ESERCIZIO 1

Sia X il numero di unità di un certo prodotto acquistate da un generico cliente di un supermercato. Si supponga ch X abbia la seguente distribuzione

valore	probabilità
0	0.4
1	0.2
2	0.2
3	0.1
4	0.1

a) Si calcoli la probabilità che il cliente acquisti più di un'unità di prodotto.
b) Si calcoli la mediana del numero di unità di prodotto acquistate dal cliente.
c) Si calcoli la varianza del numero di unità di prodotto acquistate.
d) Se un'unità di prodotto costa 10, si calcoli la spesa attesa del cliente.
e) Si calcoli la distribuzione della spesa per l'acquisto dei prodotti.

ESERCIZIO 2

La produzione di un'unità di un certo prodotto richiede un costo variabile legato al tempo necessario ed un costo fisso legato alle materie prime. Il costo variabile è pari a 2$ al minuto, il costo fisso è 20$. Il tempo necessario per la produzione di un'unità di prodotto è una variabile aleatoria con valore atteso 10 minuti e scarto quadratico medio 2 minuti.
a) Si calcoli il costo atteso necessario per la produzione di un'unità di prodotto.
b) Si calcoli lo scarto quadratico medio del costo necessario per la produzione di un'unità di prodotto.

ESERCIZIO 3

Sia X una variabile aleatoria con funzione di probabilità

valore	probabilità
-2	0.2
0	0.1
1	0.4
2	0.1
4	0.2

a) Si dica se X ha distribuzione simmetrica.
b) Si calcolino valore atteso e mediana di X.
c) Si determini la distribuzione di $Y=2X^2 -3$.

ESERCIZIO 4

La probabilità che un'automobile in divieto di sosta in una certa strada sia multata è pari a 0.3. Si considerino 20 auto in divieto di sosta.
a) Si calcoli la probabilità che almeno 5 auto siano multate.
b) Si calcoli la probabilità che 7 auto siano multate.
c) Si calcoli la probabilità che le auto multate siano tra 6 e 8 (estremi inclusi).
d) La multa ammonta a 50 euro. Si calcoli l'ammontare totale atteso derivante dalle multe ottenute sulle 20 auto. Si calcoli quindi lo scarto quadratico medio di tale ammontare totale.

ESERCIZIO 5

La probabilità di trovare posto in un certo treno è, ogni giorno, pari a 0.6. Un pendolare frequenta il treno 5 volte in una settimana.
a) Si calcoli la probabilità che il pendolare non trovi mai posto.
b) Si calcoli la probabilità che il pendolare trovi sempre posto.
c) Si calcoli la probabilità che il pendolare trovi posto meno di 4 volte.

ESERCIZIO 6

E’ noto che l’8% delle fatture emesse da un’azienda presenta errori formali. Si considera un campione di 12 fatture.

a) Si calcoli la probabilità che ve ne siano più di 3 con errori formali.

b) Una fattura con errori comporta un costo pari a 10 euro. Si calcolino costo atteso e varianza del costo relativi alle fatture con errori tra le 12 considerate.

ESERCIZIO 7

Il numero di telefonate “indesiderate” che arrivano ad un’utenza in un giorno segue la distribuzione di Poisson con media 2.6.

a) Si calcoli la probabilità che in un giorno arrivino più di 3 telefonate indesiderate.

b) Si calcoli la probabilità che in un giorno arrivino tra 2 (escluso) e 5 (incluso) telefonate indesiderate.

c) Si calcoli la probabilità che in 4 giorni arrivino 10 telefonate.

d) Si calcoli il numero medio di telefonate che arrivano in 3 giorni.

e) Si calcoli lo scarto quadratico medio del numero di telefonate che arrivano in 3 giorni.

ESERCIZIO 8

Il numero di contratti di vendita stipulati in una settimana da un agente immobiliare è distribuito in accordo ad una distribuzione di Poisson. La varianza è 1.8.

a) Si calcoli la probabilità che il numero di contratti stipulati nella settimana non superi 4.

b) Si calcoli la probabilità che il numero di contratti stipulati nella settimana sia uguale a 3.

c) Per ogni contratto stipulato, l’agente ottiene un benefit pari a 100 euro. Si calcolino valore atteso e deviazione standard del benefit totale ottenuto dall’agente nella settimana.

ESERCIZIO 9

Gli arrivi dei clienti ad uno sportello bancario seguono la distribuzione di Poisson. Il numero medio di arrivi è di 3 ogni 10 minuti.

a) Si calcoli la probabilità che in 5 minuti vi siano più di 2 arrivi.

b) Si calcoli la probabilità che in 20 minuti vi siano almeno 5 arrivi.

c) Si calcoli la probabilità che in 20 minuti via siano esattamente 4 arrivi.

d) Si calcoli il numero medio di clienti che arrivano in 30 minuti.

e) Si calcoli lo scarto quadratico medio del numero di clienti che arrivano in 30 minuti.

ESERCIZIO 10

Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti, con X binomiale di parametri 2 e 0.2 e Y Bernoulliana di parametro 0.4.

a) Si calcoli $P(X=0,Y=0)$.

b) Si calcoli $P(X=3,Y=1)$.

c) Si calcoli $P(X<2)$.

d) Si calcoli $P(X+Y=3)$.

e) Si calcoli il coefficiente di correlazione lineare tra X e Y.

f) Si calcoli $P(X=1|Y=0)$.

ESERCIZIO 11

Siano X e Y due variabili aleatorie con distribuzione congiunta data dalla seguente tabella:

X \ Y	0	1	2	3
0	0	0	0.1	0
1	0	0.2	0.1	0
2	0	0.2	0	0.1
3	0.1	0.2	0	0

a) Si dica se X e Y sono indipendenti.

b) Si calcoli ed interpreti il coefficiente di correlazione lineare tra X e Y.

c) Si calcoli la distribuzione di $T=X+Y$.

d) Si determini la distribuzione condizionale di Y dato $X=0$.

ES. 1

a) $P(X>1) = P(X=2)+P(X=3)+P(X=4) =$
$= 0.2+0.1+0.1 = 0.4$

b) La mediana è 1 (Infatti $P(X\leq 1)=0.6$ e $P(X\leq 0)=0.4$)

c) $Var(X) = [1\cdot 0.2 + 4\cdot 0.2 + 9\cdot 0.1 + 16\cdot 0.1] - E(X)^2 =$
$= 3.5 - [1\cdot 0.2 + 2\cdot 0.2 + 3\cdot 0.1 + 4\cdot 0.1]^2 =$
$= 3.5 - 1.3^2 = 3.5 - 1.69 = 1.81$

d) T = spesa ~~cliente~~; $T = 10X$
$E(T) = 10\cdot E(X) = 10\cdot(1.3) = 13$

e)

t	$p_T(t)$
0	0.4
10	0.2
20	0.2
30	0.1
40	0.1

distribuzione di T

ES. 2 X = tempo necessario per la produzione di un'unità
$E(X) = 10$, $\sigma(X) = 2$
T = costo produzione una unità
$T = 20 + 2X$

a) $E(T) = 20 + 2E(X) = 20 + 2\cdot 10 = 40$

b) $\sigma(T) = \sqrt{Var(T)} = \sqrt{4\cdot Var(X)} = \sqrt{4\cdot 4} = 4$

ES. 3

a) X ha distribuzione simmetrica rispetto a 1; infatti sia i valori, sia le corrispondenti probabilità sono simmetriche rispetto a 1.

b) Valore atteso e mediana di X sono uguali a 1; infatti, se la distribuzione è simmetrica, valore atteso e mediana coincidono col centro di simmetria.

c) $S_Y = \{-3, -1, 5, 29\}$

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0.1 & y=-3; \\ 0.4 & y=-1; \\ 0.3 & y=5; \\ 0.2 & y=29; \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

ES. 4 X = numero auto, tra le 20 indivieto, che vengono multate

$X \sim Bin(20, 0.3)$

a) $P(X \geq 5) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4) =$
$= 1 - 0.001 - 0.007 - 0.028 - 0.072 - 0.130 = 0.762$

b) $P(X=7) = \frac{20!}{7!\,13!}(0.3)^7(0.7)^{13} = 0.164$

c) $P(6 \leq X \leq 8) = P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) =$
$= 0.192 + 0.164 + 0.114 = 0.47$

d) T = ammontare multe ; $T = 50X$
$E(T) = 50\,E(X) = 50 \cdot 20 \cdot 0.3 = 300$
$\sigma(T) = \sqrt{Var(T)} = \sqrt{2500 \cdot 20 \cdot (0.3)(0.7)} = \sqrt{10500} = 102.47$

ES. 5 X = numero volte, sulle 5, in cui il pendolare trova posto

$X \sim Bin(5, 0.6)$

a) $P(X=0) = \frac{5!}{0!\,5!}(0.6)^0(0.4)^5 = (0.4)^5 = 0.0102$

b) $P(X=5) = \frac{5!}{5!\,0!}(0.6)^5(0.4)^0 = (0.6)^5 = 0.0778$

c) $P(X<4) = 1 - P(X=4) - P(X=5) =$
$= 1 - 0.259 - 0.078 = 0.663$

Es. 6

X = numero fatture, sulle 12, con errori formali

$X \sim Bin(12, 0.08)$

a) $P(X>3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) =$
$= 1 - 0.368 - 0.384 - 0.183 - 0.053 = 0.012$

b) Costo $= T = 10X$

$E(T) = 10 \cdot E(X) = 10 \cdot 12 \cdot 0.08 = 9.6$

$Var(T) = 100 \cdot Var(X) = 100 \cdot 12 \cdot (0.08)(0.92) = 88.32$

Es. 7

X = numero telefonate indesiderate in un giorno

$X \sim Poisson(2.6)$

a) $P(X>3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.736 = 0.264$

b) $P(2 < X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 2) = 0.951 - 0.518 = 0.433$

c) Y = numero telef. inder. in 4 giorni

$Y \sim Poisson(10.4)$

$P(Y = 10) = (10.4)^{10} e^{-10.4} / 10! = 0.124$

d) Z = numero telef. in 3 giorni

$Z \sim Poisson(7.8)$

$E(Z) = 7.8$; $\sigma(Z) = \sqrt{Var(Z)} = \sqrt{7.8} = 2.793$

Es. 8

X = numero contratti stipulati in una settimana

$X \sim Poisson(1.8)$

a) $P(X \leq 4) = 0.964$

b) $P(X=3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = 0.891 - 0.731 = 0.16$

c) $T = 100 \cdot X$ = benefit

$E(T) = 100 \cdot E(X) = 100 \cdot 1.8 = 180$

$\sigma(T) = \sqrt{Var(T)} = \sqrt{10000 \cdot 1.8} = \sqrt{18000} = 134.164$

ES. 9

a) X = numero arrivi in 5 minuti

$X \sim \text{Poisson}(1.5)$

$P(X>2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.809 = 0.191$

b) Y = numero arrivi in 20 minuti

$Y \sim \text{Poisson}(6)$

$P(Y \geq 5) = 1 - P(Y \leq 4) = 1 - 0.285 = 0.715$

c) $P(Y=4) = P(Y \leq 4) - P(Y \leq 3) = 0.285 - 0.151 = 0.134$

d) Z = numero arrivi in 30 minuti; $Z \sim \text{Poisson}(9)$

$E(Z) = 9$

e) $\sigma(Z) = \sqrt{Var(Z)} = \sqrt{9} = 3$

ES. 10 X, Y indip., $X \sim Bin(2, 0.2)$, $Y \sim Bern(0.4)$

a) $P(X=0, Y=0) = P(X=0) \cdot P(Y=0) = \left[\frac{2!}{0!\,2!}(0.2)^0(0.8)^2\right](0.6) = 0.384$

b) $P(X=3, Y=1) = P(X=3)P(Y=1) = 0$

c) $P(X<2) = 1 - P(X=2) = 1 - \frac{2!}{2!\,0!}(0.2)^2(0.8)^0 = 0.96$

d) $P(X+Y=3) = P(X=2)P(Y=1) = (0.04)(0.4) = 0.016$

e) $\rho(X,Y) = 0$ perché X e Y sono indipendenti

f) $P(X=1 / Y=0) = P(X=1) = \frac{2!}{1!\,1!}(0.2)^1(0.8)^1 = 0.32$

ES. 11

a) No; ad esempio, $P(X=0, Y=0) = 0 \neq P(X=0) \cdot P(Y=0)$

b) $cov(X,Y) = [(0.2)+(0.2)+(0.4)+(0.6)+(0.6)] - [0.3+0.6+0.9][0.6+0.4+0.3] =$

$= 2 - (1.8) \cdot (1.3) = -0.34$

$Var(X) = [(0.3)+1.2+2.7] - 1.8^2 = (4.2) - 1.8^2 = 0.96$

$Var(Y) = [0.6+0.8+0.9] - 1.3^2 = (2.3) - 1.69 = 0.61$

$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} = \frac{-0.34}{\sqrt{0.96}\sqrt{0.61}} = -0.4443$

Esiste una relazione lineare "inversa", ovvero "negativa", ovvero "discordante", di media intensità tra X e Y.

c) $S_T = \{2, 3, 4, 5\}$

t	$P(T=t)$
2	0.3
3	0.4
4	0.2
5	0.1

d) $P(Y=2 \mid X=0) = 1$

La distribuzione di Y dato $X=0$ è degenere in 2.