

I modelli di portafoglio

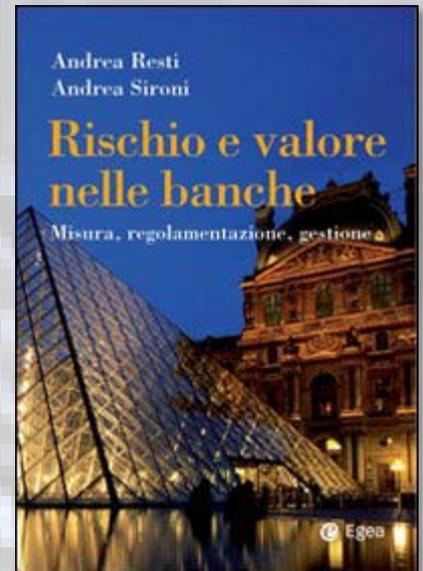
Slides tratte da:

**Andrea Resti
Andrea Sironi**

**Rischio e valore
nelle banche**

Misura, regolamentazione, gestione

Egea, 2008



AGENDA

- I modelli di portafoglio
- Scelta dell'orizzonte temporale e del livello di confidenza
- CreditMetrics
- PortfolioManager
- CreditPortfolio View
- Creditrisk+
- Il VaR marginale
- Esercizi

I modelli di portafoglio

- Le possibili perdite su un'esposizione creditizia sono distinguibili in due componenti:

perdita attesa

perdita inattesa

possibilità che le perdite effettive siano più elevate di quanto previsto

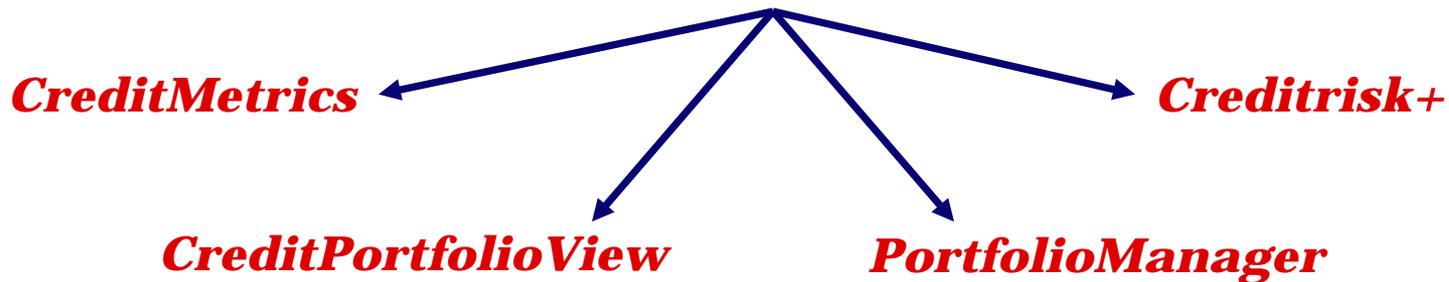
- Modi per quantificare la perdita inattesa:

deviazione standard della distribuzione di probabilità delle perdite future

percentile della distribuzione delle perdite future, determinato secondo un certo livello di confidenza (VaR)

I modelli di portafoglio

- **Perdita attesa** → Deve trovare copertura nelle riserve ed essere “caricata” sul tasso di interesse praticato al debitore
- **Perdita inattesa** → Deve riflettersi in una dotazione patrimoniale (“capitale economico” assorbito dal credito)
- Dopo aver affrontato due scelte preliminari (scelta del **risk horizon** e del **livello di confidenza**), **verranno analizzati quattro modelli**:



La scelta dell'orizzonte di rischio

- Teoricamente la scelta dovrebbe basarsi su due fattori:

Grado di liquidità del mercato su cui è possibile cedere le esposizioni creditizie

Preferenze dell'investitore

Holding period desiderato

Se le posizioni possono essere "chiuse" in n giorni, non è necessario preoccuparsi delle perdite per un orizzonte temporale superiore

- Molti prestiti bancari sono però illiquidi e non esiste un mercato secondario

L'orizzonte temporale "obbligato" è la scadenza finale di ogni prestito

Tutte le perdite fino a scadenza gravano sulla banca

Significa stimare PD, LGD e EAD misurate su orizzonti temporali differenti (stime lunghe e complesse)

La scelta dell'orizzonte di rischio

- **Orizzonte temporale = scadenza delle singole posizioni? Problemi:**

sarebbe impossibile “combinare” le perdite sui singoli crediti per giungere ad una distribuzione di probabilità delle perdite totali (disomogeneità di orizzonti temporali)

come trattare le esposizioni creditizie contrattualmente prive di scadenza?

Per questi motivi l'orizzonte temporale è fissato convenzionalmente a un anno.

- **Ragioni che giustificano questa convenzione**

1. *Tutti i parametri stimati dal sistema di rating di una banca (PD, LGD, EAD ed eventualmente probabilità di migrazione) sono riferiti ad un orizzonte temporale di un anno*

La scelta dell'orizzonte di rischio

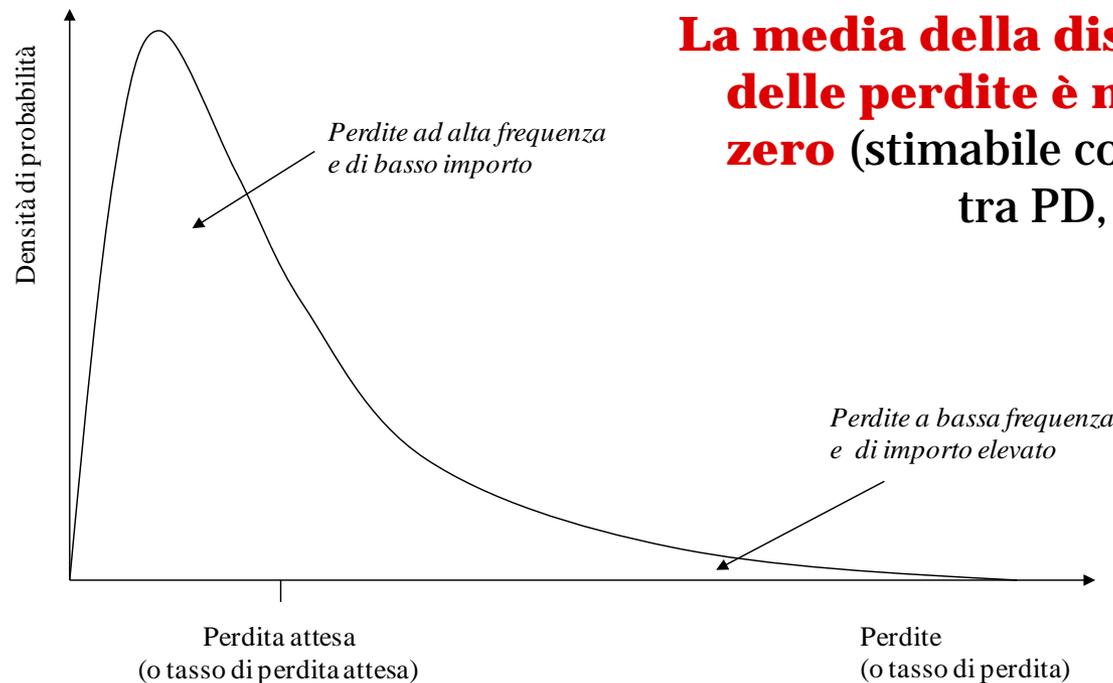
- *(continua) Ragioni che giustificano questa convenzione*
 2. Il capitale economico stimato con i modelli presentati in questo capitolo viene anche utilizzato nella stesura di budget **annuali**
 3. Un anno è un orizzonte temporale sufficiente ad organizzare un aumento di capitale per ripristinare il capitale eroso dalle perdite inattese
 4. La misura del rischio va calibrata sul periodo di riprezzamento del prestito, non sull'effettiva scadenza
 5. La scelta di un orizzonte di un anno coincide, per molte banche, con il periodo di rotazione media del portafoglio
- L'orizzonte di rischio di un anno risulta più accettabile per i modelli VaR di tipo multinomiale, come ad esempio CreditMetrics

La scelta dell'orizzonte di rischio

<i>Obiettivo</i>	<i>Fattori rilevanti</i>	<i>Orizzonte ideale</i>
Misurazione e controllo del rischio	Effettiva liquidità delle posizioni e <i>holding period</i> della banca	Vita residua delle esposizioni
Semplificazione	Coerenza con l'orizzonte temporale adottato per la stima delle PD e degli altri parametri di rischio	1 anno
Misurazione delle risk-adjusted performances (RAP) delle diverse unità della banca	Frequenza del processo di budgeting	1 anno
	Frequenza del processo di rilevazione dei risultati a consuntivo	1 anno
	Allocazione del capitale	1 anno
Congruità tra rischio e capitale	Tempo necessario a raccogliere nuovo capitale	1 anno
Impostazione di azioni correttive sul portafoglio	Periodo di rotazione medio del portafoglio	1 anno
Pricing	Scadenza delle esposizioni	Vita residua delle esposizioni
	Frequenza di revisione delle condizioni di tasso	1 anno

Determinazione del livello di confidenza

- Nel caso dei rischi di credito il VaR viene derivato “tagliando” la distribuzione delle perdite future in corrispondenza del percentile desiderato
- L'utilizzo di **distribuzioni normali a media nulla** va scartato per almeno due motivi:



La media della distribuzione delle perdite è maggiore di zero (stimabile come prodotto tra PD, LGD e EAD)

La distribuzione delle perdite è asimmetrica
Su un portafoglio di crediti si registrano solo eccezionalmente perdite molto rilevanti

Determinazione del livello di confidenza

- Con distribuzioni di probabilità diverse dalla normale e approcci basati sulle simulazioni, variando il livello di confidenza, il VaR non è immediatamente ricalcolabile
- Dato che la distribuzione è molto asimmetrica, variazioni del livello di confidenza provocano variazioni significative del VaR
- *Per poter calcolare il capitale economico di tutta la banca, è necessario che il livello di confidenza sia omogeneo per tutte le esposizioni*

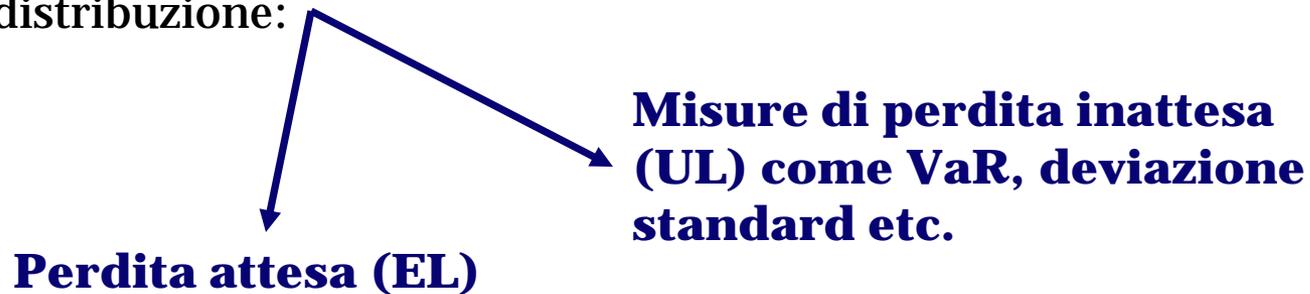
I modelli di portafoglio

- CreditMetrics
- PortfolioManager
- CreditPortfolioView
- Creditrisk+

CreditMetrics

- È stato originariamente introdotto da J. P. Morgan
- **CreditMetrics** stima la distribuzione delle variazioni di valore di un portafoglio di crediti entro un certo orizzonte di rischio.

Da questa distribuzione:



- Il modello considera le perdite dovute a un default e quelle legate alla migrazione in una diversa classe di rating

CreditMetrics

Stima del rischio di un singolo credito

- Ipotesi:
 - È disponibile un rating per ogni esposizione
 - La banca ha registrato in passato i tassi di default e di migrazione a un anno associati alle diverse classi di rating
 - Tali tassi sono utilizzabili anche per l'anno successivo

Rating iniziale	Rating a fine anno							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	90,81	8,33	0,68	0,06	0,12	0	0	0,00
AA	0,70	90,65	7,79	0,64	0,06	0,14	0,02	0,00
A	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06
BBB	0,02	0,33	5,95	86,93	5,30	1,17	0,12	0,18
BB	0,03	0,14	0,67	7,73	80,53	8,84	1,00	1,06
B	0,00	0,11	0,24	0,43	6,48	83,46	4,07	5,20
CCC	0,22	0,00	0,22	1,30	2,38	11,24	64,86	19,79

Fonte: S&P CreditWeek (15 aprile 1996), citato in (Gupton, Finger e Bhatia 1997)

Ad esempio, la probabilità per un'impresa BBB di conservare, nell'anno successivo, il proprio rating è l'86,93%.

CreditMetrics

Stima del rischio di un singolo credito

- Come si nota dalla tabella della slide precedente, un credito assegnato oggi alla classe BBB potrebbe trovarsi, tra un anno, in una qualsiasi delle sette classi di rating



Il valore dell'esposizione potrebbe assumere sette valori diversi



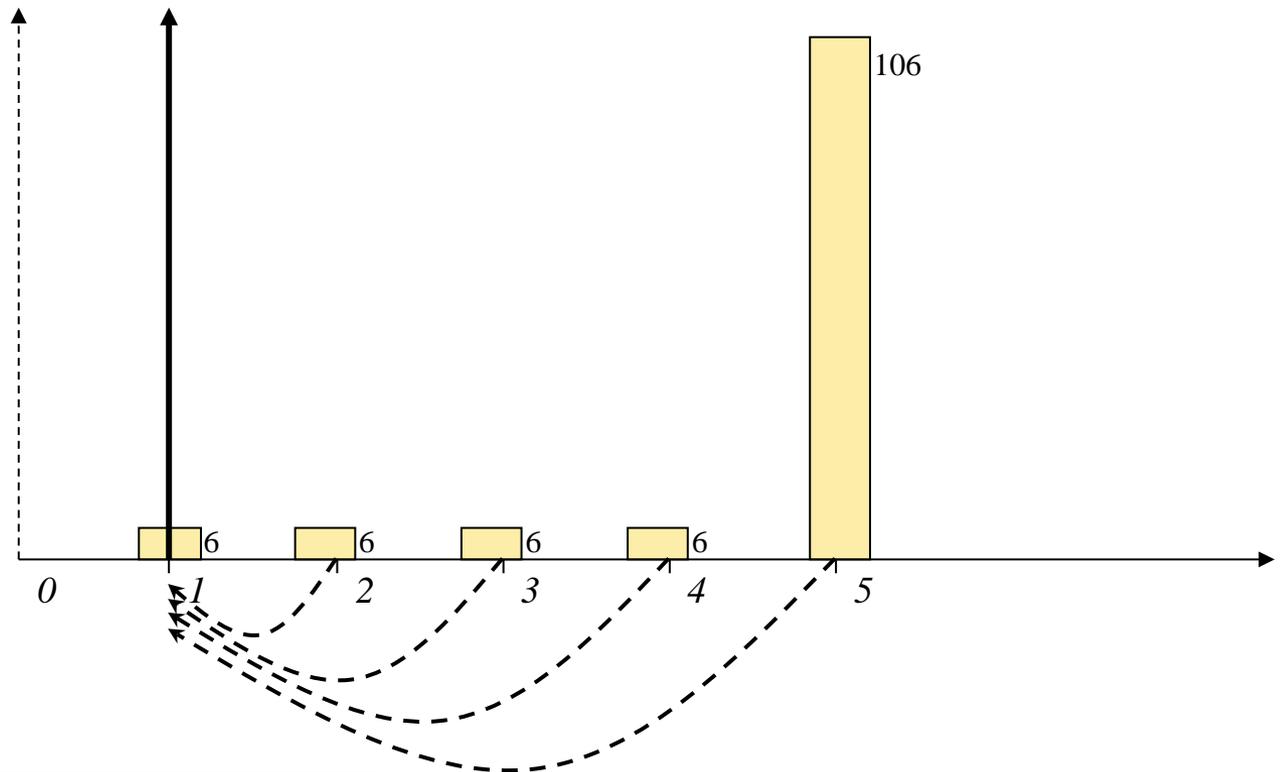
Valore del credito tra un anno =
Valore attuale dei flussi di cassa attesi in futuro, *calcolato tra un anno*
sulla base di un tasso adeguato al rating futuro del debitore.

CreditMetrics

Stima del rischio di un singolo credito

- **Esempio:**
 - Titolo con rating BBB
 - Cedola = 6 milioni di euro fino all'anno 5
 - Anno 5: rimborso capitale 100 mln

Il primo flusso di cassa non deve essere scontato, il secondo va scontato su un solo anno, etc.



CreditMetrics

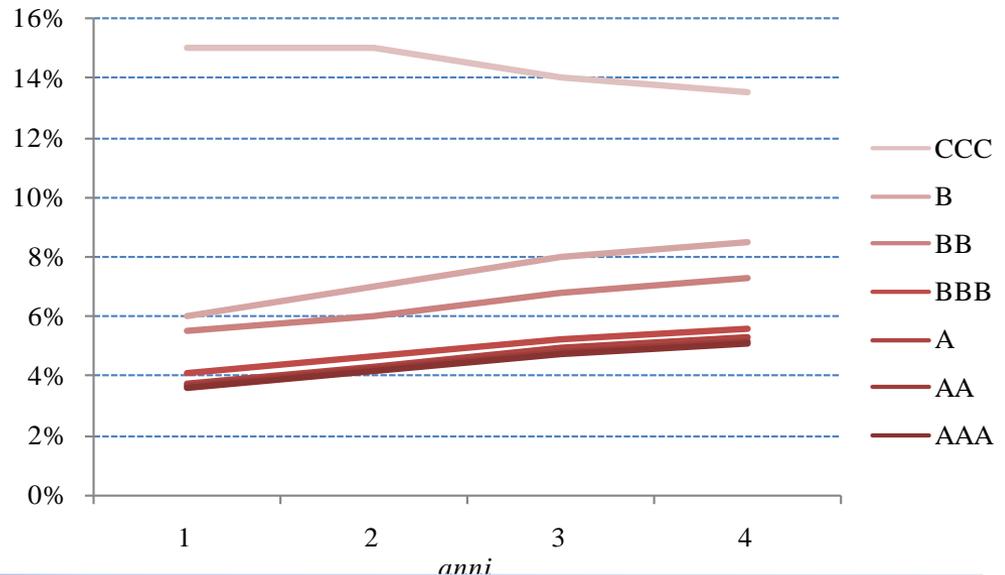
Stima del rischio di un singolo credito

- **Tasso di sconto:** deve riflettere i possibili valori dei tassi di mercato (spot) tra un anno → *Tassi forward validi per operazioni con decorrenza tra un anno*
- Tra un anno il credito potrebbe trovarsi in una qualunque delle sette classi

Il calcolo viene ripetuto 7 volte con sette diverse curve dei tassi forward

Classe di rating (Standard and Poor's)	Scadenza			
	1 anno	2 anni	3 anni	4 anni
AAA	3,60	4,17	4,73	5,12
AA	3,65	4,22	4,78	5,17
A	3,72	4,32	4,93	5,32
BBB	4,10	4,67	5,25	5,63
BB	5,55	6,02	6,78	7,27
B	6,05	7,02	8,03	8,52
CCC	15,05	15,02	14,03	13,52

Fonte: (Gupton, Finger e Bhatia 1997)



CreditMetrics

Stima del rischio di un singolo credito

- Consideriamo il titolo dell'esempio di slide 15:

Se alla fine del primo anno si trova ancora in BBB

$$FV_{1, BBB} = 6 + \frac{6}{(1 + 4,10\%)} + \frac{6}{(1 + 4,67\%)^2} + \frac{6}{(1 + 5,25\%)^3} + \frac{106}{(1 + 5,63\%)^4} = 107,53$$

Se si trova in BB \longrightarrow Downgrading

Riduzione di valore di 5,52 mln di euro (107,53-102,01)

$$FV_{1, BB} = 6 + \frac{6}{(1 + 5,55\%)} + \frac{6}{(1 + 6,02\%)^2} + \frac{6}{(1 + 6,78\%)^3} + \frac{106}{(1 + 7,27\%)^4} = 102,01$$

- Usando le diverse curve *forward* della tabella di slide 16, è possibile ricavare il valore di mercato del titolo in corrispondenza di tutte le classi di rating

CreditMetrics

Stima del rischio di un singolo credito

- Distribuzione dei valori di mercato a 1 anno:

Stato a fine anno (j)	Valore attuale tra un anno ($FV_{1,j}$)	Probabilità (p_j , valori %)	$\Delta V_j = FV_j - E(FV)$
AAA	109,35	0,02	2,28
AA	109,17	0,33	2,10
A	108,64	5,95	1,57
BBB	107,53	86,93	0,46
BB	102,01	5,3	-5,07
B	98,09	1,17	-8,99
CCC	83,63	0,12	-23,45
Insolvenza	53,80	0,18	-53,27
Media, $E(FV) = \sum p_j FV_j$	107,07		

probabilità, ricavata dalla matrice di transizione

- In caso in default il valore di mercato del titolo sarebbe pari a:

$EAD \cdot RR$ → Il **recovery rate (RR)** è stimabile con un modello interno o con gli studi pubblicati dalle agenzie di rating, in base a *seniority* e *garanzie*

CreditMetrics

Stima del rischio di un singolo credito

- **Valore atteso del credito tra un anno** = *media degli otto valori calcolati nella tabella di slide 18, ognuno ponderato per la propria probabilità*
107,07 milioni ←

- I possibili valori futuri del credito possono essere riscritti come variazioni (ΔV_j) rispetto al valore atteso
- Il valore atteso del titolo è diverso dal valore in caso di permanenza nella classe di rating iniziale (107,53)

$$107,53 - 107,07 = 0,46 \longrightarrow \text{misura della perdita attesa (EL) sul titolo}$$

CreditMetrics

Stima del rischio di un singolo credito

- Deviazione standard dei valori futuri del credito

$$\sigma_{FV} = \sigma_{\Delta V} = \sqrt{\sum_j [FV_j - E(FV)]^2 p_j} = \sqrt{\sum_j \Delta V_j^2 p_j} \cong 2,9$$

- Calcolo del VaR: taglio della distribuzione delle variazioni di valore a un anno in corrispondenza del percentile desiderato

ΔV_j	Probabilità, p_j (%)	Probabilità cumulate (%) $c_j = \sum_{V_k \leq V_j} p_k$
-53,27	0,18	0,18
-23,45	0,12	0,3
-8,99	1,17	1,47
-5,07	5,3	6,77
0,46	86,93	93,7
1,57	5,95	99,65
2,1	0,33	99,98
2,28	0,02	100

VaR al 99% di confidenza = 8,99

VaR al al 95% = 5,07

CreditMetrics

Stima del rischio di un portafoglio di due esposizioni

- Consideriamo due esposizioni: **titolo con rating A** e **titolo con rating BBB**

- Indipendenza:**

Probabilità che entrambi restino nella propria classe iniziale = prodotto delle due rispettive probabilità

Probabilità congiunte utilizzando le probabilità di slide 13



<i>Emittente con rating BBB</i>	<i>Emittente con rating A</i>								
	<i>AAA</i>	<i>AA</i>	<i>A</i>	<i>BBB</i>	<i>BB</i>	<i>B</i>	<i>CCC</i>	<i>Default</i>	<i>Qualsiasi stato</i>
AAA	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02
AA	0,00	0,01	0,30	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,33
A	0,01	0,14	5,42	0,33	0,04	0,02	0,00	0,00	5,95
BBB	0,08	1,97	79,15	4,80	0,64	0,23	0,01	0,05	86,93
BB	0,00	0,12	4,83	0,29	0,04	0,01	0,00	0,00	5,30
B	0,00	0,03	1,07	0,06	0,01	0,00	0,00	0,00	1,17
CCC	0,00	0,00	0,11	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,12
Default	0,00	0,00	0,16	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,18
Qualsiasi stato	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06	100,00

CreditMetrics

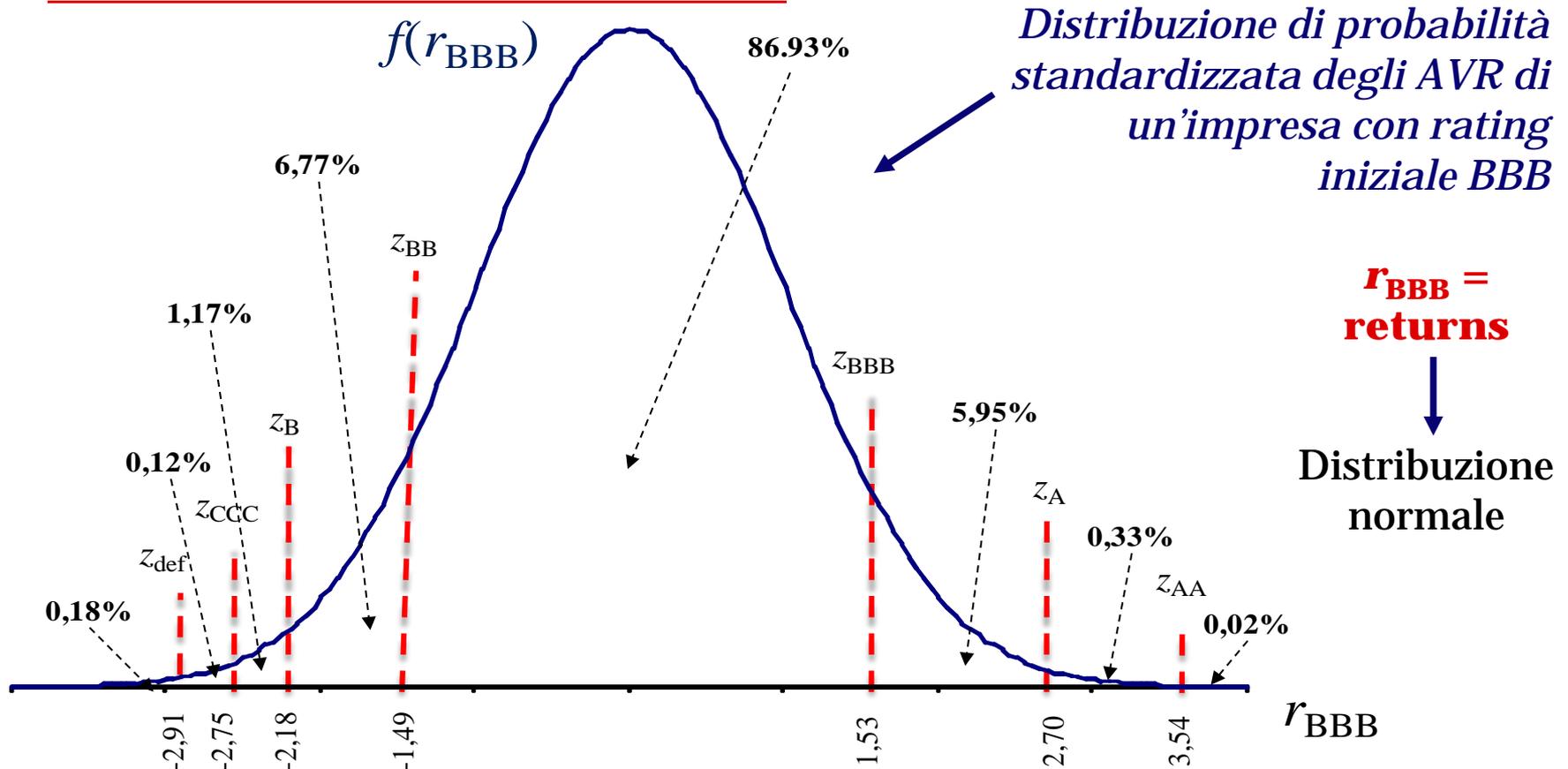
Stima del rischio di un portafoglio di due esposizioni

- L'ipotesi di indipendenza è irrealistica, fattori comuni guidano variazioni nei rating e insolvenze
- È necessario stimare le probabilità congiunte nell'ipotesi di correlazioni tra i debitori
- **CreditMetrics:**
 1. utilizza una variante del modello di Merton, in cui default e migrazioni dipendono dalle variazioni nel valore degli attivi aziendali (AVR, *asset value returns*)
 2. stima la correlazione tra gli *asset value returns* dei due debitori
 3. da tale correlazione ricava una distribuzione di proprietà congiunte

CreditMetrics

Stima del rischio di un portafoglio di due esposizioni

- Estensione del modello di Merton:**



CreditMetrics

Stima del rischio di un portafoglio di due esposizioni

- **Sistema di soglie** (distribuzione slide precedente):

- **Z_{def}** → soglia al di sotto della quale gli AVR determinano il fallimento dell'impresa.
- **Z_{CCC}** → se r_{BBB} è compreso tra Z_{def} e Z_{CCC} la forte riduzione del valore dell'attivo induce gli analisti della banca a un downgrading in classe CCC
- **Z_{AA}**
AAA → se gli r_{BBB} sono superiori ad essa, gli analisti le assegneranno un rating AAA
- **Z_{BB} e Z_{BBB}** → se AVR è compreso tra di esse il valore degli attivi aziendali non cambia a sufficienza per giustificare una variazione di rating
- Le soglie sono determinate in base alle probabilità della matrice di transizione

CreditMetrics

Stima del rischio di un portafoglio di due esposizioni

- Z_{def} è scelto in modo tale che l'area sotto la curva a sinistra del valore Z_{def} sia proprio la PD indicata nella matrice di transizione:

$$\int_{-\infty}^{z_{def}} f(r_{BBB}) dr_{BBB} = F(z_{def}) = PD = 0,18\%$$

- Consideriamo gli AVR in forma standardizzata (dividendoli per la volatilità)

↳ *La distribuzione di densità di probabilità degli AVR è una normale standard*

$$\int_{-\infty}^{z_{def}} f(r_{BBB}) dr_{BBB} = 0,18\% \quad \text{Si può riscrivere come} \quad N(z_{def}) = 0,18\%$$

$$z_{def} = N^{-1}(0,18\%) \cong -2,91$$

- Ugualmente per Z_{CCC} :

$$\int_{z_{def}}^{z_{CCC}} f(r_{BBB}) dr_{BBB} = N(z_{CCC}) - N(z_{def}) = p_{BBB \rightarrow CCC} = 0,12\%$$

$$z_{CCC} = N^{-1}(0,18\% + 0,12\%) \cong -2,75$$

CreditMetrics

Stima del rischio di un portafoglio di due esposizioni

- *Probabilità di transizione e AVRT di un'impresa BBB*

Soglie



AVRT $z_j = N^{-1}(c_j)$

j	Stato a fine anno s_j	Probabilità di transizione $P_{BBB \rightarrow s_j}$	Probabilità cumulata $c_j = \sum_{k \leq j} p_{A \rightarrow s_k}$	AVRT $z_j = N^{-1}(c_j)$
1	Default	0,18%	0,18%	-2,91
2	CCC	0,12%	0,30%	-2,75
3	B	1,17%	1,47%	-2,18
4	BB	5,30%	6,77%	-1,49
5	BBB	86,93%	93,70%	1,53
6	A	5,95%	99,65%	2,70
7	AA	0,33%	99,98%	3,54
8	AAA	0,02%	100,00%	

**Impresa
con
rating
A**

J	Stato a fine anno s_j	Probabilità di transizione $P_{A \rightarrow s_j}$	Probabilità cumulata $c_j = \sum_{k \leq j} p_{A \rightarrow s_k}$	AVRT $z_j = N^{-1}(c_j)$
1	Default	0,06%	0,06%	-3,24
2	CCC	0,01%	0,07%	-3,19
3	B	0,26%	0,33%	-2,72
4	BB	0,74%	1,07%	-2,30
5	BBB	5,52%	6,59%	-1,51
6	A	91,05%	97,64%	1,98
7	AA	2,27%	99,91%	3,12
8	AAA	0,09%	100,00%	

CreditMetrics

Stima del rischio di un portafoglio di due esposizioni

- Per le AVRT non si è dovuto conoscere il valore del debito, degli attivi dell'impresa debitrice e la volatilità dei rendimenti dell'attivo (che devono essere stimate per il modello di Merton originale)
- CreditMetrics è un modello “agnostico” che utilizza come input dati storici
- AVR standardizzati di un debitore → distribuiti come una normale standard
- Distribuzione congiunta degli AVR di due imprese → normale standard bivariata
- Date due variabili casuali \tilde{x} e \tilde{y} : funzione di densità di probabilità

$$n(x; y; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}$$

$$N(x^*, y^*; \rho) = pr(\tilde{x} < x^* \wedge \tilde{y} < y^*) = \int_{-\infty}^{y^*} \int_{-\infty}^{x^*} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}} dx dy$$

*Funzione
di densità
cumulata
 $N(x^*, y^*; \rho)$*

CreditMetrics

Stima del rischio di un portafoglio di due esposizioni

- Le funzioni di densità e di densità cumulata dipendono da ρ (**correlazione tra AVR**)
- Esempio:
 - $\rho = 38\%$
 - *Utilizziamo le matrici di transizione di slide 26*
 - *Stimiamo la probabilità di default congiunta dei 2 debitori*

$$pr(r_{BBB} < -2,91 \wedge r_A < -3,24) = N(-2,91, -3,24; 0,38) \cong 0,000027$$

- Per calcolare la probabilità che le due imprese si trovino in due certe classi alla fine dell'anno, si dovranno utilizzare le AVRT rilevanti

CreditMetrics

Stima del rischio di un portafoglio di due esposizioni

- Probabilità che entrambe le imprese mantengano il rating:

$$\begin{aligned}
 pr(-1,49 < r_{BBB} < 1,53; -1,51 < r_A < 1,98) &= \int_{-1,51}^{1,98} \int_{-1,49}^{1,53} n(r_{BBB}, r_{AA}; 0,38) dr_{BBB} dr_{AA} = \\
 &= \int_{-1,51}^{1,98} \int_{-1,49}^{1,53} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-0,38^2}} e^{-\frac{r_{BB}^2 - 0,4r_{BB}r_A + r_A^2}{2(1-0,38^2)}} dr_{BBB} dr_{AA}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{1,98} \int_{-\infty}^{1,53} n(r_{BBB}, r_{AA}; 0,38) dr_{BBB} dr_{AA} - \int_{-\infty}^{-1,51} \int_{-\infty}^{1,53} n(r_{BBB}, r_{AA}; 0,38) dr_{BB} dr_{AA} - \int_{-\infty}^{1,98} \int_{-\infty}^{-1,49} n(r_{BBB}, r_{AA}; 0,38) dr_{BBB} dr_{AA} + \\
 &+ \int_{-\infty}^{-1,51} \int_{-\infty}^{-1,49} n(r_{BBB}, r_{AA}; 0,38) dr_{BBB} dr_{AA} = \\
 &= N(1,53, 1,98; 0,38) - N(1,53, -1,51; 0,38) - N(-1,49, 1,98; 0,38) + N(-1,49, -1,51; 0,38) \cong 0,8001
 \end{aligned}$$

- Con lo stesso ragionamento è possibile calcolare tutte le probabilità congiunte

CreditMetrics

Stima del rischio di un portafoglio di due esposizioni

- Probabilità congiunte:

<i>Emittente con rating BB</i>	<i>Emittente con rating A</i>								
	<i>AAA</i>	<i>AA</i>	<i>A</i>	<i>BBB</i>	<i>BB</i>	<i>B</i>	<i>CCC</i>	<i>Default</i>	<i>Qualsiasi stato</i>
AAA	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02
AA	0,01	0,05	0,27	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,33
A	0,03	0,49	5,38	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	5,95
BBB	0,05	1,71	80,01	4,41	0,53	0,17	0,01	0,03	86,93
BB	0,00	0,01	4,31	0,77	0,14	0,06	0,00	0,01	5,30
B	0,00	0,00	0,86	0,23	0,05	0,02	0,00	0,01	1,17
CCC	0,00	0,00	0,08	0,03	0,01	0,00	0,00	0,00	0,12
Default	0,00	0,00	0,11	0,05	0,01	0,01	0,00	0,00	0,18
Qualsiasi stato	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06	100,00

- Il risultato è diverso da quello di slide 21 (no correlazione)
- È accresciuta la probabilità che si verifichino per entrambe le società variazioni simili, mentre è più difficile che si verifichino variazioni opposte

CreditMetrics

Stima del rischio di un portafoglio di due esposizioni

- Per ognuno dei 64 stati del mondo (tabella slide precedente) è possibile calcolare il valore del portafoglio composto dai due titoli



Somma dei valori futuri dei due titoli, ottenuti scontando tra un anno i flussi di cassa con un tasso forward adeguato

- Il primo titolo è quello già usato in esempi precedenti (caratteristiche nella slide 15)
- **Secondo titolo (rating A)**
 - *Durata 3 anni*
 - *Cedola = 5 milioni*
 - *Rimborso a scadenza di 100 milioni*

CreditMetrics

Stima del rischio di un portafoglio di due esposizioni

- Per ognuno dei 64 stati

			Titolo A							
			AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Defaul
			106,59	106,49	106,30	105,64	103,15	101,39	88,71	51,13
Titolo BBB	AAA	109,35	215,94	215,85	215,66	215,00	212,50	210,74	198,07	160,48
	AA	109,17	215,76	215,67	215,48	214,82	212,32	210,56	197,89	160,30
	A	108,64	215,23	215,14	214,95	214,29	211,79	210,03	197,36	159,77
	BBB	107,53	214,12	214,02	213,84	213,17	210,68	208,92	196,24	158,66
	BB	102,01	208,59	208,50	208,31	207,65	205,16	203,40	190,72	153,14
	B	98,09	204,67	204,58	204,39	203,73	201,24	199,48	186,80	149,22
	CCC	83,63	190,21	190,12	189,93	189,27	186,78	185,02	172,34	134,76
	Default	53,80	160,39	160,29	160,10	159,44	156,95	155,19	142,51	104,93

**Valori
titolo A**

**Valori
titolo
BBB**

Valori Portafoglio A+BBB

CreditMetrics

Stima del rischio di un portafoglio di due esposizioni

- Dalle tabelle della slide precedente (**valore del portafoglio**) e della slide 30 (**probabilità congiunte**) è possibile ricavare la media della distribuzione

↓
213,28

- Si può riesprimere la distribuzione in termini di differenze (ΔV) rispetto alla media
- Ordinando i 64 valori di ΔV in senso crescente e individuando il percentile desiderato, è possibile calcolare il VaR
- Il VaR al 95% di confidenza, ad esempio, risulterà pari a 4,96

CreditMetrics

La stima dell'asset correlation

- Calcolo della correlazione: il portafoglio crediti di una banca è costituito spesso da imprese non quotate



Non è possibile calcolare la volatilità dei rendimenti degli attivi a partire dalla serie storica dei prezzi azionari

- I debitori sono in numero elevato e ricavare tutte le asset correlation per via analitica richiederebbe tempi troppo lunghi



Soluzione



- **CreditMetrics:**

- ipotizza che i rendimenti degli attivi siano determinati da fattori di rischio sistematici e da un fattore idiosincratico.
Si calcola la correlazione tra i soli fattori sistematici
- la correlazione fra i rendimenti delle attività è approssimata con la correlazione fra rendimenti azionari (indici azionari di vari paesi)

CreditMetrics

Stima dell'asset correlation

- Asset Value Return:

$$r_j = \beta_{1,j}i_1 + \beta_{2,j}i_2 + \dots + \beta_{n,j}i_n + \delta_j\varepsilon_j$$

$\beta_{1,j}i_1 + \beta_{2,j}i_2 + \dots + \beta_{n,j}i_n$ ← **componente sistematica**
 $\delta_j\varepsilon_j$ ← **componente idiosincronica**

- Per ogni debitore, deve essere specificato un sistema di pesi

Fattori sistematici: ci si può aiutare con la ripartizione, per Paese e per settore, del fatturato, degli attivi, dei risultati

Fattore idiosincronico: tanto maggiore quanto è piccola l'impresa

CreditMetrics

Stima dell'asset correlation

- Esempio:
 - *Due imprese*
 - *Impresa A = gruppo bancario-assicurativo USA*
 - *Impresa BBB = gruppo industriale italiano, con interessi nel settore finanziario e una partecipazione in una compagnia elettrica francese*

	<i>Pesi non standardizzati</i>		<i>Pesi standardizzati</i>	
	<i>Impresa A</i>	<i>Impresa BBB</i>	<i>Impresa A</i>	<i>Impresa BBB</i>
<i>Fattori sistemati rilevanti</i>	$w_{k,A}$	$w_{k,BBB}$	$\beta_{k,A}$	$\beta_{k,BBB}$
i_1 - Settore bancario USA	50%		0,77	
i_2 - Settore assicurativo USA	40%	-	0,62	
i_3 - Settore automobilistico Italia	-	40%		0,75
i_4 - Settore finanziario Italia	-	25%		0,47
i_5 - Settore energetico Francia	-	20%		0,37
<i>Fattori specifici</i>	e_A	e_{BBB}	ε_A	ε_{BBB}
	10%	15%	0,15	0,28

- Se si vuole che l'espressione produca un r_j standardizzato è necessario che la somma dei quadrati dei coefficienti sia pari a uno

CreditMetrics

Stima dell'asset correlation

- AVR standardizzati delle due imprese: $r_A = \beta_{1,A}i_1 + \beta_{2,A}i_2 + \delta_A\varepsilon_A$

$$r_{BBB} = \beta_{3,BBB}i_3 + \beta_{4,BBB}i_4 + \beta_{5,BBB}i_5 + \delta_{BBB}\varepsilon_{BBB}$$

- **Correlazione:** $\rho_{A,BBB} = \beta_{1,A}\beta_{3,BBB}\rho_{1,3} + \beta_{2,A}\beta_{3,BBB}\rho_{2,3} + \beta_{1,A}\beta_{4,BBB}\rho_{1,4} +$
 $+ \beta_{2,A}\beta_{4,BBB}\rho_{2,4} + \beta_{1,A}\beta_{5,BBB}\rho_{1,5} + \beta_{2,A}\beta_{5,BBB}\rho_{2,5}$

- Correlazione tra fattori sistematici: correlazioni tra gli indici azionari dei diversi settori e Paesi

	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5
i_1 - Settore bancario USA	100%	70%	10%	30%	10%
i_2 - Settore assicurativo USA	70%	100%	20%	20%	15%
i_3 - Settore automobilistico Italia	10%	20%	100%	45%	20%
i_4 - Settore finanziario Italia	30%	20%	45%	100%	25%
i_5 - Settore energetico Francia	10%	15%	20%	25%	100%

$$\rho_{A,BBB} = 0,77 \cdot 0,75 \cdot 0,10 + 0,62 \cdot 0,47 \cdot 0,20 + 0,77 \cdot 0,37 \cdot 0,30 + 0,62 \cdot 0,75 \cdot 0,20 +$$

$$+ 0,77 \cdot 0,47 \cdot 0,10 + 0,62 \cdot 0,37 \cdot 0,15 \cong 0,38 \longrightarrow \text{asset correlation}$$

CreditMetrics

L'applicazione ad un portafoglio di N posizioni

- **Numero debitori = $N > 2$**
- **$g =$ classi di rating**



la distribuzione di probabilità congiunta comprende $(g+1)^N$ casi



Se $g = 20$ si dovrebbero stimare 8^{20} di probabilità diverse (oltre un miliardo di miliardi)

- Per questo motivo si utilizzano le ***simulazioni Monte Carlo***
- **La stima della distribuzione dei valori futuri del portafoglio è costituita da 9 fasi:**

1. *Individuazione delle AVRT corrispondenti alle diverse classi di rating*

2. *Stima delle asset correlations tra gli N debitori, raccolte nella matrice \mathbf{C} ($N \times N$)*

CreditMetrics

L'applicazione ad un portafoglio di N posizioni

3. *Calcolo della matrice \mathbf{T} tale che $\mathbf{T}'\mathbf{T}=\mathbf{C}$ (fattorizzazione di Cholesky)*
4. *Generazione di un vettore \mathbf{x} contenente N estrazioni casuali da N normali standard indipendenti; da questo si ricava un vettore $\mathbf{r}=\mathbf{T}\mathbf{x}$, contenente un possibile scenario per gli AVR*
5. *Confronto di ogni valore r_j del vettore \mathbf{r} con le AVRT del debitore, determinando se il debitore rimane nella classe di rating di partenza, migra in una classe diversa o termina in default*
6. *Calcolo del valore futuro dell'esposizione, attraverso un'opportuna curva dei tassi forward e in funzione della classe di rating assegnata*
7. *Calcolo valore futuro del portafoglio nello scenario, sommando i valori di tutte le N posizioni*

CreditMetrics

L'applicazione ad un portafoglio di N posizioni

8. *Si riparte dal punto 4, fino a generare una distribuzione di valori futuri FV del portafoglio sufficientemente numerosa*

9. *Calcolo del:*

- *valore medio della distribuzione*
- *differenze dalla media*
- *deviazione standard*
- *VaR*

Confronto del valore medio con il valore del portafoglio nel caso in cui tutti i crediti rimangano nella classe di rating iniziale per determinare la perdita attesa perdita attesa

Il metodo delle simulazioni Monte Carlo può richiedere tempi di calcolo elevati ma consente di generare risultati abbastanza accurati

CreditMetrics

L'applicazione ad un portafoglio di N posizioni

- Attraverso la simulazione Monte Carlo è possibile introdurre nel modello CreditMetrics il **rischio di recupero**
- Quando l'AVR di un debitore è inferiore alla sua Z_{def} è possibile, assegnargli un valore casuale tratto da un'opportuna distribuzione di probabilità

Distribuzione beta con media e volatilità pari al recupero medio stimato ed alla volatilità storicamente osservata

Genera tassi di recupero tra 0% e 100%

- Così trattato il rischio di recupero ha natura idiosincronica e diversificabile aumentando il numero N delle posizioni

CreditMetrics

L'applicazione ad un portafoglio di N posizioni

VANTAGGI

1. utilizza **dati di mercato oggettivi** e *forward looking*
2. adotta una **logica “a valori di mercato”**
3. considera **sia il rischio di insolvenza che il rischio di migrazione**
4. riconosce la **natura asimmetrica della distribuzione** dei valori futuri di un portafoglio crediti
5. consente di **calcolare misure di rischio marginale**, come il VaR marginale

CreditMetrics

L'applicazione ad un portafoglio di N posizioni

LIMITI

1. molti degli input **necessitano di matrici di transizione affidabili** e di mercati liquidi per ricavare i tassi forward
2. il modello **assume che la banca sia price-taker** nel mercato dei crediti
3. non è detto che le matrici di transizione storiche riflettano le probabilità future
4. l'ipotesi che le matrici di transizione siano uguali per tutte le imprese appartenenti a una data classe di *rating* è **irrealistica**
5. criticabile l'**utilizzo delle correlazioni fra indici azionari** per misurare le correlazioni tra gli attivi aziendali: equivale ad assumere che le attività delle imprese siano interamente finanziate da capitale di rischio o che la leva sia stabile
6. la scelta dei β_{jk} che collegano gli AVR di un'impresa ai fattori sistematici é **troppo discrezionale**

I modelli di portafoglio

- CreditMetrics
- PortfolioManager
- CreditPortfolioView
- Creditrisk+

PortfolioManager

- Questo modello si fonda su una metodologia strutturale

└───▶ ***I default vengono spiegati sulla base di un modello economico***

- Ci sono caratteristiche comuni a CreditMetrics

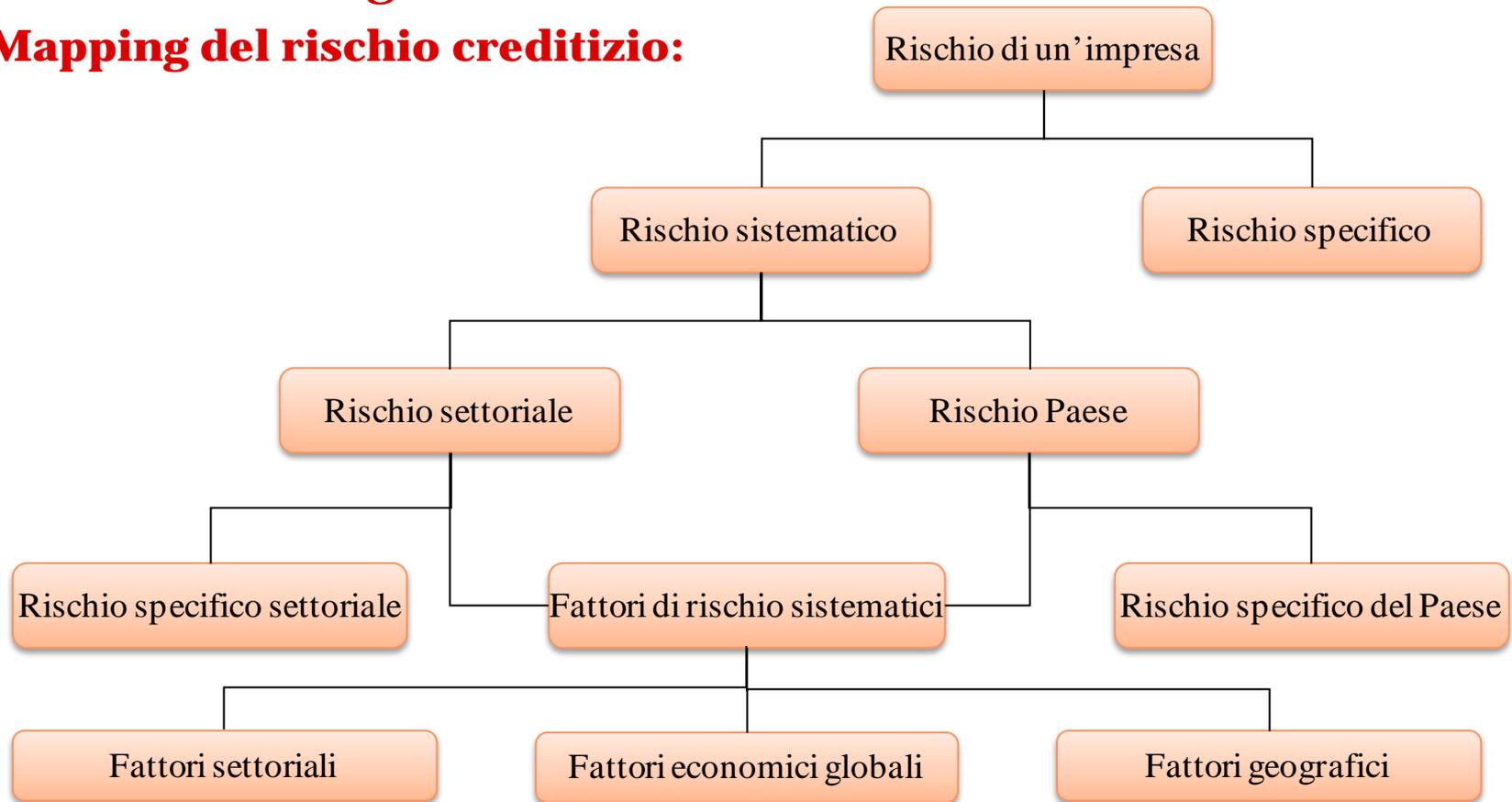
└───▶ Ad esempio la correlazione fra i rendimenti degli attivi delle imprese è ricavata dalle correlazioni fra i rendimenti azionari

- Il rendimento della singola impresa viene ricondotto ad un **modello multifattoriale in tre fasi:**

1. *Distinzione tra componente sistematica e specifica*
2. *La componente sistematica viene ricondotta a più fattori, associati a diversi settori e Paesi*
3. *Il rendimento di ogni fattore associato a un settore/paese è scomposto in una componente di rischio specifico e in una di rischio sistematico*

PortfolioManager

Mapping del rischio creditizio:



PortfolioManager

- Gli AVR di un'impresa sono descritti da una combinazione di fattori sistematici e da un fattore specifico
- È possibile condurre una simulazione Monte Carlo sui rendimenti dei diversi fattori di rischio per generare un numero sufficiente di scenari
- Due varianti:

1. Valutazione neutrale verso il rischio

Esempio

Dati:

- *Attività rischiosa zero coupon*
- *Scadenza: 1 anno*
- *Valore nominale = 100 milioni*
- *Probabilità di insolvenza = PD*
- *Perdita in caso di insolvenza = LGD*

PortfolioManager

- Payoff del titolo a scadenza:

$$p = PD \cdot 100 \cdot (1 - LGD) + (1 - PD) \cdot 100$$



Scomponibile nella somma di una **componente certa** p^*
e in una **componente incerta** \tilde{p}

$$p^* = 100 \cdot (1 - LGD)$$

$\tilde{p} = 0 \rightarrow$ **in caso di insolvenza**

$\tilde{p} = 100 - LGD \rightarrow$ **in caso di regolare restituzione del prestito**



$$p = 100 \cdot (1 - LGD) + (1 - PD) \cdot 100 \cdot LGD = p^* + \tilde{p}$$

PortfolioManager

- Valore della componente incerta:

↳ **Valore atteso futuro scontato per il tasso risk-free**

$$PV_{\tilde{p}} = \frac{\tilde{p}}{1+i} = \frac{(1 - PD^*) \cdot 100 \cdot LGD}{1+i}$$

- Valore attuale dell'intero titolo:

$$PV_p = \frac{p}{1+i} = \frac{100 \cdot (1 - LGD) + (1 - PD^*) \cdot 100 \cdot LGD}{1+i}$$

- **PD^* è la PD risk neutral**, che in generale è maggiore della PD reale

↳ *può essere determinata con un modello à la Merton*

PortfolioManager

- Differenze rispetto a CreditMetrics:

- **la distribuzione dei possibili eventi è binomiale (non multinomiale)**

↳ *Ci si concentra solo sulle perdite connesse ai default*

- **non è necessario conoscere lo spread richiesto dal mercato al debitore**

↳ Può essere comunque ricavato agevolmente

Il valore di mercato del credito deve essere lo stesso sia per l'investitore risk-neutral che per uno avverso al rischio

$$\frac{100 \cdot (1 - LGD) + (1 - PD^*) \cdot 100 \cdot LGD}{1 + i} = \frac{100}{1 + i + d}$$

--- spread
 d = $\frac{(1 + i)LGD \cdot PD^*}{1 - PD^* \cdot LGD}$

PortfolioManager

- Valutazione del portafoglio a valori di mercato

Costruzione di classi discrete che raggruppano i debitori con expected default frequency (EDF) compresa in un certo intervallo

Costruzione una matrice di migrazione

Ad ogni classe viene associato, in base alla sua PD risk neutral media, un **credit spread**

A questo punto, può essere ricostruita con una metodologia analoga a quella già osservata per **CreditMetrics**

Rating iniziale	Rating a fine anno							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	66,26	22,22	7,37	2,45	0,86	0,67	0,14	0,02
AA	21,66	43,04	25,83	6,56	1,99	0,68	0,20	0,04
A	2,76	20,34	44,19	22,94	7,42	1,97	0,28	0,10
BBB	0,30	2,80	22,63	42,54	23,52	6,95	1,00	0,26
BB	0,08	0,24	3,69	22,93	44,41	24,53	3,41	0,71
B	0,01	0,05	0,39	3,48	20,47	53,00	20,58	2,01
CCC	0,00	0,01	0,09	0,26	1,79	17,77	69,94	10,13

Nota: intervalli di EDF scelti in modo tale da approssimare la scala di rating di Standard and Poor's. Fonte (Kealhofer, Kwok e Weng 1998):

I modelli di portafoglio

- CreditMetrics
- PortfolioManager
- **CreditPortfolioView**
- Creditrisk+

CreditPortfolioView

- Le **migrazioni verso classi di rating migliori** (*upgradings*) sono più frequenti nelle fasi di crescita economica, meno frequenti sono i tassi di **migrazione verso classi peggiori** (*downgradings*)
- Le matrici di transizione dovrebbero essere corrette a seconda della fase del ciclo
- **CreditPortfolioView** lega le probabilità di migrazione e di insolvenza a variabili macroeconomiche come:



CreditPortfolioView

La stima delle probabilità di insolvenza condizionate

P_{jt} = Probabilità di insolvenza al tempo t di un gruppo j di imprese che reagiscono in modo uniforme all'evoluzione del ciclo economico

↓
La probabilità varia con il ciclo economico e viene modellata secondo una funzione *logit*

$$P_{jt} = \frac{1}{1 + e^{-y_{j,t}}}$$

valore al tempo t di un indice dello “stato di salute” del segmento j basato su fattori macroeconomici

- Più $y_{j,t}$ è elevato, minore è la probabilità di insolvenza

↘
è una combinazione lineare di più variabili macroeconomiche

**termine di errore
Rischio specifico**

$$y_{jt} = \beta_{j,0} + \beta_{j,1}x_{j,1,t} + \beta_{j,2}x_{j,2,t} + \beta_{j,3}x_{j,3,t} + v_{j,t}$$

↘
Rischio sistematico

CreditPortfolioView

La stima delle probabilità di insolvenza condizionate

- Per utilizzare le equazioni della slide precedenti a fini previsivi, è necessario stimare i valori futuri dei fattori macroeconomici



CreditPortfolioView prevede che si utilizzi un modello autoregressivo di secondo ordine

$$x_{j,i,t} = \gamma_{i,0} + \gamma_{i,1}x_{j,i,t-1} + \gamma_{i,2}x_{j,i,t-2} + \varepsilon_{j,i,t}$$



$\gamma_{i,j}$ devono essere stimati empiricamente e $\varepsilon_{j,i,t}$ è il termine di errore normalmente distribuito con media zero.

CreditPortfolioView

La stima della matrice di transizione condizionata

- Le **probabilità di insolvenza** condizionate vengono utilizzate per ricalibrare l'intera matrice delle probabilità di transizione



La matrice di transizione media di lungo termine viene corretta in funzione delle probabilità di insolvenza attese per l'anno successivo

- Ci si concentra su segmenti di imprese **speculative grade**, più sensibili alle variazioni del ciclo economico

PD delle classi speculative	Fase del ciclo economico	Aggiustamenti alle probabilità della matrice di transizione		
		Insolvenza	Downgrading	Upgrading
$PD_t^s > \mu_{PD_t^s}$	Recessione	↑	↑	↓
$PD_t^s < \mu_{PD_t^s}$	Espansione	↓	↓	↑

CreditPortfolioView

La stima della matrice di transizione condizionata

- Se nell'anno t le probabilità di default delle classi **speculative** (PD_t^s) sono superiori alla media storica:

↳ il ciclo economico è in una fase sfavorevole

↳ **La matrice di transizione viene modificata, aumentando le probabilità di insolvenza e di downgrading e riducendo quelle di upgrading**

- Correzioni opposte vengono fatte in caso di fase favorevole del ciclo economico

CreditPortfolioView

La stima della matrice di transizione condizionata

- Fasi del modello:

<i>Fase</i>	<i>Equazione rilevante</i>
1. Stima delle variabili macro relative al periodo t	$x_{j,i,t} = \gamma_{i,0} + \gamma_{i,1}x_{j,i,t-1} + \gamma_{i,2}x_{j,i,t-2} + \varepsilon_{j,i,t}$
2. Stima dell'indice di "salute" del singolo segmento j al tempo t	$y_{jt} = \beta_{j,0} + \beta_{j,1}x_{j,1,t} + \beta_{j,2}x_{j,2,t} + \beta_{j,3}x_{j,3,t} + \nu_{j,t}$
3. Stima della probabilità condizionata di insolvenza del segmento j al tempo t	$p_{jt} = \frac{1}{1 + e^{-y_{j,t}}}$
4. Confronto tra la PD generate per le classi <i>speculative</i> nel periodo t e la loro media di lungo periodo	$PD_t^s > \mu_{PD_t^s}$
5. Correzione della matrice di transizione	

- **Il modello consente di simulare processi di transizione pluriennali**


anche le matrici degli anni successivi al primo sono condizionate all'andamento dell'economia

CreditPortfolioView

Pregi e limiti

VANTAGGI

1. tentativo di **identificazione delle relazioni tra variabili** macroeconomiche e rischio di credito di un portafoglio

LIMITI

2. la stima dei coefficienti β **richiede un'ampia base di dati storici**, relativi ai tassi di insolvenza dei singoli segmenti
3. il criterio adottato per condizionare la matrice di transizione al ciclo economico sembra **piuttosto arbitrario**.

Non è detto che esso produca risultati migliori di una correzione soggettiva

- La correzione alla matrice di lungo periodo potrebbe non essere opportuna nel caso dell'approccio *point in time*

I modelli di portafoglio

- CreditMetrics
- PortfolioManager
- CreditPortfolioView
- Creditrisk+

CreditRisk+

- Applica al rischio di credito la matematica attuariale
- Le perdite che una compagnia assicurativa subisce derivano da due variabili:

frequenza con cui si verifica un certo tipo di sinistro

pagamento che la compagnia deve effettuare quando il sinistro si verifica

- Analogia con rischio di credito:

le perdite dipendono da:

- **frequenza degli eventi di insolvenza**
- **tasso di perdita in caso di default**

- I modelli di questo tipo si concentrano solo sul rischio di insolvenza

Rischio di migrazione non considerato, EAD e RR deterministici

CreditRisk+

La stima della distribuzione di frequenze delle insolvenze

- Distribuzione di probabilità del numero di insolvenze future



Distribuzione di *Poisson*

- La probabilità $p(n)$ che entro un anno si verifichino n insolvenze è calcolata come:

$$p(n) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!}$$

“numero di insolvenze atteso”,
cioè la somma di tutte le PD
dei clienti in portafoglio

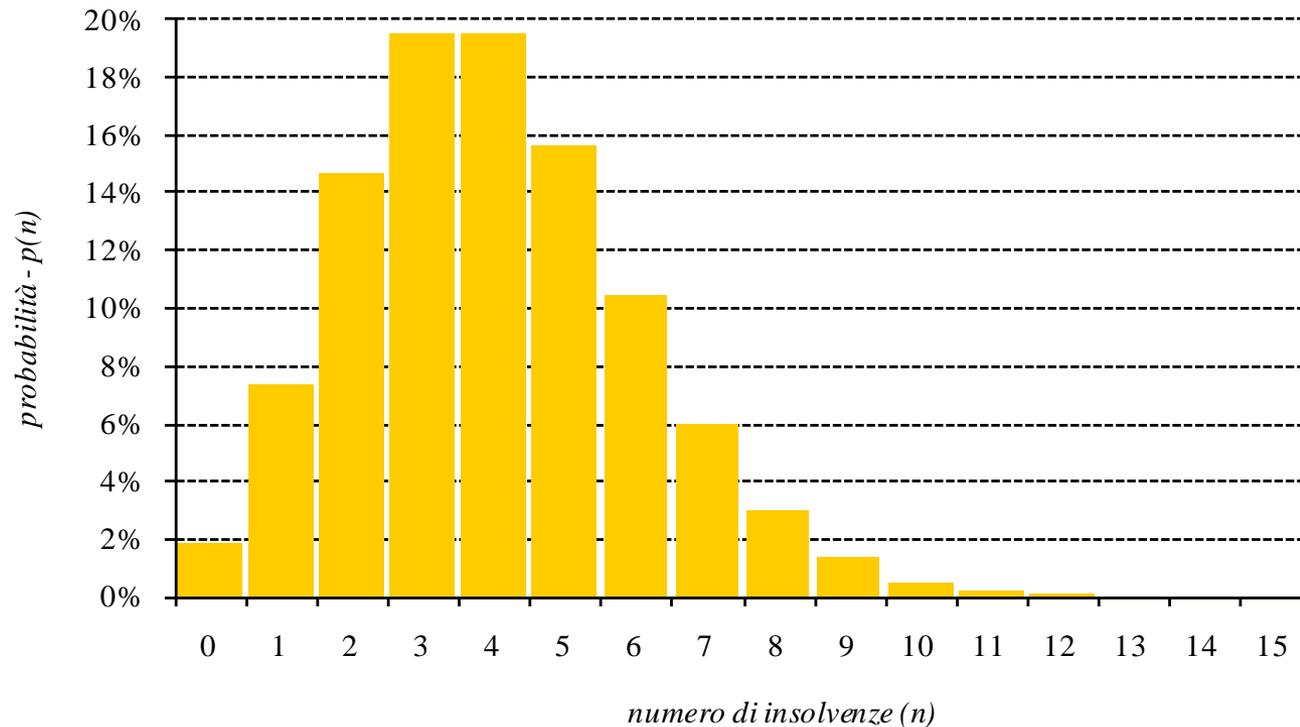
- Per una banca con 400 clienti, ognuno con una PD del 1%, il valore di μ sarà 4

$$p(0) = \frac{e^{-4} 4^0}{0!} = 1,83\% \longrightarrow \text{la probabilità che non si verifichi alcuna insolvenza}$$

CreditRisk+

La stima della distribuzione di frequenze delle insolvenze

- **Esempio di distribuzione di Poisson, per n che va da 0 a 15:**



- La distribuzione di probabilità è molto diversa dalla normale e fortemente asimmetrica

CreditRisk+

La stima della distribuzione di frequenze delle insolvenze

- Media della distribuzione: μ
- Deviazione Standard: $\sqrt{\mu}$
- **È una distribuzione molto pratica: l'unico parametro da stimare è μ**
- Si può utilizzare se sono rispettate due condizioni:

le singole PD devono essere
relativamente contenute

*La Poisson fornisce un'approssimazione
via via meno soddisfacente della reale
distribuzione di probabilità man mano
che le PD aumentano*

Le insolvenze dei
singoli debitori sono
indipendenti tra loro

*Ipotesi chiaramente
inaccettabile*

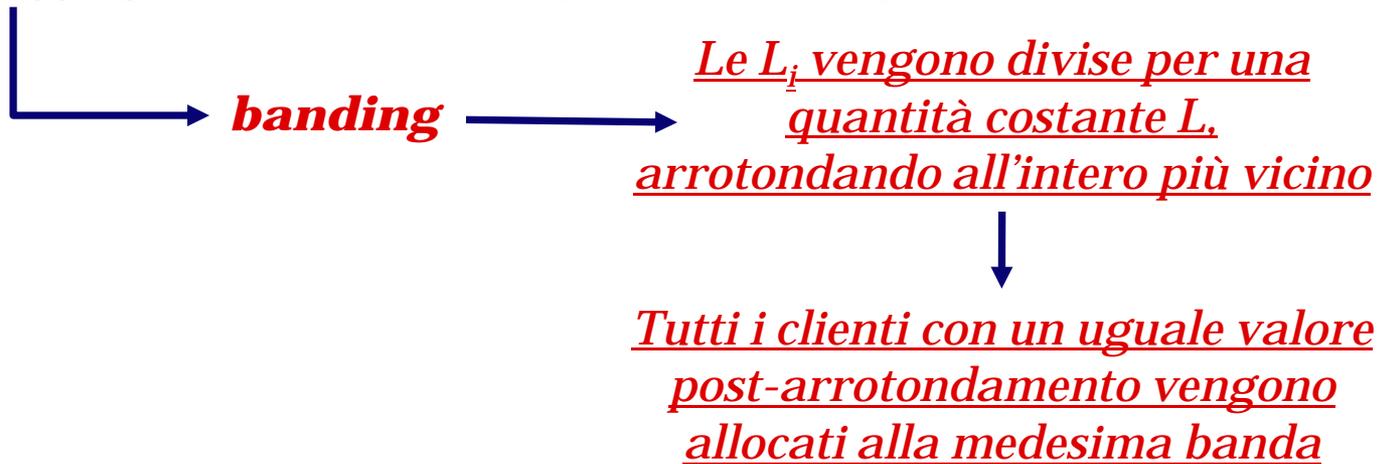
CreditRisk+

La distribuzione di frequenza delle perdite

- La perdita in caso di insolvenza del debitore i -esimo è:

$$L_i = LGD_i \cdot EAD_i = (1 - RR_i) \cdot EAD_i$$

- **Creditrisk+** ipotizza che EAD e RR siano stimate senza errore e che, senza incertezza, ad ogni debitore sia associata la corrispondente L_i
- Il modello aggrega tra loro tutte le esposizioni con L_i simile



CreditRisk+

La distribuzione di frequenza delle perdite

- Esempio di banding:**

<i>Cliente (i)</i>	<i>Esposizione netta (L_i)</i>	<i>Esposizione standardizzata L_i/L, con L=10.000</i>	<i>Esposizione arrotondata</i>	<i>Fascia (j)</i>
1	240.000	24	24	24
2	36.000	3,6	4	4
3	38.000	3,8	4	4
4	430.000	43	43	43
5	63.000	6,3	6	6
6	780.000	78	78	78
7	72.000	7,2	7	7
8	13.000	1,3	1	1
9	81.000	8,1	8	8
10	540.000	54	54	54

- Ogni banda rappresenta un portafoglio di prestiti, con perdite in caso di default approssimativamente equivalenti, pari a circa $j \cdot L$

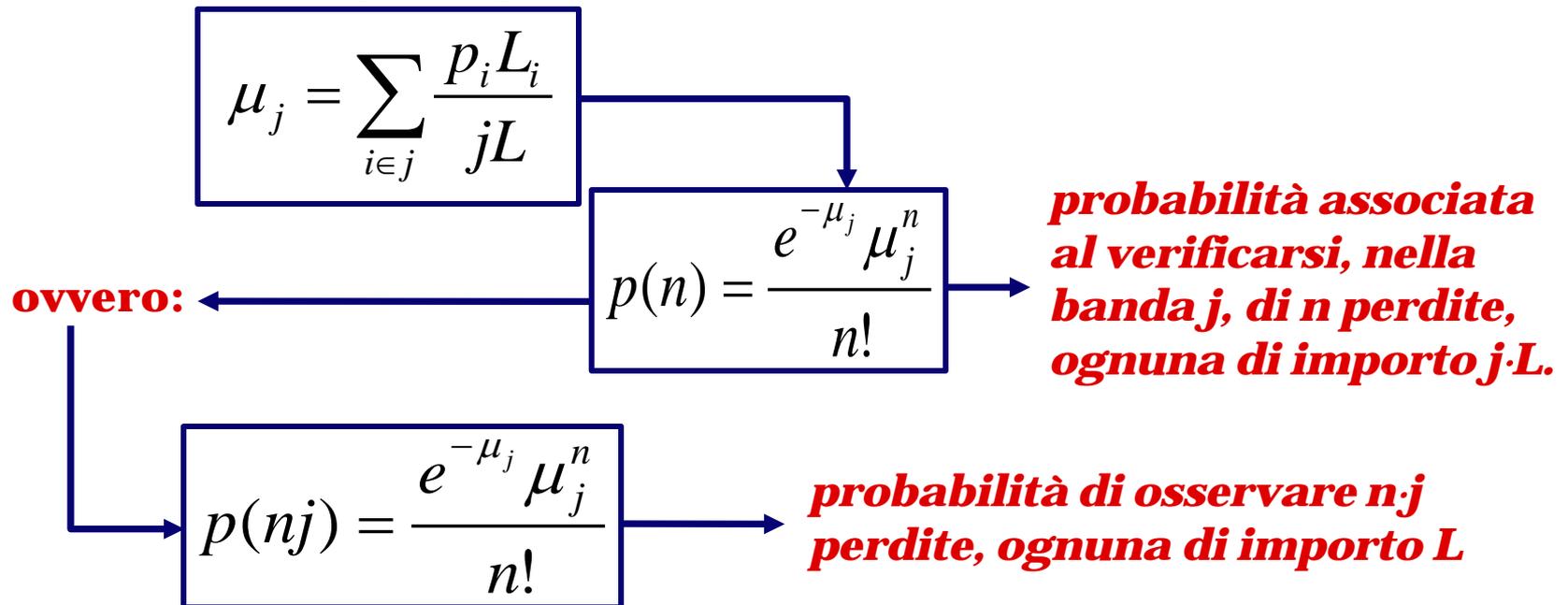


all'interno di una data banda, le perdite sono direttamente proporzionali al numero dei default

CreditRisk+

La distribuzione di frequenza delle perdite

- La distribuzione di Poisson viene utilizzata per rappresentare la distribuzione di probabilità delle perdite
- Al posto di μ si utilizzerà, per ogni banda, un diverso μ_j , dato dal numero di insolvenze attese in quella specifica banda



CreditRisk+

La distribuzione di frequenza delle perdite

- Esempio: consideriamo la banda 5 \longrightarrow **debitori con perdite in caso di default pari a circa $5 \cdot L$ euro, cioè 50.000 euro**
- Ipotizziamo μ_j pari a 4

*probabilità
associate ai
diversi livelli
di perdita*

<i>Numero di insolvenze (n)</i>	<i>Valore della perdita njL</i>	<i>Probabilità (%)</i>
0	0	1,83
1	50.000	7,33
2	100.000	14,65
3	150.000	19,54
4	200.000	19,54
5	250.000	15,63
6	300.000	10,42
7	350.000	5,95
8	400.000	2,98
9	450.000	1,32
10	500.000	0,53
11	550.000	0,19
12	600.000	0,06
13	650.000	0,02
14	700.000	0,01

CreditRisk+

La distribuzione delle perdite sull'intero portafoglio

- Per passare dalle distribuzioni di probabilità delle perdite all'interno di ogni singola banda alla distribuzione di probabilità delle perdite per l'intera banca...



Per ricavare, ad esempio, la deviazione standard o il VaR

- ...è necessario integrare le poissoniane che descrivono le singole bande

3 fasi

1. Per ogni poissoniana associata alle singole fasce si ricava la corrispondente funzione generatrice di probabilità (f.g.p.) $G_j(z) = e^{-\mu_j + \mu_j z^j}$
2. Si ricava la f.g.p. dell'intero portafoglio aggregando le f.g.p. delle singole fasce
Se i singoli default sono indipendenti la f.g.p. del portafoglio è la produttoria delle singole f.g.p. $G(z) = \prod_j e^{-\mu_j + \mu_j z^j} = e^{-\mu + \sum_j \mu_j z^j}$
 $\mu = \sum_j \mu_j$

CreditRisk+

La distribuzione delle perdite sull'intero portafoglio

- (continua) **3 fasi**
3. La f.g.p. del portafoglio viene ritrasformata in una distribuzione di probabilità:

Probabilità

$$p(nL) = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n G(z)}{dz^n} \right|_{z=0}$$

Permette di calcolare la probabilità associata a tutti i possibili livelli di perdite

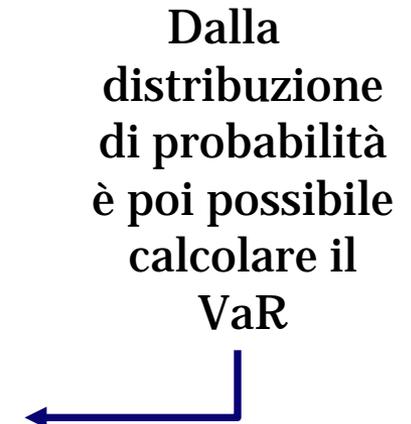
EL

99° percentile

Peggior 1%

Perdite

VaR al 99% di confidenza



CreditRisk+

L'incertezza relativa al tasso di insolvenza medio e le correlazioni

- Ipotesi del modello: il numero di insolvenze su un portafoglio è approssimato con una distribuzione di *Poisson* (media μ e deviazione standard $\sqrt{\mu}$)
- Osservando le statistiche sul numero di default reali, a parità di media la deviazione standard del numero di insolvenze è superiore a $\sqrt{\mu}$.

Classe di rating	N. di insolvenze annue per 100 debitori Media (μ)	Deviazione standard
Aaa	0,00	0,0
Aa	0,03	0,1
A	0,01	0,0
Baa	0,13	0,3
Ba	1,42	1,3
B	7,62	5,1

Fonte: (Carty e Lieberman 1996)

(Dati misurati da Moody's nel periodo 1970-1995: numero medio di insolvenze per un portafoglio di 100 debitori)

Per la classe B, ad esempio, se μ è 7,62 ci aspetteremmo una deviazione standard di $\sqrt{7,62} = 2,76$

Quella osservata è 5,1

CreditRisk+

L'incertezza relativa al tasso di insolvenza medio e le correlazioni

- La distribuzione di Poisson ipotizza che i default dei singoli clienti siano indipendenti



**Nella realtà i debitori tendono a fallire per “grappoli”
 μ può variare in funzione dell’andamento dell’economia**



Maggiore volatilità

- Gli Autori di Creditrisk+ modificano dunque i modelli presentati nelle slide precedenti, considerando μ come una variabile aleatoria



Si ottiene una volatilità maggiore e coerente con quella empirica e, implicitamente, si aggiunge l’ipotesi di correlazione tra i default (v. slide successiva)

CreditRisk+

L'incertezza relativa al tasso di insolvenza medio e le correlazioni

- Facendo variare μ è possibile usare una distribuzione di probabilità dove le insolvenze sono *indipendenti* (Poisson) per descrivere il mondo reale, dove le insolvenze sono *correlate*
- **Esempio:**
 - Due debitori: Alpha Inc. e Beta Ltd
 - Se l'economia è in espansione
 - PD(Alpha) = 4% e PD(Beta) = 2%, $\mu = 0,06$
 - Se l'economia è in recessione
 - PD(Alpha) = 10% e PD(Beta) = 6%, $\mu = 0,16$
 - I due scenari hanno entrambi probabilità del 50%
 - Dato μ (**nota e quindi costante**), le probabilità congiunte sono il prodotto delle probabilità individuali nei singoli scenari
 - Ma se μ è **ignota e quindi stocastica**, la distribuzione di probabilità non condizionata è data dalla media (con pesi 50% e 50%) delle probabilità valide nei due scenari

CreditRisk+

L'incertezza relativa al tasso di insolvenza medio e le correlazioni

<i>Stato I: espansione economica</i>				
		<i>Alpha Inc.</i>		
		<i>Insolvenza</i>	<i>Sopravvivenza</i>	<i>Totale</i>
<i>Beta Ltd.</i>	<i>Insolvenza</i>	0,08%	1,92%	2,00%
	<i>Sopravvivenza</i>	3,92%	94,08%	98,00%
	<i>Totale</i>	4,00%	96,00%	100,00%
<i>Stato II: recessione</i>				
		<i>Alpha Inc.</i>		
		<i>Insolvenza</i>	<i>Sopravvivenza</i>	<i>Totale</i>
<i>Beta Ltd.</i>	<i>Insolvenza</i>	0,60%	5,40%	6,00%
	<i>Sopravvivenza</i>	9,40%	84,60%	94,00%
	<i>Totale</i>	10,00%	90,00%	100,00%
<i>Distribuzione non condizionale (50% x Stato I + 50% x Stato II)</i>				
		<i>Alpha Inc.</i>		
		<i>Insolvenza</i>	<i>Sopravvivenza</i>	<i>Totale</i>
<i>Beta Ltd.</i>	<i>Insolvenza</i>	0,34%	3,66%	4,00%
	<i>Sopravvivenza</i>	6,66%	89,34%	96,00%
	<i>Totale</i>	7,00%	93,00%	100,00%

L'ipotesi di correlazione è implicita:
 ad esempio la probabilità di default congiunta (0,34%) è superiore delle PD dei due debitori ($7\% \cdot 4\% = 0,28\%$).

CreditRisk+

L'incertezza relativa al tasso di insolvenza medio e le correlazioni

- Creditrisk+ lavora in modo simile all'esempio.
- Per ogni valore di μ usa una Poissoniana, ipotizzando indipendenza

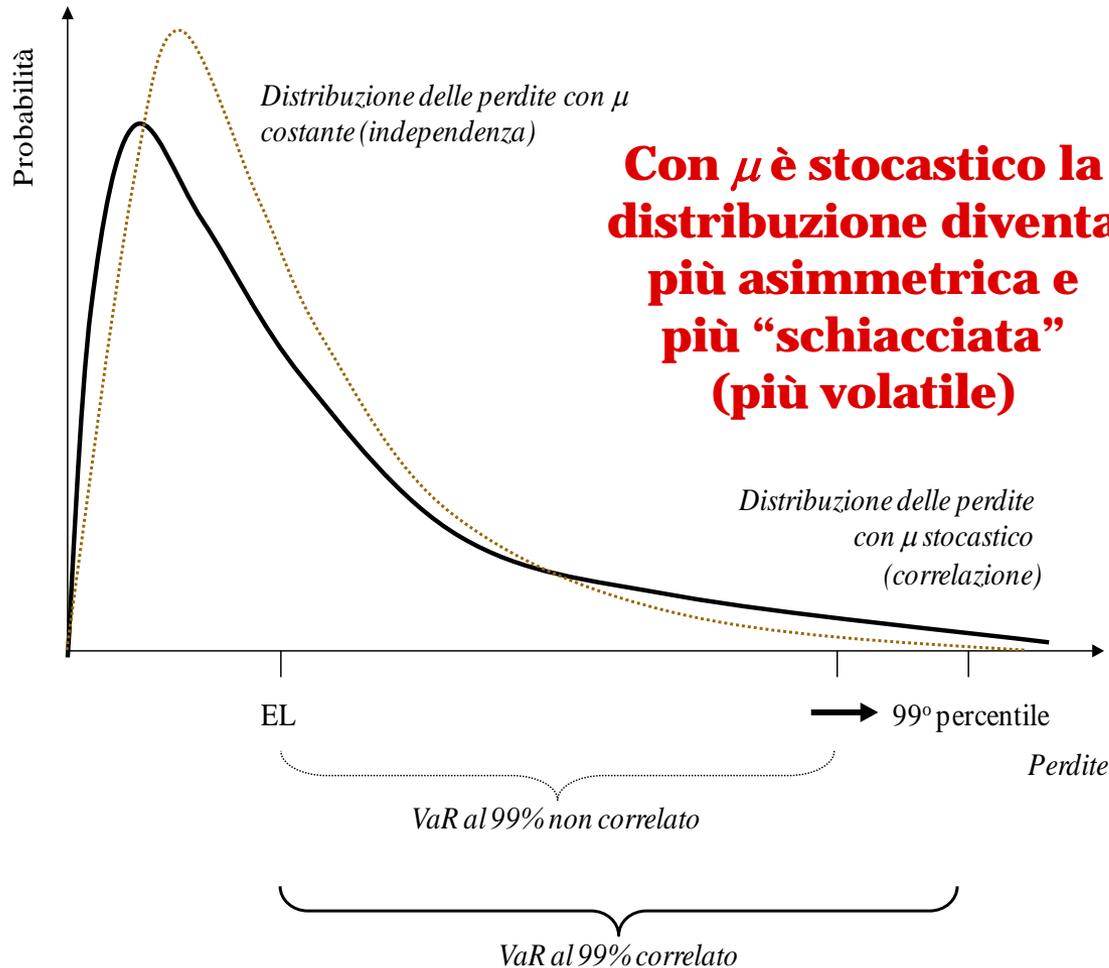


Ma poiché μ è stocastico implica correlazione tra i default

- Il modello ipotizza che le *PD* delle imprese siano variabili aleatorie funzione di ***n background factors*** rappresentativi di alcune componenti del ciclo economico
- Ogni fattore x_k segue una distribuzione gamma e i diversi x_k sono tra loro indipendenti
- Per semplicità si ipotizza che le *PD* siano funzioni lineari dei vari x_k

CreditRisk+

L'incertezza relativa al tasso di insolvenza medio e le correlazioni



- La LGD può essere scomposta in quote percentuali ($\theta_{A1}, \theta_{A2} \dots \theta_{An}$) ognuna abbinata all'andamento di un diverso fattore
- Il portafoglio della banca può essere visto come un insieme di sottoportafogli, ognuno costituito dalle θ_{ik} che rappresentano la quota di perdita sull'impresa i associata al k -esimo settore

↓

È quindi possibile ricavare la distribuzione di probabilità delle perdite per l'intero portafoglio

CreditRisk+

L'incertezza relativa al tasso di insolvenza medio e le correlazioni

- Secondo questo modello due imprese sono correlate tra loro solo se le rispettive esposizioni risentono del medesimo fattore:

$$\rho_{A,B} = \sqrt{p_A p_B} \sum_{k=1}^n \theta_{Ak} \theta_{Bk} \left(\frac{\sigma_k}{\mu_k} \right)^2$$

Correlazione fra l'insolvenza di due imprese A e B

probabilità di insolvenza di A
probabilità attesa di insolvenza di B

media del tasso d insolvenza per il settore k-esimo $\sigma_k =$ volatilità del tasso di insolvenza per il settore k-esimo

- Correlazione = 0 in due casi
 - Se il numero atteso di insolvenze è costante ($\sigma_k = 0$)
 - Se le due imprese non hanno alcun settore in comune ($\theta_{Ak} \cdot \theta_{Bk} = 0 \quad \forall k$)

CreditRisk+

Pregi e Limiti

VANTAGGI

- 1. Relativa parsimonia degli input richiesti.**
Dati necessari: PD dei singoli debitori, EAD e LGD,
“sensibilità” delle singole imprese ai diversi
background factors
Non necessarie: matrici di transizione, curve dei tassi
forward
- 2. Possibilità di ricavare la distribuzione di
probabilità delle perdite future in via analitica,**
senza ricorrere a simulazioni Monte Carlo

CreditRisk+

Pregi e Limiti

LIMITI

1. La definizione dei background factors e la stima dei factor loadings sono potenzialmente arbitrari

Molte variabili economiche sono inoltre correlate tra loro
(per il modello i background factors devono essere non correlati)

2. Il modello si concentra sul solo rischio di insolvenza e trascura il rischio di migrazione

3. Assenza di rischio di recupero (si ipotizza che i tassi di recupero attesi siano stimati senza errore) **e di esposizione** (si ipotizza di conoscere con certezza le EAD dei debitori)

VaR Marginale

- Il **VaR marginale** è la differenza fra il VaR complessivo del portafoglio e il VaR del portafoglio ricalcolato escludendo l'esposizione in questione



indica in che misura quell'esposizione contribuisce ad accrescere il rischio del portafoglio

- Se la nuova esposizione è scarsamente correlata alle precedenti, il suo VaR marginale sarà probabilmente contenuto
- Il VaR marginale può essere positivo (più spesso) o negativo, ed è di norma inferiore al VaR stand alone della nuova esposizione



a causa dell'imperfetta correlazione tra le diverse esposizioni rischiose

Un confronto tra i principali modelli

	<i>CreditMetrics</i>	<i>PortfolioManager</i>	<i>CreditPortfolioView</i>	<i>Creditrisk+</i>
<i>Tipologia di rischio considerata</i>	Migrazione, insolvenza e recupero	Migrazione, insolvenza e recupero	Migrazione, insolvenza e recupero	Insolvenza
<i>Definizione di rischio</i>	Variazione nei valori (di mercato) futuri	Perdite da migrazioni e insolvenze	Variazione nei valori (di mercato) futuri	Perdite da insolvenze
<i>Fattori determinanti la probabilità di migrazione</i>	Classe di rating	Distanza dal default point	Rating, ma anche ciclo economico (in modo diverso per diversi settori o aree geografiche)	Nessuno (rischio di migrazione non considerato)
<i>Matrici di transizione</i>	Costanti e basate sull'esperienza passata	Determinate da un modello strutturale microeconomico	Determinate dal ciclo macroeconomico	Non presenti
<i>Fattori determinanti la correlazione a livello di portafoglio</i>	Asset correlation stimata sulla base della correlazione fra indici azionari (modello multifattoriale)	Asset correlation stimata sulla base della correlazione fra indici azionari (modello multifattoriale)	Fattori macroeconomici	Factor loadings (con background factors indipendenti)
<i>Sensibilità delle stime al ciclo economico</i>	Sì, attraverso il peggioramento dei rating dei debitori (funziona bene se la banca assegna il rating point in time)	Sì, attraverso il peggioramento delle EDF ricavate dal prezzo delle azioni (se questo descrive correttamente il ciclo economico)	Sì, attraverso la modifica delle matrici di transizioni (ed eventualmente il peggioramento dei rating)	No. Il tasso di default è volatile ma indipendente dal ciclo
<i>Tasso di recupero</i>	Fisso o casuale (distribuzione beta)	Casuale (distribuzione beta)	Casuale (distribuzione empirica)	Deterministico
<i>Approccio adottato</i>	Simulazioni	Simulazioni	Simulazioni	Analitico

Un confronto tra i principali modelli

- I modelli presentati si possono classificare in base a cinque aspetti:
 - 1. modelli binomiali (default mode) versus modelli multinomiali**
 - 2. modelli a valori futuri versus modelli a tassi di perdita**
 - 3. modelli conditional versus modelli unconditional**
 - 4. modelli basati su un approccio di simulazione versus modelli basati su un approccio analitico**
 - 5. modelli fondati su correlazioni fra rendimenti degli attivi (asset correlation) versus modelli basati su correlazioni fra insolvenze (default correlation)**

Un confronto tra i principali modelli

Default mode versus multinomiale

- I **modelli default mode** considerano solo due stati possibili: **insolvenza** o **sopravvivenza**

↳ **Le perdite si verificano solo in caso di insolvenza**

- I **modelli multinomiali** considerano anche la possibilità di migrazioni verso una diversa classe di rating.

↓
↳ **Anche il downgrading provoca una perdita**

Ricalcolano il valore della esposizione valutandola “a prezzi di mercato” (tramite un modello di asset pricing)

- Fatta eccezione per Creditrisk+, che è un modello default mode, tutti gli altri modelli illustrati in questo capitolo sono multinomiali

Un confronto tra i principali modelli

Valori futuri versus tassi di perdita

- L'output del modello può essere la distribuzione dei valori futuri del portafoglio o dei tassi di perdita
- I modelli a valori futuri utilizzano come input la curva per scadenze degli *spread* calcolati rispetto ai titoli privi di rischio
- Nei modelli a tassi di perdita non è necessario conoscere lo *spread*, che anzi può diventare un *output* del modello
 - **CreditMetrics è un tipico modello a valori futuri.**
 - **Creditrisk+ è invece un modello a tassi di perdita.**
 - **CreditPortfolioView e CreditManager possono essere utilizzati in entrambi i modi.**

Un confronto tra i principali modelli Conditional versus unconditional

- Nei **modelli conditional**, quale CreditPortfolioView, le stime delle probabilità di insolvenza e di migrazione vengono “condizionate” alla fase congiunturale
- Il “condizionamento” si fonda sull’evidenza empirica
 - ↳ ***i tassi di insolvenza e i tassi di migrazione risentono dall’andamento del ciclo economico***
- I **modelli unconditional** non apportano alcuna correzione di questo tipo
 - ↳ ***questo approccio ha un suo fondamento logico, in caso di un sistema di rating point in time***
- Se il sistema di rating è di tipo **through the cycle** l’utilizzo di matrici di transizione condizionali è corretto

Un confronto tra i principali modelli Simulazione Monte Carlo versus soluzione analitica

- Alcuni modelli non formulano alcuna ipotesi circa la forma della distribuzione di probabilità delle perdite e generano una distribuzione attraverso una simulazione Monte Carlo
- I modelli analitici ipotizzano una funzione di densità di probabilità diversa da quella normale (non adatta per un portafoglio crediti)



**È così possibile ricavare il
VaR e altre misure di rischio
senza ricorrere a procedure
di simulazione**

Un confronto tra i principali modelli

Asset correlation versus default correlation

- La correlazione fra debitori dipende dal fatto che il merito creditizio è funzione anche di fattori “sistematici”
- I modelli per il rischio di credito riconducono lo “stato di salute” dei singoli debitori a più fattori di rischio sistematico elementari (ad esempio settori produttivi o aree geografiche), cui si aggiunge una componente di rischio specifico
- La **misurazione del rischio del portafoglio** si fonda sulla **correlazione fra tassi di insolvenza** (**default correlation**), o sulla **correlazione fra gli asset value returns** di due imprese



*CreditMetrics e PortfolioManager
utilizzano le asset correlations*



*Creditrisk+ consente di stimare
una misura di default correlation*

Alcuni limiti dei modelli per il rischio di credito

- Il settore bancario e finanziario ha compiuto sforzi consistenti per migliorare i sistemi di misurazione e gestione del rischio di credito
- L'attività di finanziamento e di gestione del credito è stata oggetto di una sorta di rivoluzione
- I modelli visti nelle slide precedenti presentano ancora diversi limiti:
 - 1. Trattamento del rischio di recupero**
 - 2. Ipotesi di indipendenza fra esposizione e probabilità di insolvenza**
 - 3. Ipotesi di indipendenza fra rischio di credito e rischi di mercato**
 - 4. L'impossibilità di effettuare test retrospettivi**

Alcuni limiti dei modelli per il rischio di credito

1. **Trattamento del rischio di recupero:**

viene solitamente trattato come idiosincratico

↳ *il rischio di recupero è quindi totalmente diversificabile*

↓
In realtà è possibile che il rischio di recupero abbia natura in parte sistematica; trascurare questa possibilità può portare a sottostimare il rischio di credito totale

2. **Ipotesi di indipendenza fra esposizione e probabilità di insolvenza:** l'EAD solitamente viene considerata nota

↳ *È però possibile che PD e EAD siano correlate*

↓
In un ***interest rate swap***, un aumento dei tassi fa aumentare il valore della posizione (e dunque EAD) e anche in molti casi anche la probabilità di insolvenza della controparte

Alcuni limiti dei modelli per il rischio di credito

3. Ipotesi di indipendenza fra rischio di credito e rischi di mercato: i rischi di mercato e i rischi di credito potrebbero essere correlati

↳ *Considerando una posizione in obbligazioni, ad esempio, un aumento dei tassi e un peggioramento del merito creditizio producono lo stesso effetto: una riduzione del valore di mercato della posizione*

Soluzioni:

- modelli in forma ridotta di Duffie, Jarrow, Lando, Singleton e Turnbull

↳ *le probabilità di insolvenza e di migrazione sono legate a fattori di rischio sistemati come il livello dei tassi*

- modello di “seconda generazione” sviluppato da Standard & Poors (Portfolio Risk Tracker).

↳ *tassi di interesse e spread stocastici, si tratta insieme il rischio di mercato e di credito*

Alcuni limiti dei modelli per il rischio di credito

4. L'impossibilità di effettuare test retrospettivi:

backtesting non statisticamente affidabili

↳ L'orizzonte temporale adottato per il rischio di credito è tipicamente un anno

↓
Difficoltà nel reperimento di dati storici (250 anni di dati!)

↓
Il comitato di Basilea non consente infatti alle banche di utilizzare, per il calcolo del patrimonio minimo obbligatorio, i propri modelli VaR per il rischio di credito

Esercizi/1

1. Una banca, che utilizza CreditMetrics, ha emesso un prestito ad una società classificata come “rating 3” nel suo sistema di rating interno. Il prestito pagherà una cedola di 5 milioni di euro esattamente dopo un anno, un'altra cedola di altri 5 milioni esattamente dopo due anni, ed un flusso di cassa finale (cedola più capitale) di 105 milioni esattamente dopo tre anni. La matrice di transizione a un anno della banca è la seguente:

		<i>Stato finale</i>					
		<i>Rating 1</i>	<i>Rating 2</i>	<i>Rating 3</i>	<i>Rating 4</i>	<i>Rating 5</i>	<i>Default</i>
<i>Stato iniziale</i>	<i>Rating 1</i>	90.0%	5.0%	3.0%	1.0%	0.5%	0.5%
	<i>Rating 2</i>	4.0%	88.0%	4.0%	2.0%	1.0%	1.0%
	<i>Rating 3</i>	2.0%	4.5%	85.0%	5.0%	2.0%	1.5%
	<i>Rating 4</i>	1.0%	4.0%	9.0%	80.0%	3.5%	2.5%
	<i>Rating 5</i>	0.5%	3.5%	6.0%	10.0%	75.0%	5.0%

Esercizi/1

La curva dei tassi zero coupon è piatta al 4% (composto annuo) e che gli emittenti appartenenti alle diverse classi di rating pagano i seguenti spread, costanti per tutte le scadenze:

<i>Rating 1</i>	<i>Rating 2</i>	<i>Rating 3</i>	<i>Rating 4</i>	<i>Rating 5</i>
0.26%	0.51%	0.76%	1.26%	2.52%

Ipotizzando che il prestito abbia un valore di recupero in caso di default di 70 milioni di euro, calcolate:

- a.** la distribuzione di probabilità dei valori futuri del prestito tra un anno;
- b.** il valore atteso del prestito tra un anno;
- c.** il VaR al 95% di confidenza del prestito su un orizzonte di rischio di un anno.

Esercizi/2

- 2.** In caso di una recessione, la probabilità di insolvenza della società Alfa è uguale a 2%, mentre quella della società Beta è il 4%. In caso di espansione economica, entrambe le probabilità si dimezzano. Dato un certo scenario macroeconomico (recessione o espansione) le insolvenze delle due società possono essere considerate indipendenti. Gli analisti stimano che vi sia una probabilità del 40% di una recessione e del 60% di un espansione.

Esercizi/2

- a.** calcolate la probabilità di default non condizionata di Alfa e quella di Beta;
- b.** calcolate la probabilità di default congiunto di Alfa e Beta condizionata a ciascuno dei due possibili scenari;
- c.** calcolate la probabilità di default congiunto di Alfa e Beta non condizionata ad alcuno scenario macroeconomico, e dite se e perché essa segnala una correlazione positiva tra le due insolvenze.

Esercizi/3

3. Una banca che utilizza CreditMetrics ha stimato la seguente matrice di transizione ed i seguenti tassi spot zero coupon:

	A	B	C	D	E	default
A	98,0%	1,0%	0,3%	0,1%	0,1%	0,5%
B	0,8%	95,0%	1,5%	1,0%	0,7%	1,0%
C	0,2%	1,0%	93,0%	2,3%	2,0%	1,5%
D	0,1%	1,9%	3,0%	90,0%	3,0%	2,0%
E	0,0%	1,0%	3,0%	4,5%	87,5%	4,0%

	A	B	C	D	E	default
A	98,0%	1,0%	0,3%	0,1%	0,1%	0,5%
B	0,8%	95,0%	1,5%	1,0%	0,7%	1,0%
C	0,2%	1,0%	93,0%	2,3%	2,0%	1,5%
D	0,1%	1,9%	3,0%	90,0%	3,0%	2,0%
E	0,0%	1,0%	3,0%	4,5%	87,5%	4,0%

Esercizi/3

Ipotizzate che la banca abbia emesso un prestito a favore di una società con rating C; tale prestito prevede un unico flusso di cassa finale (capitale più interessi) pari a 1.000 euro, che scade esattamente tra due anni. Il valore stimato del prestito in caso di default è pari a 400 euro. Usando CreditMetrics, calcolate

- a.** il valore corrente del prestito;
- b.** il suo valore atteso;
- c.** il VaR al 98% di confidenza su un orizzonte di rischio di un anno.