LIUC

ANALISI MATEMATICA

2016 / 2017

OTTIMI VINCOLATI

1) max / min $f(x,y) = e^{-(x-2y)^2}$ sotto il vincolo $x^2+y^2-\frac{1}{4}=0$

con il metodo delle curve di livello si ha:

$$e^{-(x-2y)^2} = k \rightarrow k>0$$

$$-(x-2y)^2 = \ln k \rightarrow \ln k \leq 0 \rightarrow k \leq 1$$

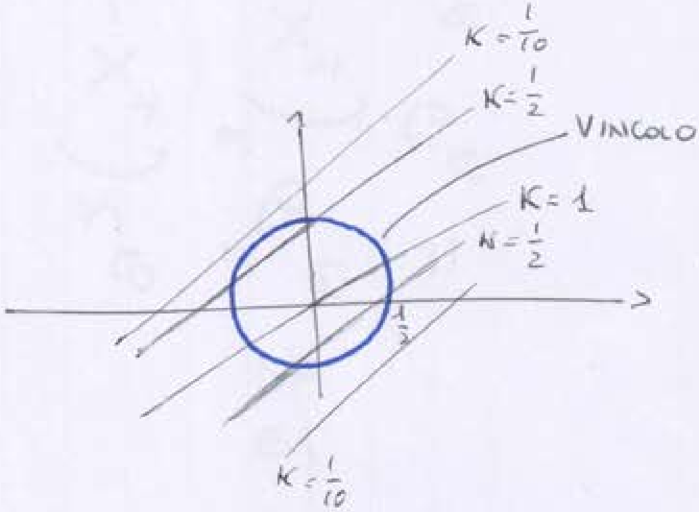
$$(x-2y)^2 = -\ln k$$

$$x-2y = \pm\sqrt{-\ln k}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \sqrt{-\ln k}$$

ovvero

$$y = \frac{1}{2}x + \sqrt{-\ln k}$$



condizione di tangenza

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{2}x-\sqrt{-\ln k} \end{cases}$$

$$x^2+\frac{1}{4}x^2-\ln k - x\sqrt{-\ln k}-\frac{1}{4}=0$$

$$\frac{5}{4}x^2 - x\cdot\sqrt{-\ln k}-\frac{1}{4}-\ln k=0$$

$$\Delta = -\ln k - 4\cdot\frac{5}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}-\ln k\right) =$$

$$= 4\ln k + \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow \ln k = -\frac{5}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}x^2 - x\sqrt{\frac{5}{16}} - \frac{1}{4} + \frac{5}{16} = 0$$

$$\frac{5}{4}x^2 - \sqrt{\frac{5}{16}}\,x + \frac{1}{16} = 0$$

$$x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{\frac{5}{16}}}{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{4}{10} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{10} - \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{20} - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{-4}{20}\sqrt{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\left(\frac{\sqrt{5}}{10}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ P.TO DI MINIMO (i valori di k sono tutti maggiori)

ANALOGAMENTE

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2}x + \sqrt{-\ln k} \end{cases}$$

dalla condiz. di tangenza si ricava $\ln k = -\frac{5}{16}$

da cui si ha estremante in $\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

P.TO DI MINIMO (i valori di k sono tutti maggiori)

---

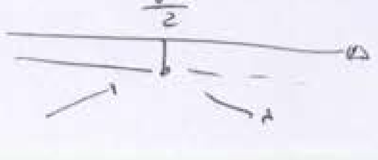
2) max/min $f(x,y) = 2x + 3y$ vincolati $x^4 + y^4 = 1$

SOSTITUENDO: $x = 1 - y^4$

$$f(y) = 2(1-y^4) + 3y = -2y^4 + 3y + 2$$

$$f'(y) = -8y^3 + 3 \qquad f'(y) \geq 0 \qquad y \leq \sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$$

$\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$



$$y = \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \to x = 1 - \left(\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right)^4 = 1 - \frac{3\sqrt[3]{3}}{16}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{16 - 3\sqrt[3]{3}}{16}, \frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right) \text{ è pto di massimo}$$

---

3) max/min $f(x,y) = -x \ln x - y \ln y$

con vincolo $x + y = 1$

Considero la Lagrangiana

$$L(x,y,\lambda) = -x \ln x - y \ln y - \lambda(x+y-1)$$

$$\begin{cases} L_x = -\ln x - 1 - \lambda = 0 \\ L_y = -\ln y - 1 - \lambda = 0 \\ L_\lambda = -x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \lambda = -\ln x - 1 \\ \lambda = -\ln y - 1 \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln x = \ln y$$

$$\Downarrow$$

$$x = y$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ \lambda = -\ln\frac{1}{2} - 1 = \ln 2 - 1 \end{cases}$$

$$L_{xx}(x,y,\ln 2 - 1) = -\frac{1}{x}$$

$$L_{yy}(x,y,\ln 2 - 1) = -\frac{1}{y} \qquad H_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$L_{xy}(x,y,\ln 2 - 1) = 0 \qquad \det H > 0$$

$$H_{11} < 0 \quad \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ È P.TO MAX VINCOLATO}$$

4) max / min $f(x,y) = x^3 + y^3$

sub

$y^2 - x^2 = 1$

$$L(x,y,\lambda) = x^3 + y^3 - \lambda\,(y^2 - x^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L_x = 3x^2 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 3y^2 - 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = -y^2 + x^2 + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\,(3x + 2\lambda) = 0 & \text{I} \\ y\,(3y - 2\lambda) = 0 & \text{II} \\ -y^2 + x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

da I e II ricaviamo $x = 0$, $x = -\frac{2}{3}\lambda$, $y = 0$, $y = \frac{2}{3}\lambda$

cioè LE SEGUENTI POSSIBILITÀ

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -y^2 + x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

IMPOSSIBILE

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2}{3}\lambda \\ -\frac{4}{9}\lambda^2 + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = \pm\frac{3}{2} \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

$\left(0, 1, \frac{3}{2}\right)$

$\left(0, -1, -\frac{3}{2}\right)$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3}\lambda \\ y = 0 \\ \frac{4}{9}\lambda^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3}\lambda \\ y = \frac{2}{3}\lambda \\ -\frac{4}{9}\lambda^2 + \frac{4}{9}\lambda^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

$L_{xx}(x,y,\lambda) = 6x + 2\lambda$

$L_{yy}(x,y,\lambda) = 6y - 2\lambda$

$L_{xy}(x,y,\lambda) = L_{yx}(x,y,\lambda) = 0$

Se $P_1\left(0, 1, \frac{3}{2}\right)$

$$H_{\left(0,1,\frac{3}{2}\right)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \det H > 0 \\ H_{11} > 0 \end{matrix} \Rightarrow (0,1) \text{ è pto di min. vincolato}$$

Se $P_2\left(0, -1, -\frac{3}{2}\right)$

$$H_{\left(0,-1,-\frac{3}{2}\right)} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \det H > 0 \\ H_{11} < 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow (0,-1)$ è pto di max vincolato