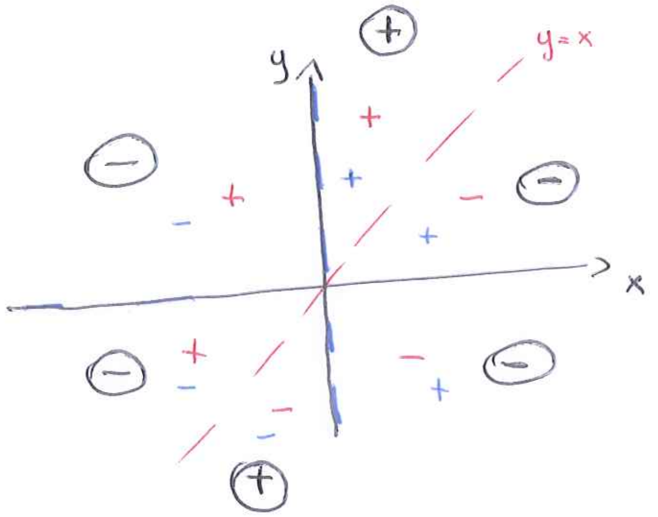
SOLUZIONE SIMULAZIONE 4ª PROVA PARZIALE

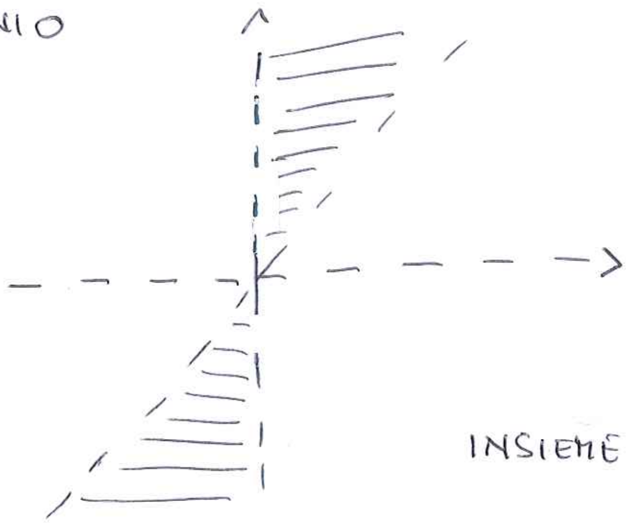
1. DOMINIO f: $\frac{y-x}{x} > 0$

N > 0 $\quad y > x$

D > 0 $\quad x > 0$



DOMINIO



INSIEME APERTO E ILLIMITATO
(NON CONVESSO)

CURVE DI LIVELLO: $\ln\left(\frac{y-x}{x}\right) - 1 = k \qquad k \in \mathbb{R}$

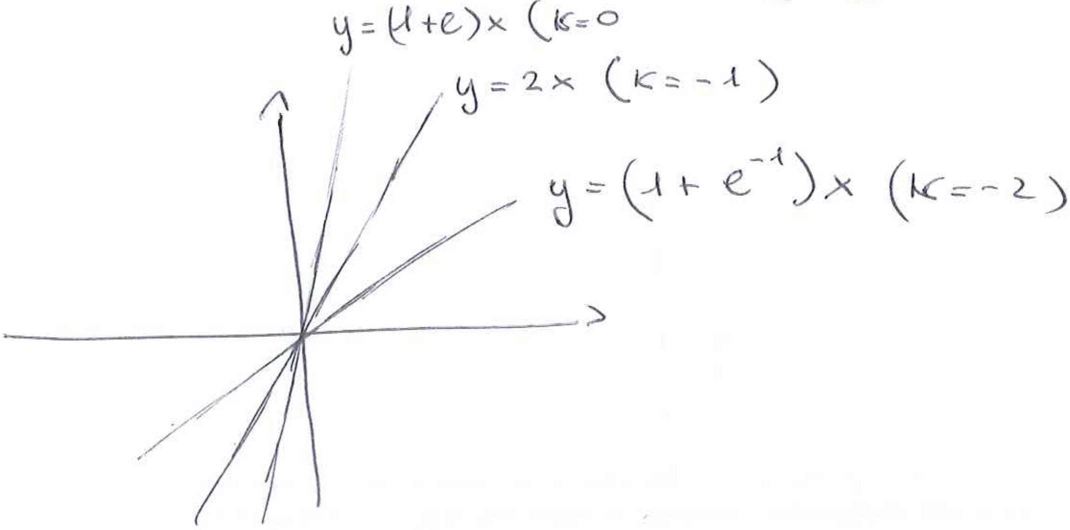
$$\ln\left(\frac{y-x}{x}\right) = k+1$$

$$\frac{y-x}{x} = e^{k+1}$$

poichè $x \neq 0$ (per condizioni di esistenza):

$$y = x + x \cdot e^{k+1}$$

$y=(1+e^{k+1})x$ ← RETTE CON COEFFICIENTE POSITIVO PASSANTI PER $(0,0)$



DERIVATA DIREZIONALE in $(1,3)$ LUNGO LA DIREZIONE DATA DA $(-1,-6)$:

$$f_x(x,y)=\frac{x}{y-x}\cdot\frac{-1\cdot x-(y-x)\cdot 1}{x^2}=\frac{-y}{x(y-x)}$$

$$f_y(x,y)=\frac{x}{y-x}\cdot\frac{1\cdot x-0}{x^2}=\frac{1}{y-x}$$

$$\nabla f(x,y)=\left(-\frac{y}{x(y-x)},\ \frac{1}{y-x}\right)$$

NOTIAMO CHE LA FUNZIONE RISULTA DIFFERENZIABILE IN UN INTORNO DI $(1,3)$ IN QUANTO QUI LE DERIVATE PARZIALI SONO CONTINUE.

QUINDI, DETTO $\underline{v} = (-1, -4)$

$$D_{\underline{v}} f = \nabla f(1,3) \cdot \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} =$$

$$= \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{17}}, \frac{-4}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{17}}$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1-3xy) + \sqrt{x}\, y^2}{e^{x^2+y^4} - 1} = \frac{0}{0}$$

· calcoliamo lungo il percorso $y = x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-3x^2) + \sqrt{x}\cdot x^2}{e^{x^2+x^4} - 1} \sim \lim_{x\to 0} \frac{-3x^2 + x^{\frac{5}{2}}}{x^2 + x^4} \sim$$

$$\sim \lim_{x\to 0} \frac{-3x^2}{x^2} = -3$$

· calcoliamo lungo il percorso $y = -x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x^2) + \sqrt{x}\cdot x^2}{e^{x^2+x^4} - 1} \sim \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + x^{\frac{5}{2}}}{x^2 + x^4} \sim$$

$$\sim \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

Calcolando lungo due diversi percorsi abbiamo ottenuto due diversi risultati $\Longrightarrow$ il limite NON esiste

3. Ciascun "tratto" della funzione è ben definito su $\mathbb{R}^2$, ci occorre verificare se è continua in $(x,y)=(0,0)$:

$$f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

$$f(0,0)=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^4)^3 - \operatorname{sen}(x^2+y^4)}{2(x^2+y^4)} = 0$$

NOTIAMO CHE LA QUANTITÀ x^2+y^4 SI RIPETE SEMPRE UGUALE, QUINDI PONIAMO $t = x^2+y^4$

per $(x,y)\to(0,0) \Rightarrow t\to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{3t^3 - \operatorname{sen} t}{2t} \sim \lim_{t\to 0} \frac{3t^3 - t}{2t} \sim \lim_{t\to 0} \frac{-t}{2t} = -\frac{1}{2}$$

poiché $f(0,0) \neq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ la funzione NON È CONTINUA SU $\mathbb{R}^2$

4. DOMINIO $f = \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 4x^3 - 2 \\ \\ f_y = 4y^3 + 2 \end{array}\right\}$$ SONO CONTINUE SU $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ DIFFERENZIABILE SU $\mathbb{R}^2$

PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases} 4x^3 - 2 = 0 \\ 4y^3 + 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3 = \frac{1}{2} \\ y^3 = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2} \end{cases}$$

UNICO P.TO STAZIONARIO $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$

$f_{xx} = 12x^2$

$f_{yy} = 12y^2 \qquad \Rightarrow H_{\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)} = \begin{bmatrix} 3\sqrt[3]{16} & 0 \\ 0 & 3\sqrt[3]{16} \end{bmatrix}$

$f_{xy} = f_{yx} = 0$

$\det H > 0 \,, \; f_{xx} > 0$

$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$ È PUNTO di MINIMO LOCALE

5. f, g DIFFERENZIABILI SU $\mathbb{R}^2$ $\left[f(x,y) = 2x - y^2 \text{ e } g(x,y) = x^2 + 3y^2 \right]$

$\nabla g = (2x, 6y)$ che SI ANNULLA in $(0,0)$, PUNTO CHE NON SODDISFA IL VINCOLO

QUINDI APPLICO IL METODO DI LAGRANGE

$$L(x,y,\lambda) = 2x - y^2 - \lambda(6 - x^2 - 3y^2)$$

$$\left.\begin{aligned} L_x &= 2 + 2\lambda x \\ L_y &= -2y + 6\lambda y \\ L_\lambda &= x^2 + 3y^2 - 6 \end{aligned}\right\} \nabla L(x,y,\lambda)$$

Cerchiamo i PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0 \\ -2y + 6\lambda y = 0 \\ x^2 + 3y^2 - 6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2y(1 - 3\lambda) = 0 \\ 2(1 + \lambda x) = 0 \longrightarrow \lambda x = -1 \\ x^2 + 3y^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

$-2y(1-3\lambda)=0 \to y = 0$ oppure $\lambda = \frac{1}{3}$

- $y = 0$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 1 + \lambda x = 0 \\ x^2 = 6 \end{cases} \qquad x^2 = 6 \to x = \sqrt{6} \text{ oppure } x = -\sqrt{6}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \sqrt{6} \\ \lambda = -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = -\sqrt{6} \\ \lambda = \frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

- $\lambda = \frac{1}{3}$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ 1 + \frac{1}{3}x = 0 \\ x^2 + 3y^2 - 6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ x = -3 \\ 9 + 3y^2 - 6 = 0 \to y^2 = -1 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

I PUNTI STAZIONARI SONO: $\left(\sqrt{6}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\sqrt{6}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

ANALIZZIAMO LA LORO NATURA AL VARIARE di λ:

Se $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, che natura ha $(\sqrt{6}, 0)$?

$$L_{xx} = -\frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$L_{yy} = -2 - \frac{6}{\sqrt{6}} = -2 - \sqrt{6}$$

$$L_{xy} = L_{yx} = 0$$

$$H_{(\sqrt{6},0)} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$\det H = \frac{4}{\sqrt{6}} + 2 > 0 \quad , f_{xx} < 0$$

$\Rightarrow (\sqrt{6}, 0)$ PUNTO DI MAX LOCALE se $\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$, che natura ha $(-\sqrt{6}, 0)$?

$$L_{xx} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$L_{yy} = -2 + \frac{6}{\sqrt{6}} = -2 + \sqrt{6}$$

$$L_{xy} = L_{yx} = 0$$

$$H_{(-\sqrt{6},0)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & -2+\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$\det H = -\frac{4}{\sqrt{6}} + 2 > 0 \quad , \quad f_{xx} > 0$$

$\Rightarrow (-\sqrt{6}, 0)$ PUNTO DI MINI LOCALE

OSSERVIAMO CHE, POICHÈ IL VINCOLO $x^2+3y^2=6$ È COMPATTO (è una ELLISSE) I PUNTI DI OTTIMO LOCALE TROVATI, PER IL TEO. DI WEIERSTRASS, SONO DI OTTIMO GLOBALE.

6.
$$\begin{cases} 2t \ln t \, y' = (y-1)^{\frac{2}{3}} \\ y(e) = 2 \end{cases}$$

Consideriamo $2t \ln t \, y' = (y-1)^{\frac{2}{3}}$ $\quad$ C.E. $t>0$

è A VARIABILI SEPARABILI: $y' = \dfrac{(y-1)^{\frac{2}{3}}}{2t\ln t}$

poniamo $(y-1)^{\frac{2}{3}} \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$

$$\frac{y'}{(y-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2t\ln t} \qquad (\text{CON } t \neq 1)$$

$$\int (y-1)^{-\frac{2}{3}} dy = \int \frac{1}{2t\ln t} dt$$

$$3(y-1)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\ln|\ln t| + c$$

$$\sqrt[3]{y-1} = \frac{1}{6}\ln|\ln t| + \frac{c}{3}$$

$y(t) = \left(\dfrac{1}{6}\ln|\ln t| + \dfrac{c}{3}\right)^3 + 1$ è SOLUZIONE GENERALE

$y = 1$ è SOLUZIONE PARTICOLARE

la $f(t,y)$ e $f_y(t,y)$ SONO CONTINUE IN $I(e,2)$

quindi impongo la condizione di passaggio: $y(e) = 2$

$$\left(\frac{1}{6}\ln|\ln e| + \frac{c}{3}\right)^3 + 1 = 2$$

$$\left(\frac{1}{6}\ln 1 + \frac{c}{3}\right)^3 = 1$$

$$\frac{c^3}{27} = 1 \implies \underline{c = 3}$$

$\Longrightarrow$ SOLUZIONE UNICA $y(t) = \left(\frac{1}{6}\ln|\ln t| + 1\right)^3 + 1$

7. IL DOMINIO È y-semplice, per il teorema di FUBINI:

$$\iint_D \left(\frac{1}{y^2} - e^{2x}\right) dx\,dy = \int_1^2 \left[\int_1^x \left(\frac{1}{y^2} - e^{2x}\right) dy\right] dx =$$

$$= \int_1^2 \left[-\frac{1}{y} - e^{2x} y\right]_1^x dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x} - x e^{2x} + 1 + e^{2x}\right) dx =$$

$$= \underbrace{\int_1^2 \left(-\frac{1}{x} + 1 + e^{2x}\right) dx}_{\text{IMMEDIATO}} - \underbrace{\int_1^2 x e^{2x}\,dx}_{\text{PER PARTI}} =$$

$$= \left[-\ln|x| + x + \frac{1}{2}e^{2x}\right]_1^2 - \left[\frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right]_1^2 =$$

$$= 1 - \ln 2 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^4$$

8. È UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 2° ORDINE LINEARE OMOGENEA

$$3y'' + 5y' - 2y = 0$$

CONSIDERIAMO IL POLINOMIO ASSOCIATO:

$$3a^2 + 5a - 2 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -2 \end{cases}$$

2 SOLUZIONI REALI DISTINTE

$\Rightarrow$ SOLUZIONE:

$$y(t) = c_1 e^{a_1 t} + c_2 e^{a_2 t} = c_1 e^{\frac{1}{3} t} + c_2 e^{-2t}$$