

Università “Carlo Cattaneo”
Ingegneria gestionale
Analisi matematica
a.a. 2017/2018

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

ESERCIZI CON SOLUZIONE

1. Calcolare i punti di massimo, minimo o sella delle seguenti funzioni:

a) $f(x, y) = x^2y + x^2 - 2y$

b) $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$

c) $f(x, y) = \ln(1 + x^2y^2)$

d) $f(x, y) = x \cos y$

e) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

f) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

g) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+2y^2}$

a) Si tratta di una funzione polinomiale e dunque differenziabile (quante volte si vuole):

$$\nabla f(x, y) = (2xy + 2x, x^2 - 2)$$

i punti stazionari sono dati risolvendo $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ da cui si ottengono i punti $(\sqrt{2}, -1)$ e $(-\sqrt{2}, -1)$.

Per determinare la natura dei punti si calcola l'hessiana:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 + 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$$

Valutando l'hessiana nei due punti si ottiene:

$$H(\sqrt{2}, -1) = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \det H = -8 < 0$$

$$H(-\sqrt{2}, -1) = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \det H = -8 < 0$$

si conclude che i punti $(\sqrt{2}, -1)$ e $(-\sqrt{2}, -1)$ sono entrambi punti di sella.

b) Si tratta di una funzione polinomiale e dunque differenziabile:

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + y, 3y^2 + x)$$

i punti stazionari sono dati risolvendo $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ da cui si ottengono i punti $(0, 0)$ e $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

Per determinare la natura dei punti si calcola l'hessiana:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{bmatrix}$$

Valutando l'hessiana nei due punti si ottiene:

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \det H = -1 < 0$$

dunque $(0, 0)$ è un punto di sella.

$$H\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } \det H = 3 > 0 \text{ e } H_{11} = -2 < 0$$

dunque $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ è punto di massimo locale.

- c) Calcolando il gradiente della funzione si ha $\nabla f(x, y) = (\frac{2xy^2}{1+x^2y^2}, \frac{2x^2y}{1+x^2y^2})$, si osserva che le derivate parziali sono continue nel dominio e dunque la funzione è differenziabile.

I punti stazionari risultano $(a, 0)$ e $(0, b)$. Calcolando l'hessiana si ha:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{2y^2-2x^2y^4}{(1+x^2y^2)^2} & \frac{4xy}{(1+x^2y^2)^2} \\ \frac{4xy}{(1+x^2y^2)^2} & \frac{2x^2-2x^4y^2}{(1+x^2y^2)^2} \end{bmatrix}$$

Valutando nei punti stazionari si ottiene

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dalla quale non possiamo dedurre nulla sulla natura dei punti.}$$

Per cercare gli eventuali punti di massimo e minimo della funzione procediamo studiando le sue curve di livello:

$$f(x, y) = k, \text{ cioè } \ln(1 + x^2y^2) = k, \text{ da cui:}$$

$$1 + x^2y^2 = e^k$$

$$x^2y^2 = e^k - 1$$

Notiamo che $e^k - 1 \geq 0$, cioè $k \geq 0$.

Quindi la funzione non esiste per $k < 0$ e in corrispondenza di $k = 0$ assume il suo valore minimo. Quindi quei punti appartengono alla curva di livello 0 sono tutti punti di minimo.

Per $k = 0$ si ha $x^2y^2 = 0$, quindi la funzione ammette infiniti punti di minimo in corrispondenza dei punti $(a, 0)$ e $(0, b)$.

- d) Il gradiente della funzione risulta $\nabla f(x, y) = (\cos y, -x \sin y)$, si osserva che le derivate parziali sono continue nel dominio e dunque la funzione è differenziabile. Annullando le componenti del gradiente si ottengono infiniti punti stazionari della forma $(0, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ con $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Calcolando l'hessiana si ha:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin y \\ -\sin y & -x \cos y \end{bmatrix}$$

E si osserva che

$$H\left(0, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ il suo determinante è sempre negativo dunque i punti stazionari sono tutti punti di sella.}$$

- e) Calcolando il gradiente si ha $\nabla f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)$, si osserva che le derivate parziali sono continue nel dominio e dunque la funzione è differenziabile. Annullando le componenti del gradiente si ottiene il punto $(0,0)$.

Calcolando l'hessiana si ha:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1+y^2}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}} & \frac{-xy}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ \frac{-xy}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}} & \frac{1+x^2}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}} \end{bmatrix}$$

Valutandola nel punto stazionario

$H(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\det H = 1 > 0$ e $H_{11} = 1 > 0$
dunque $(0,0)$ è punto di minimo locale.

- f) Analogamente a quanto fatto sopra si ottiene che $(0,0)$ è punto di minimo locale.
- g) La funzione è definita continua per ogni $(x, y) \neq (0,0)$.
Il gradiente risulta $\nabla f(x, y) = \left(\frac{-2x}{(x^2+2y^2)^2}, \frac{-4y}{(x^2+2y^2)^2} \right)$ che si annulla in $(0,0)$ punto non appartenente al dominio della funzione. Non esistono dunque punti stazionari.

2. Calcolare gli eventuali punti di massimo e minimo della funzione

$$f(x, y) = 2x^4 + 3x^2y - 2y$$

sull'insieme $A = \{(x, y): x^2 \leq y \leq 1\}$.

La funzione data è polinomiale e dunque continua sul piano, in particolare la regione su cui calcolare gli ottimi è un compatto, dunque per il teorema di Weierstrass ammetterà sicuramente punti di massimo e minimo globali.

Cerchiamo prima gli eventuali ottimi nella parte interna della regione A .

Il gradiente $\nabla f(x, y) = (8x^3 + 6xy, 3x^2 - 2)$ si annulla in punti non appartenenti alla regione dunque la funzione non ammette ottimi nella parte interna di A .

Analizziamo ora cosa succede al bordo che si presenta come l'unione dei due insiemi:

$$B = \{(x, y): y = x^2, -1 \leq x \leq 1\}$$

$$C = \{(x, y): y = 1, -1 \leq x \leq 1\}$$

La funzione ristretta su B è $f(x, x^2) = 5x^4 - 2x^2$, che ottimizziamo con le tecniche di ottimizzazione per funzioni a una variabile (studiando il segno della derivata sul compatto $-1 \leq x \leq 1$). Si ricava che su B i punti di massimo locale sono $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, i punti di minimo locale sono $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{5}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{5}\right)$.

La funzione ristretta su C è $f(x, 1) = 2x^4 + 3x^2 - 2$, che ottimizziamo con le tecniche di ottimizzazione per funzioni a una variabile (studiando il segno della derivata sul compatto $-1 \leq x \leq 1$). Si ricava che su C i punti di massimo locale sono $(1,1)$, $(-1,1)$, il punto di minimo locale è $(0,1)$.

Poiché stiamo ottimizzando su un compatto ci interessano esclusivamente (sono gli unici di cui sappiamo e possiamo dire qualcosa sulla loro natura) i punti di massimo e minimo globali; calcolando il valore che questi punti assumono mediante f , si ricava che $(1,1)$ e $(-1,1)$ sono punti di massimo globale e $(0,1)$ è punto di minimo globale.

N.B. sugli altri punti ottenuti sulla restrizione della funzione sulla frontiera nulla sappiamo dire sulla loro natura!

