervallo considerato, quindi l'area è uguale a:

$$A = \int_0^3 \left[(x+1) - (x^2 - 2x + 1)\right] dx = \int_0^3 (x + 1 - x^2 + 2x - 1) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx =$$

$$= \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2}.$$

12. Calcolare il seguente integrale definito: $\int_1^2 \frac{1}{1-e^x} dx$.

La funzione integranda si presenta come funzione razionale di e^x; in tal caso l'integrale si risolve con la sostituzione, ponendo $e^x = t$, da cui $x = \ln t$ e $dx = \frac{1}{t} dt$. Con questa sostituzione, nel nostro caso, si ottiene:

$$\int \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t(1-t)} dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{1-t}\right) dt =$$

$$= \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{1}{1-t} dt = \ln|t| - \ln|1-t| + c.$$

Ritornando al nostro integrale definito:

$$\int_1^2 \frac{1}{1-e^x} dx = \left[\ln|e^x| - \ln|1-e^x|\right]_1^2 = \left[x - \ln|1-e^x|\right]_1^2 =$$

$$= \left(2 - \ln|1-e^2|\right) - \left(1 - \ln|1-e|\right) = 1 + \ln\left(\frac{1}{e^2 - 1}\right) + \ln(e-1) =$$

$$= 1 + \ln\left(\frac{e-1}{e^2-1}\right) = 1 + \ln\left(\frac{1}{e+1}\right).$$

13. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 x^5 e^{x^3} dx .$$

Cominciamo col ricercare le primitive attraverso l'integrazione per parti:

$$\int x^5 e^{x^3} dx = \int x^3 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int x^3 3x^2 e^{x^3} dx =$$

poiché $3x^2 e^{x^3}$ è la derivata prima di e^{x^3}

$$= \frac{1}{3}x^3 e^{x^3} - \int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}x^3 e^{x^3} - \frac{1}{3}e^{x^3} + c .$$

A questo punto possiamo calcolare l'integrale:

$$\int_0^1 x^5 e^{x^3} dx = \left[\frac{1}{3}x^3 e^{x^3} - \frac{1}{3}e^{x^3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

In altro modo poteva essere utile porre, prima di calcolare l'integrale, $x^3 = t$ da cui $3x^2 dx = dt$. Con tale sostituzione, sostituendo anche gli estremi, l'integrale diventa:

$$\frac{1}{3}\int_0^1 te^t dt = \left[\frac{1}{3}e^t\left(t-1\right)\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$